Correction de l'épreuve de Physique. Juin 2000
- Concours PC -

Partie I : Propagation des ondes acoustiques planes monochromatiques

I.1. Equation de propagation à une dimension

a.

L'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \qquad \text{--- 1}$$

Dans le cas général l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho \vec{g}, \qquad \text{--- 1}$$

$\rho \vec{g}$ étant la force volumique statique.

b

En remplaçant, dans les 2 équations, ρ par $\rho_0 + \mu$

* L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu + \rho_0 \operatorname{div}\vec{v} + \mu \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

donne à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

et pour une propagation dans la direction ox elle se réduit à :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad \text{--- 1}$$

* La linéarisation de l'équation d'Euler consiste à négliger les termes $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ qui sont de second ordre et le terme de pesanteur $\mu \vec{g}$ par rapport au gradient de pression. Pour le problème unidimensionnel considéré on arrive à :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad \text{--- 1}$$

c

Dans l'hypothése d'une évolution isentropique et utilisant le coefficient de compressibilité isentropique on peut écrire à l'ordre 1:

$$\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\mu}{p} \quad \text{— — — — —} \quad 1$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors:

$$\rho_0 \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Les deux équations couplées sont: — — — — 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

d

Aprés dérivation temporelle de l'équation de conservation de la masse et report dans l'équation d'Euler on obtient;

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— — — —} \quad 0{,}5$$

La même équation peut être trouvée pour v. Les champs de surpression et de vitesse obeissent à l'équation de d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— — —} \quad 0{,}5$$

avec $c = [\rho_0 \chi_s]^{-1/2}$ — — — — 0,5

e

Pour un gaz parfait et pour une évolution isentropique on a:

$\rho_0 = \dfrac{MP_0}{RT}$ et $P\rho^{-\gamma} = \text{cst.}$ donc $\chi_s = [\gamma P_0]^{-1}$ — — — — — La célérité des ondes acoustiques est donnée par : $C = [\rho_0 \chi_s]^{-1/2} = \left[\dfrac{\gamma RT}{M}\right]^{1/2}$	- ρ_0 : 0.5 $P\rho^{-\gamma}$ = cte : 0.5 χ_s : 0,5 c : 0.5
f Application numérique - dans l'eau : $C = [\rho_0 \chi_s]^{-1/2} \simeq 1490 \text{ m.s}^{-1}$ — — — - dans l'air : $c = \left[\dfrac{\gamma RT}{M}\right]^{1/2} \simeq 340 \text{ m.s}^{-1}$ — — —	 — 0.5 —. 0,5
I-2 Impédance acoustique caractéristique. **a** En considérant des grandeurs sinusoïdales, on peut établir en notation complexe, l'analogie suivante : - En électrocinétique, l'impédance $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ est introduite — comme rapport entre la d.d.p $\underline{U}$ et le courant (débit) correspondant $\underline{I}$. - En acoustique, on peut dire que $\underline{Z_c} = \dfrac{\underline{F}}{\underline{D_v}} = \dfrac{\underline{p}S}{\underline{v}S} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$ — C'est le rapport entre la force de surpression $\underline{F} = \underline{p}S$ et le débit volumique $\underline{D_v} = \underline{v}S$ correspondant.	 ——— 0.5 — — 1
b On considère l'équation : $\rho_0 \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \underline{p}}{\partial x}$ reliant les deux grandeurs sinusoïdales complexes $\underline{v}$ et $\underline{p}$ avec : $\dfrac{\partial}{\partial x}\underline{f} = -jk\underline{f}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}\underline{f} = j\omega \underline{f}$ pour $\underline{f} = \underline{f_m} e^{j(\omega t - kx)}$ (Notons que $\partial \underline{f}/\partial x = jk\underline{f}$ pour $\underline{f} = \underline{f_m} \exp j(\omega t + kx)$.)	

donc $j\rho_0 \omega \underline{v} = jk\underline{p}$ soit $\underline{Z_c} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \rho_0 \frac{\omega}{k} = \rho_0 c$ — — — 1

$\underline{Z_c}$ s'exprime en $kg.m^{-2}s^{-1}$ ou en $N.m^{-3}.s$. — — — 0.5

C Application numérique

Z_c (air) $= 442\ kg.m^{-2}s^{-1}$

Z_c (eau) $\doteq 1{,}5\,10^{6}\ kg.m^{-2}s^{-1}$ — — — — } 0.5

Ce résultat montre que $Z_c(\text{air})/Z_c(\text{eau}) = 3.10^{-4} \ll 1$.

