CORRIGE

Exercice (6,5 points).

Barème

I- Etude des changements de phases de l'eau.

1°) Le diagramme des phases de l'eau est représenté en coordonnées P et T sur la figure 1.

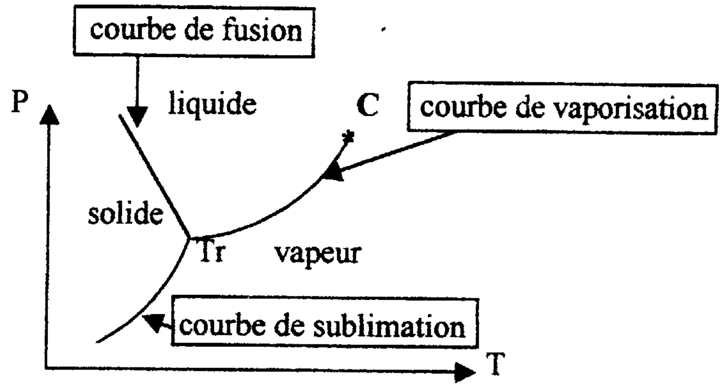


Figure 1

0,125 — 0,125 — 0,125 — 0,125 — 0,125 — 0,125 — 0,125 — 0,125

2°) - Le point Tr est appelé le point triple ; il correspond à la coexistence des trois états. 0,25

- Le point C est appelé le point critique. Au dela de C, il n'y a pas de passage bien défini entre état liquide et état gazeux. 0,25

3°) Définition de la chaleur latente de changement d'état ; c'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse du corps pur pour le faire changer d'état sans variation de température. 0,25

4°) On appelle pression saturante, la pression de la vapeur en équilibre avec la phase liquide. Elle ne dépend que de la température : $P_{sat}(T)$. 0,25 — 0,25

5°) Pour l'eau, la courbe de fusion a l'inclinaison indiquée sur la figure donc $\frac{dP}{dT} < 0$;

la chaleur latente de fusion est positive, => $u_L < u_s$. 0,25

II- Etude de la courbe de vaporisation de l'eau.

1°) a) $\text{Ln } P = A - \frac{4884}{T}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{4884}{T^2} dT \qquad \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{dT}{dP} = \frac{1}{4884}\frac{T}{P}$$

$$L_v = T(u_v - u_L)\frac{dP}{dT} \qquad (u_L \ll u_v) \Rightarrow \quad u_v = \frac{L_v}{T}\frac{dT}{dP} \Rightarrow \boxed{u_v = \frac{L_v}{4884}\frac{T}{P}}$$ 0,5

b) A.N : $\boxed{u_v = 1{,}696 \text{ m}^3/\text{Kg} = 1696 \text{ cm}^3/\text{g}}$ 0,5

2°) a) Calcul de A:

$$A = \frac{4884}{T} + \text{Ln } P = \frac{4884}{373} + \text{Ln } 1{,}013.10^5 = 24{,}6$$

la formule devient:

$$\text{Ln } P = 24{,}6 - \frac{4884}{T}$$

La pression de vapeur saturante pour la température de 50°C

$\mathrm{Ln}\, P = 24{,}6 - \frac{4884}{323}$ => $\boxed{P = 13095{,}18 \text{ Pa}}$ 0,5

b) Volume massique u'_v de la vapeur d'eau à cette température :

$\boxed{u'_v = 11{,}354 \text{ m}^3/\text{Kg} = 11354 \text{ cm}^3/\text{g}}$ 0,5

c) la masse de la vapeur saturante dans le récipient en négligeant le volume du liquide ;

$\boxed{m_v = 0{,}88 \text{ g}}$ 0,25

la masse d'eau liquide ;

$\boxed{m_L = 9{,}12 \text{ g.}}$ 0,25

3°) a) Lorsque par échauffement la phase liquide disparaît, on a :

$\boxed{u_v'' = 1000 \text{ cm}^3/\text{g.}}$ 0,25

b) $u_v'' = \frac{L_v}{4884}\frac{T}{P}$ => $P = \frac{L_v T}{4884 u''_v} = 460{,}5$ T. $\boxed{P = 460{,}5 \text{ T.}}$ 0,25

c) En portant dans la formule de pression de vapeur saturante;

$\mathrm{Ln}\, 460{,}5\, T = 24{,}6 - \frac{4884}{T}$ $\boxed{\mathrm{Ln}\, T = 18{,}47 - \frac{4884}{T}}$ 0,5

d) Point d'intersection des deux courbes :

$f(T) = \mathrm{Ln}\, T$ et $h(T) = 18{,}47 - \frac{4884}{T}$ 0,5

Problème (13,5 points).

