1/

x16

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
***
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2000

Concours en Technologie

Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques

Problème 1

Partie I

3 **1/ 2 points**
$\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $< x/Jy > = < \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \,/\, y_1 e_1 - \sum_{i=2}^{N} y_i e_i > = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^{N} x_i y_i$.

2/ a)

1 i) $\longrightarrow$ ii) **1 point**
Il suffit de prendre $x = y$.

ii) $\longrightarrow$ iii) **5 points**
Notons $M = {}^t AJA - J$. $= <x, Jx>$
5 $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $< Ax/JAx > = < x/{}^t AJAx >$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $< x/Mx >= 0$.
En particulier, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $< x + y, M(x + y) >= 0$.
D'où, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $< x, My >= 0$.
On conclut que $M = 0$.

iii) $\longrightarrow$ i) **2 points**
2 $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $< Ax/JAy > = < x/{}^t AJAy >=< x/Jy >$.

b)
$G_N = \{A \in M(N, \mathbb{R})/A \ \textit{vérifie la propriété} \ (\mathcal{P})\}$.

2 **i) 1 point**
Soit $A \in G_N$, on a $|det({}^t AJA)| = |det(J)|$. Donc, $|det(A)|^2 = 1$. D'où, $|det(A)| = 1$.

ii) 4 points
4 * Soient $A, B \in G_N$. On a

${}^t(AB)J(AB) = {}^tB\,{}^tAJAB = {}^tBJB = J$. Donc, $AB \in G_N$.
** Soit $A \in G_N$. Comme $|detA| = 1$, alors A^{-1} existe.
On a ${}^tAJA = J$. D'où, $J = ({}^tA)^{-1}JA^{-1} = {}^t(A^{-1})JA^{-1}$.
Donc, $A^{-1} \in G_N$.
On conclut que G_N est un sous-groupe de $GL(N, \mathbb{R})$ pour la multiplication des matrices.

Partie II On prend $N = 2$.
1/ a) 5 points
Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & \epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix} ; \epsilon \in \{-1, 1\}, a, b \in \mathbb{R} \ et \ a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

2 + 3 = 5

* Il est clair que $E \subset G_2$.
* Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_2$.

On a ${}^tAJA = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix}$.

Alors, $A \in G_2$ si et seulement si ${}^tAJA = J$, ce qui est vrai si seulement si

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (1). \\ ac = bd & (2). \\ d^2 - c^2 = 1 & (3). \end{cases}$$

D'après (1), $a \neq 0$. (2) implique alors que $c = \dfrac{bd}{a}$.
De (3), on déduit que $a^2 = d^2$. D'où, le résultat.

b) 5 points

5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 - b^2 = 1$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$. On a $a^2 = b^2 + 1 \in [1, +\infty[$. Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 = ch^2(t)$. D'où, $a = \epsilon_1 ch(t)$, $\epsilon_1 \in \{-1, 1\}$ et $b = \epsilon_2 sh(t)$, $\epsilon_2 \in \{-1, 1\}$.
En posant, $\epsilon_3 = \epsilon\epsilon_2$, on obtient le résultat.

2/ $\tilde{G}_2 = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$.

a) 2 points

2

* $\tilde{G}_2 \subset G_2$.
** Il est clair que $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $A(t)A(s) = A(t + s) \in \tilde{G}_2$ et $(A(t))^{-1} = A(-t) \in \tilde{G}_2$.
D'où, $\tilde{G}_2$ est un sous-groupe de G_2.

b) 3 points

3

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est:

$$\chi_{A(t)}(X) = X^2-(2ch(t))X+1 = (X-e^{-t})(X-e^t).$$
$$* \ Ker(A(t)-e^tI_2) = vect < e_1+e_2 >.$$
$$* \ Ker(A(t)-e^{-t}I_2) = vect < e_1-e_2 >.$$

On prend alors, $P=\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) 1 point

Soit l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \tilde{G}_2 \\ t & \longrightarrow & A(t). \end{array}$$

2 Il est clair que:

* φ est un morphisme de groupes.
* $Ker\{\varphi\}=\{0\}$.
* φ est surjective.

φ est donc un isomorphisme de groupes.

3/ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 **a) 1 point**

On a $B^2=I_2$. Donc, $\forall p\in\mathbb{N}$, $B^{2p}=I_2$ et $B^{2p+1}=B$.

b) 3 points

3 On a

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{t^kB^k}{k!} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}.$$

<u>Partie III</u> On prend N=3.

