Concours Nationaux d'Entrée aux

Cycles de Formation d'Ingénieurs

Session Juin 2001

Concours en Biologie et Géologie

Corrigé de l'épreuve

Mathématiques

Problème 1

Partie I (15 pts)

(1) $y''(x) + 2x\, y'(x) + 2y(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$

On suppose que les solutions $y(x)$ s'écrivent sous la forme $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence R.

1°) Toute serie entiere st indefiniment derivable dans son disque de convergence et que le rayon de la serie st le même que le rayon de la serie derivée.

et on a :

2,5
$$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

2°) - La fonction $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est paire

2,5 donc les coef $a_n = 0$ pour n impaire

$$a_{2p+1} = 0$$

3°). En remplaçant $y'(x)$, $y''(x)$ et $y(x)$ par leur séries dans l'équation (1) on obtient :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

d'où
$$\sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2\sum_{n\geq 0} n a_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

2,5
$$\sum_{n\geq 0} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (2n+2) a_n\right) x^n = 0$$

et d'après l'unicité du développement en série entière on obtient

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1) a_n = 0 \quad \text{pour tout } n$$

d'où $a_{n+2} = \dfrac{-2}{n+2} a_n$ pour tout n.

4/ . a) expression de a_n en fonction de n.

Si $n = 2p+1$ $\quad a_{2p+1} = 0$

Si $n = 2p$ $\quad a_{2p+2} = \frac{-2}{2p+2} a_{2p} = \frac{-1}{(p+1)} a_{2p}$

et de proche en proche

2,5 $\quad a_{2p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)(p)\cdots\times 1} a_0 = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} a_0$

d'où $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0$

b) la serie s'écrit alors $y(x) = a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} x^{2p}$

posons alors $X = x^2$ on obtient la serie

2,5 $\quad a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} X^p$ ~~est~~ de rayon

de convergence $= +\infty$ d'où

la serie $a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} x^{2p}$ est de rayon $+\infty$

5°) on pose $X = -x^2$ on obtient

2,5 $\quad y(x) = a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{X^p}{p!} = a_0 e^{X}$

d'où $y(x) = a_0 e^{-x^2}$

Partie II (10 pts)

La forme différentielle $df = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

1°) Pour que f soit une différentielle totale, il faut que

1,5 $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

1 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{\beta}\, e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)}$$

1 $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{\alpha}\, e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)}$$

1,5 $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \Rightarrow \alpha = \beta$$

2°) On suppose que $\alpha = \beta$.

df est une différentielle totale donc

0,5 (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$

$+ \varphi(y)$

0,5 (2) $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$

intégrant la 1ère équation on obtient

1,5 $$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \frac{\alpha}{2}\, e^{-\frac{x^2}{\alpha}-\frac{y^2}{\alpha}} + \varphi(y)$$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y

En faisant le changement de variable

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad \text{et } dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

On obtient

$$I = \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\alpha\pi}{4}\cdot \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{\alpha}{2}\, e^{-\frac{r^2}{\alpha}}\right]_0^R = \frac{\alpha^2\pi}{8}$$

d'où $I = 1 \implies \dfrac{\alpha^2\pi}{8} = 1$

$$\alpha = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2}$$

On pourra écrire :

$$I = \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{y^2}{\alpha}}\,dx\,dy = \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}}dy$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}dx\right)^2 = \frac{\alpha^2\pi}{8}.$$

d'où $\alpha = \sqrt{\dfrac{8}{\pi}}$

---

2) la loi marginale de la variable X notée $f_X(x)$ et

• si $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,dy = \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha}-\frac{y^2}{\alpha}}dy = \frac{\alpha}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}}dy\right)e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}}dy = \int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-u^2}du = \sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

en posant $u = \dfrac{y}{\sqrt{\alpha}}$.

on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = d(x,y)$ d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -y\, e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}} + \varphi'(y) = -y\, e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}}$$

1 d'où $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

d'où $f(x,y) = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}} + a$.

3°) si $\lim_{x,y \to +\infty} f(x,y) = 0$ on a puisque $\lim_{x,y\to+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}} = 0$

1,5 $a = 0$

et $f(x,y) = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}}$

Partie III (20 pts)

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}} & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1°) Pour que $h(x,y)$ soit une densité il faut que $h(x,y) \geq 0$

2,5 d'où $\alpha > 0$

et

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dx\, dy = 1$$

d'où $I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}}\, dx\, dy$

d'où car $\alpha = \frac{u}{\pi}$ $\quad E(X) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$

0,5 de même $\quad E(Y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$

1, $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$ car les deux variables sont indépendantes.

0,5 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

4°) • $E(-2X+1)$.

La linéarité de l'espérance permet d'écrire

1 $E(-2X+1) = -2E(X)+1 = 1 - 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$

• $E\left((-2X+1)^2\right) = E\left(4X^2-4X+1\right)$

1 $= 4E(X^2) - 4E(X) + 1$

Calculons $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{\alpha^{3/2}}{4}\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} x^2 x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\,dx$

Par intégration par parties en posant

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \Rightarrow v = \frac{-\alpha}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$

2 On obtient $E(X^2) = \frac{\alpha^{3/2}}{4}\sqrt{\pi}\left[\left[-\frac{\alpha}{2} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\,dx\right]$

$= \frac{\pi}{16}\alpha^3 = \frac{\alpha}{2}$