I- Etablissement de la loi de Poiseuille

1°) Le fluide est immobile.

On pose $P_A = P_B = P_0$: la pression sur l'axe du cylindre.

ρ : masse volumique du fluide.

a) la force pressante s'exerçant sur la base passant par A :

$\vec{F_A} = P_0 \pi r^2 \vec{u_y}$. 0,25

La force pressante s'exerçant sur la base passant par B :

$\vec{F_B} = - P_0 \pi r^2 \vec{u_y}$ 0,25

b) Poids du fluide dans le petit cylindre :

$\vec{P}_{oids} = - \pi r^2 l \rho g \vec{u_z}$ 0,5

c) En faisant le bilan des forces agissant sur le cylindre C, donnons l'expression de F_{lat} ;

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_{lat} + \vec{P}_{oids} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{lat} = \pi r^2 l \rho g \vec{u}_z$$ 0,5

°) a) Les forces qui s'exercent sur le cylindre sont:

- la force pressante s'exerçant sur la base passant par A

$$\vec{F}_A = P_A \pi r^2 \vec{u}_y$$ 0,25

- la force pressante s'exerçant sur la base passant par B

$$\vec{F}_B = - P_B \pi r^2 \vec{u}_y$$ 0,25

- la force pressante s'exerçant sur la surface latérale

$$\vec{F}_{lat} = \pi r^2 \rho g \vec{u}_z$$ 0,25

- le poids

$$\vec{P}_{oids} = - \pi r^2 \rho g \vec{u}_z$$ 0,25

- la force de frottement visqueux

$$\vec{F}_f = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_y$$ 0,25

car par suite du frottement visqueux, v est une fonction décroissante de r.

b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique au cylindre, en projection sur l'axe Oy

$$\pi r^2 (P_A - P_B)\vec{u}_y + 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}\vec{u}_y = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

la vitesse étant constante en un point car l'écoulement est permanent

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dr} = -\left(\frac{P_A - P_B}{2 l \eta}\right) r}$$ 0,5

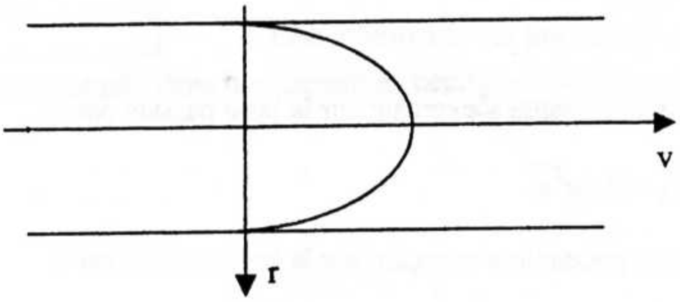
c) $v(r) = -\left(\frac{P_A - P_B}{l\eta}\right)\frac{r^2}{4} + cte$ 0,25

En tenant compte du fait que v = 0 pour r = a => on obtient

$$\boxed{v(r) = \left(\frac{P_A - P_B}{4 l \eta}\right)(a^2 - r^2)}$$ 0,5

$v(r) = v_{max}\,(1 - \frac{r^2}{a^2})$

Représentation graphique de cette fonction:



c'est l'équation d'une parabole dont l'axe est r = 0 | 0,5

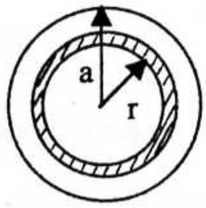
3°) Calcul du débit volumique Q du fluide.

a) Le débit élémentaire dQ du fluide s'écoulant entre deux cylindres de rayons r et r + dr

$dQ = v(r)\, dS$

Or $S = \pi r^2 \quad \Rightarrow dS = 2\pi r dr$

$dQ = 2\pi r dr v(r) = \boxed{\pi \frac{P_A - P_B}{2l\eta}(a^2 r - r^3)\, dr = dQ}$ | 0,5



b) le débit total est donné en intégrant cette équation

$$Q = \int_{r=0}^{r=a} dQ = \pi\left(\frac{P_A - P_B}{2l\eta}\right)\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$Q = \pi\left(\frac{P_A - P_B}{2l\eta}\right)\left[\frac{2a^4 - a^4}{4}\right] = \frac{\pi(P_A - P_B)}{8l\eta}a^4$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi a^4}{8\eta}\left(\frac{P_A - P_B}{l}\right)}$$ 0,5

II- Application de la loi de Poiseuille à l'écoulement d'une huile dans une conduite.