1/ 3 points

Soit $M=\begin{pmatrix} a & sh(t) & 0 \\ b & ch(t) & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 On a ${}^tMJM=\begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & a\,sh(t)-b\,ch(t) & -c \\ a\,sh(t)-b\,ch(t) & -1 & 0 \\ -c & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$M\in G_3$ si et seulement si $\begin{cases} a^2-b^2=1, & (1) \\ c=0, & (2) \\ a\,sh(t)=b\,ch(t). & (3) \end{cases}$

(3) et (1) impliquent que $a^2 = ch^2(t)$. Il existe alors $\epsilon\in\{-1,1\}$ tel que $a=\epsilon\,ch(t)$ et $b=\epsilon\,sh(t)$. D'où,

$$M=\begin{pmatrix} \epsilon\,ch(t) & sh(t) & 0 \\ \epsilon\,sh(t) & ch(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

2/ 3 points

Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. On veut alors résoudre l'équation:

$$X'(t) = HX(t).$$

On a $H(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, $H(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2)$, $H(e_3) = 0$. H est alors diagonalisable. Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}HP = D$, où

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $(P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t)$. Il existe alors, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}/$

$P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{-t} \\ \gamma \end{pmatrix}$. D'où, $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ \alpha e^t - \beta e^{-t} \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

2

3/ a) 1 point

${}^tAJA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. D'où, $A \in G_3$.

b) 5 points

Le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$\chi_A(X) = (X - 1)(-X^2 + 6X - 1).$$

Red $\to 4$

5

$A^P = PD^P P^{-1}$

Les valeurs propres de A sont donc:
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.
Les espaces propres correspondants sont:
$E_{\lambda_1} = vect < e_2 - e_3 >$, $E_{\lambda_2} = vect < -\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 >$,
$E_{\lambda_3} = vect < \sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 >$.

On pose alors, $P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$A^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (3-2\sqrt{2})^p & 0 \\ 0 & 0 & (3+2\sqrt{2})^p \end{pmatrix} P^{-1}$$

c) 1 point

Soit $V = (a, b, c)$; $a, b, c \in \mathbb{N}$. On a

2 $$< V/JV > = a^2 - b^2 - c^2.$$

Pour avoir $< V/JV > = 0$, il suffit de prendre $V = (1, 1, 0)$.

d) 2 points

Soit $S = \{A^n V, n \in \mathbb{N}\}$. On a,

$\forall n \in \mathbb{N}$ $< A^{n+1}V/JA^{n+1}V > = < A^n V/JA^n V >$.

2 D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, < A^n V/JA^n V > = 0$.

Comme A est à coefficients dans $\mathbb{N}$, A^n est aussi à coefficients dans $\mathbb{N}$. Il reste alors à montrer que l'ensemble S est infini. Pour ceci, on démontre que

$$\forall m, n \in N, m \neq n, A^n v \neq A^m v.$$

Supposons qu'il existe $m < n$ dans $\mathbb{N}$ tel que $A^n v = A^m v$. Comme A est inversible, on alors, $A^{n-m} v = v$. v est donc un vecteur propre de A^{n-m} associé à la valeur propre 1, i.e. $v \in E_{\lambda_1}$, ce qui est faux. D'où la contradiction.

Problème 2

Partie I

1/ a) 3 points

Sachant que u_0 est une fonction continue à valeurs réelles, de classe C^1 par morceaux, impaire et 2π-périodique, telle que $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, le théorème de Dirichlet

3 implique que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad où\ b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx)\ dx.$$

b) 2 points

2 D'après le théorème de Bessel, la série $\sum |b_k|^2$ converge, d'où $lim_{k \longrightarrow +\infty} b_k = 0$.

2/ a) 2 points

3

Soient $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ On a $\lim_{k\longrightarrow\infty} k^p e^{-(k^2+1)\alpha} = 0$, et $\lim_{k\longrightarrow\infty} b_k = 0$.
D'où, $\lim_{k\longrightarrow\infty} k^p b_k e^{-(k^2+1)\alpha} = 0$.

b) (2 + 1 + 3 + 2) points

Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x,t) = b_k e^{-(k^2+1)t}\sin(kx)$, où $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$.
On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall p, q \in N$, $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$,

2

$$\frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^q \partial t^p}(x,t) = (-1)^p (k^2+1)^p k^q b_k e^{-(k^2+1)t} \sin(kx + q\frac{\pi}{2}).$$

D'où, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall p, q \in N$, $\forall \alpha > 0$, $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$,

1

$$\left|\frac{\partial^{p+q} u_k(x,t)}{\partial x^q \partial t^p}(x,t)\right| \leq v_k = (k^2+1)^p k^q |b_k| e^{-(k^2+1)\alpha}.$$

3 D'après a), on a $\lim_{k\longrightarrow\infty} k^2 v_k = 0$. Ceci montre la convergence normale (et donc uniforme) de la série $\sum_k \frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^q \partial t^p}$ sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$. D'où, $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ admet des
1 dérivées partielles à tout ordre, continues sur $[0,\pi] \times]0,+\infty[$. Donc, u est de classe C^∞ sur $[0,\pi] \times]0,+\infty[$.

c) 2 points

On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + u_k \right)(x,t) = 0,$$

3

$\forall x \in [0,\pi]$, $\forall t > 0$. Par ailleurs, il est évident que $u(x,0) = u_0(x)$, $\forall x \in [0,\pi]$ et que $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $\forall t \geq 0$.

