RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS SFAX BIBLIOTHÈQUE

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2001

Concours en Biologie et Géologie

Épreuve de Mathématiques

Durée: 3H	Date: 7 Juin 2001	8Heure	Nb pages: 4
Barême: Pb 1	I: 3pts ; II: 2pts ; III: 4pts	Pb 2	I: 5,5pts ; II: 5,5pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème 1.

Partie I.

On s'intéresse à la recherche des solutions paires et développables en série entière de l'équation suivante :

$$(1) \quad y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

On suppose que les solutions $y(x)$ sont développables en séries entières et qu'elles s'écrivent sous la forme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dans son intervalle de convergence de rayon R.

1) Les fonction $y(x)\,, y'(x)$ sont - elles dérivables , si oui calculer leur dérivées et donner les rayons de convergence des séries obtenues.

Dans la suite on suppose que la fonction $y(x)$ est une fonction paire.

2) que peut-on dire des coefficients a_n pour les entiers n impairs.

3) En remplaçant $y(x), y'(x)$ et $y''(x)$ par leur séries entières respectives dans l'équation (1) , déterminer la relation vérifiée par les coefficients a_n .

4) a) Exprimer a_n en fonction de n et de a_0 .

b) Calculer alors le rayon de convergence de la série obtenue.

5) Calculer la somme $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Partie II. 2

On s'intéresse à l'intégration d'une forme différentielle totale.

Soit la forme différentielle df définie par : $df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. où

$$P(x,y) = -xe^{-(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta})} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = -ye^{-(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta})}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

1) En écrivant la condition nécessaire que doivent vérifier P et Q pour que df soit une différentielle totale , déterminer la relation entre α et β.

Dans la suite on suppose que df est une différentielle totale.

2) En intégrant la forme diffrentielle , déterminer une expression de $f(x,y)$.

3) Déterminer l'expression de $f(x,y)$ qui tend vers zéro quand x, y tendent vers l'infini.

Partie III. 4

Soient α un réel et (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité est définie par :

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}}, & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer α pour que $h(x,y)$ soit une densité de probabilité.

2) Déterminer les lois marginales des variables X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes.

3) Calculer les espérances mathématiques $E(X), E(Y), E(XY)$. En déduire la covariance $\mathrm{cov}(X,Y)$.

4) Calculer $E(-2X+1)$ et $E((-2X+1)^2)$. En déduire la variance $V(X)$.

5) Calculer $E\Big[(-2X+1)(-2Y+1)\Big]$ et $E\Big[(X+Y)(X-Y)\Big]$.

(On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Problème 2.

Dans tout le problème , la première composante de chaque vecteur propre sera choisie égale à 1.

Partie I.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E dans E défini par sa matrice A dans la base B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le noyau Kerf et l'image Imf de l'endomorphisme f, et en donner une base pour chacun d'eux. A-t-on $E = Imf \bigoplus Kerf$?

2) a) La matrice A est-elle diagonalisable? justifier votre réponse.

b) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ classées dans l'ordre croissant suivant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et leur vecteurs propres u_1, u_2, u_3 respectifs.

c) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et calculer P^{-1}.

3) Soit α un réel donné , on considère la matrice M définie par $M = I + \alpha A$, où I est la matrice identité de E.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de la matrice A et u le vecteur propre associé à λ , alors $1+\alpha\lambda$ est une valeur propre de la matrice M , donner son vecteur propre associé.

b) En déduire les valeurs propres (choisies dans l'ordre croissant) de la matrice M ainsi que les vecteurs propres associés.

c) Ecrire la matrice de passage P_1 de la base B à la base B_2 formée par les vecteurs propres de M.

d) Montrer que M est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.

Partie II. 5,5

Soit h un réel strictement positif. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\quad g(x,y) = \dfrac{y-x}{h}$.

On considère les suites numériques $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ définies par leur premiers termes x_0 , y_0 et z_0 et pour tout $n \geq 1$:

$$\left\{\begin{array}{lcrrrr} g(x_n, x_{n+1}) & = & 2x_n & + & & z_n \\ g(y_n, y_{n+1}) & = & & 2y_n & - & z_n \\ g(z_n, z_{n+1}) & = & x_n & -y_n & + & z_n \end{array}\right.$$

1) a) Exprimer x_{n+1} , y_{n+1} , z_{n+1} en fonction de x_n , y_n . z_n et h.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $X_{n+1} = LX_n$,

où $L = I + \beta A$, et β est un réel à déterminer en fonction de h.

2) a) Déterminer les valeurs propres μ_1 , μ_2 , μ_3 ($\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$) de L et leur vecteurs propres associés U_1 , U_2 , U_3.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B à la base $B_3 = (U_1 , U_2 , U_3)$. En déduire la matrice Q^{-1}.

c) Donner la matrice diagonale Δ semblable à L et écrire L en fonction de la matrice Δ.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

a) En utilisant les questions 1) b) et 2) c) montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , Y_{n+1} = \Delta Y_n.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\ , Y_n = \Delta^n Y_0$.

4) Exprimer a_n , b_n , c_n en fonction de n , a_0 , b_0 , c_0 et h.

5) En déduire x_n , y_n , z_n en fonction de n , x_0 , y_0 , z_0 et h.