1°) a) La pression au point A : $P_A = P_0 + \rho g Z_1$

la pression au point B : $P_B = P_0$

$\Rightarrow \boxed{P_A - P_B = \rho g Z_1}$ | 0,5

b) l'application de la formule de Poiseuille donne :

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta}\left(\frac{P_A - P_B}{l}\right) = \frac{\pi a^4 \rho g Z_1}{8\eta l} = Q$$ 0,25

<u>A.N</u> : $\boxed{Q = 1{,}14.10^{-5}\ m^3/s}$ 0,25

c) En déduire la vitesse moyenne: $\boxed{v_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi a^2} = 0{,}065\ m/s}$ 0,25

0,25

d) $R_e = \frac{2 a v_m}{\nu} = \underline{12 < 2400}$ => <u>écoulement laminaire</u> 0,25

0,25

°) $Q(t) = \frac{\pi a^4 g}{8\nu l} Z(t)$

a) $\boxed{S(Z) = \pi(Z\ tg\ 45°)^2 = \pi Z^2}$ 0,5

b) conservation de la masse $Q(t) = S(Z)\left(-\frac{dZ}{dt}\right)$

Soit $\frac{\pi g a^4}{8\nu l} Z = -\pi Z^2 \frac{dZ}{dt}$ => $\boxed{\frac{dZ}{dt} = -\frac{g a^4}{8\nu l Z}}$ 0,5

c) $dt = -\frac{8\nu l}{g a^4} Z dZ$ => $\boxed{t = -\frac{8\nu l}{g a^4}\frac{Z^2}{2} + cte}$ 0,5

$$\boxed{t = \frac{8\nu l}{g a^4}\left(\frac{Z_1^2 - Z_2^2}{2}\right)}$$

d) <u>A.N:</u> $\boxed{t_c = 412{,}4\ s = 6\ mn\ 52{,}4\ s.}$ 0,5

°) Dans cette question le gradient des pressions devient :

a) $\frac{P_A - P_B}{L} = \frac{\rho g Z_1 - (-\rho g h)}{L} = \rho g\ \frac{Z_1 + h}{L}$ 0,25

et $Q = \frac{\pi a^4}{8\eta}\rho g\ \frac{Z_1 + h}{L} = \frac{\pi g a^4}{8\nu}\ \frac{Z_1 + h}{L}$ 0,25

A.N : $\boxed{Q = 3{,}42.10^{-5}\ m^3/s}$ 0,25

$\boxed{v_m = 0{,}193\ m/s}$ 0,25

b) $\boxed{R_e = 36 < 2400}$ <u>écoulement laminaire</u>. 0,25

0,25

4°) a) $\frac{\pi g a^4}{8\nu L}(Z+h) = -\pi Z^2 \frac{dZ}{dt}$ => $\boxed{dt = -\frac{8\nu L}{g a^4}\frac{Z^2}{Z+h}dZ}$ 0,5

b) changement de variable y = Z+h

$$dt = -\frac{8\nu L}{g a^4}\frac{Z^2}{Z+h}dZ = -\frac{8\nu L}{g a^4}\left(y-2h+\frac{h^2}{y}\right) dy$$ 0,25

$$t = \frac{8\nu L}{g a^4}\left[\frac{(Z_1+h)^2}{2} - \frac{(Z_2+h)^2}{2} - 2h\left[(Z_1+h)-(Z_2+h)\right] + h^2 Ln\left(\frac{Z_1+h}{Z_2+h}\right)\right]$$

$$\boxed{t = \frac{8\nu L}{g a^4}\left[\frac{Z_1^2-Z_2^2}{2} - h(Z_1-Z_2) + h^2 Ln\left(\frac{Z_1+h}{Z_2+h}\right)\right]}$$ 0,5

c) <u>A.N</u> : <u>t'_c = 107,2 s = 1 mn 47,2 s</u> 0,25

5°) Pour les deux dispositifs, on trouve une relation de la forme $\nu = Kt$ avec K = cte.
La mesure du temps de vidange entre les deux niveaux Z_1 et Z_2 permet de donner directement la viscosité cinématique du fluide. 0,5

<u>Application</u> : pour h = 0

$$\nu = \left[\frac{g a^4}{8L}\frac{2}{Z_1^2-Z_2^2}\right] t = 1{,}94.10^{-7} t$$ 0,25

Pour t = 100 s => $\boxed{\nu = 1{,}94.10^{-5}\ m^2/s.}$ 0,25