3/ Soit v une fonction continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$, à valeurs réelles, de classe C^2 sur $[0,\pi] \times]0,+\infty[$. On pose

$$G(t) = \int_0^\pi v^2(x,t)\ dx.$$

a) 3 points

3 La fonction v^2 étant continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, G est continue sur $[0,+\infty[$. De même, comme v^2 est de classe C^2 sur $[0,\pi] \times]0,+\infty[$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale, implique que G est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

b) On suppose que v vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + v(x,t) = 0,\ \forall x \in [0,\pi],\quad \forall t > 0, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0,\quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

i) **3 points**

$\forall\, t > 0$, on a

3

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} v(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\ dx &= [v(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)^2\ dx\\ &= -\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2(x,t)\ dx.\end{aligned}$$

ii) **3 points**

$\forall t > 0$, on a

3

$$\begin{aligned}G'(t) &= 2\int_0^{\pi} v(x,t)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\ dx\\ &= 2\int_0^{\pi} v(x,t)(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - v(x,t))\ dx\\ &= -2\int_0^{\pi}\left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)(x,t)\ dx \ \leq 0.\end{aligned}$$

Comme G est continue sur $[0,+\infty[$, G est alors décroissante sur $[0,+\infty[$.

c) **2 points**

Si v vérifie en plus, la condition initiale $\forall x \in [0,\pi]$, $v(x,0) = 0$, alors $G(0) = 0$. Comme la fonction $G(t)$ est positive et décroissante, on déduit que $G(t) = 0$, $\forall t > 0$. La fonction $v^2(x,t)$ étant continue, positive, ceci implique que v est identiquement nulle sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$.

2

d) **2 points**

Soit w une fonction à valeurs réelles, continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$, de classe C^2 sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$ et solution du système (S).

On pose $v = u - w$. D'après ce qui précède, $v \equiv 0$ sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$. D'où, $u \equiv w$.

<u>Partie II</u>

Soit N un entier positif. On pose $h = \dfrac{\pi}{N+1}$.

Soit A la matrice carrée d'ordre N, définie par:

$$A_N = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & 0\\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1/ 3 points

3

On pose $x_i = ih$, $i \in \{0, ..., N+1\}$.

Soit u une fonction de classe C^2 sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$. D'après la formule de Taylor, appliquée au point x_i, $i \in \{1, ..., N\}$, on a

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i, t) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial u^3}{\partial x^3} + h^3\epsilon_1(h).$$

où $\lim_{h\longrightarrow 0}\epsilon_1(h) = 0$.

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i, t) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial u^3}{\partial x^3} + h^3\epsilon_2(h).$$

où $\lim_{h\longrightarrow 0}\epsilon_2(h) = 0$.

D'où,

$$\forall\, t > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} - h\epsilon(h).$$

avec $\lim_{h\longrightarrow 0}\epsilon(h) = 0$.

2/ Pour $p \in \{1, 2, ..., N\}$, on considère le vecteur $U^p \in \mathbb{R}^N$, dont la $j^{\text{ème}}$ composante, $1 \leq j \leq N$, est:

$$u_j^p = \sin(\frac{pj\pi}{N+1}).$$

a) 2 points

2

On pose $u_0^p = u_{N+1}^p = 0$. Pour $j \in \{1, 2, ..., N\}$, on a

$$\begin{aligned} -u_{j+1}^p + 2u_j^p - u_{j-1}^p &= -\sin(p(j+1)h) + 2\sin(pjh) - \sin(p(j-1)h) \\ &= 2\sin(pjh)(1 - \cos(ph)) \\ &= 4\sin(pjh)\sin^2(\frac{ph}{2}). \end{aligned}$$

b) 3 points

3

Pour $p \in \{1, 2, ..., N\}$, en appliquant la matrice A_N, au vecteur U^p, on déduit de ce qui précède que U^p est un vecteur propre de A_N associé à la valeur propre

$$\lambda_p = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{ph}{2}).$$

c) 2 points

2

Il est clair que la matrice A_N est symétrique. A_N est définie, positive, car toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

d) 2 points

2

Comme les espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux, et que les N valeurs propres de A_N sont distinctes, on déduit que les vecteurs U^p, $1 \leq p \leq N$, forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^N$.

3/
On considère le système différentiel:

$$(T)\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + A_N U(t) + U(t) = 0, \quad \forall t > 0; \\ U(0) = U^0, \end{cases}$$

où $U^0 \in \mathbf{R}^N$, est donné.

3 a) 3 points

Pour $t \geq 0$, on pose $\alpha_p(t) = < U(t)/U^p >$. Si U vérifie le système différentiel (T), alors il est clair que α_p est solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\alpha_p(t) + \lambda_p \alpha_p(t) + \alpha_p(t) = 0, \quad \forall t > 0; \\ \alpha_p(0) = < U^0/U^p >. \end{cases}$$

Il suffit d'utiliser le fait que A_N est symétrique et que $A_N U^p = \lambda_p U^p$.

b) (2 + 3) points

2 Il est aussi clair que $\alpha_p(t) =< U^0/U^p > e^{-(\lambda_p+1)t}$, $\forall t \geq 0$. Comme $(U^1, \ldots, U^N)$ est une base orthogonale, on déduit que

3 $$\forall t \geq 0, \; U(t) = \sum_{p=1}^{N} \frac{< U^0/U^p >}{|U^p|^2} e^{-(\lambda_p+1)t} U^p.$$