L'impédance acoustique caractéristique de l'eau est très supérieure à celle de l'air. } 0.5

I.3. Intensité acoustique

La puissance instantanée transférée à travers une section d'aire dS (perpendiculaire à $x'ox$) soumise à la force de surpression acoustique est égale à

$$d\mathcal{P} = p(x,t)dS.\, v(x,t).$$ — — — — 1

En utilisant la notation complexe, l'intensité acoustique est alors donnée par :

$$I = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e\left(\underline{p}\,\underline{v}^*\right) \quad \text{où} \quad \underline{p} = \underline{Z_c}\,\underline{v} = \rho_0 c.\underline{v}$$ — — — — } 0.5 0.5 0.5

donc $I = \frac{1}{2\rho_0 c}\,\mathcal{R}e\left(\underline{p}\,\underline{p}^*\right) = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c}$.

I-4- Réflexion et transmission

a.

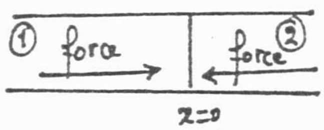
. Ecrivons les 3 ondes :

- onde incidente : $\underline{p_i} = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$; $\underline{v_i} = \frac{p_0}{Z_{c1}} e^{j(\omega t - kx)}$ — — 0.5

- onde réfléchie: $\underline{p_r} = \underline{r} p_o e^{j(\omega t + kx)}$; $\underline{v_r} = -\frac{\underline{r} p_o}{Z_{c1}} e^{j(\omega t + kx)}$ — — — 0.5

- onde transmise: $\underline{p_t} = \underline{t} p_o e^{j(\omega t - kx)}$; $\underline{v_t} = \frac{\underline{t} p_o}{Z_{c2}} e^{j(\omega t - kx)}$

.. Les conditions de continuité sont au nombre de deux:



i/ la membrane de masse $\underline{dm}$ est soumise aux forces des surpressions p_1 et p_2 de part et d'autre de $x=0$. L'équation du mouvement de cette membrane s'écrit: $dm\, a(t) = S\left[p_1(x=0,t) - p_2(x=0,t)\right]$ — — 0.5

Puisque $dm \simeq 0$, il en résulte l'égalité des surpressions:

$$p_1(x=0,t) = p_2(x=0,t).$$

ii/ Les déplacements des particules de fluide sont identiques de part et d'autre de la surface de séparation en $x=0$, il y a donc continuité de la vitesse particulaire — — 0.5

$$v_1(x=0,t) = v_2(x=0,t)$$

...

dans le milieu ①: $\underline{p_1} = \underline{p_i} + \underline{p_r}$ et $\underline{v_1} = \underline{v_i} + \underline{v_r}$

dans le milieu ②: $\underline{p_2} = \underline{p_t}$ et $\underline{v_2} = \underline{v_t}$. — — — $\}$ 0.5

Les conditions aux limites traduites par:

$\underline{p_1}(x=0) = \underline{p_2}(x=0) \Rightarrow 1 + \underline{r} = \underline{t}$ — — — 0.5

$\underline{v_1}(x=0) = \underline{v_2}(x=0) \Rightarrow \frac{1 - \underline{r}}{Z_{c1}} = \frac{\underline{t}}{Z_{c2}}$ — — — — 0.5

Conduisent aux expressions:

$$\underline{r} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \qquad \underline{t} = \frac{2 Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$ — — — — $\}$ 0.5

b

L'expression $I = \frac{p_o^2}{2\rho_o c}$ permet d'écrire l'intensité liée à chaque onde:

$$I_i = \frac{p_0^2}{2Z_{c_1}} \; ; \quad I_r = \frac{|\underline{r}|^2 p_0^2}{2Z_{c_1}} \quad \text{et} \quad I_t = \frac{|\underline{t}|^2 p_0^2}{2Z_{c_2}}$$ — 1

On en déduit les coefficients de réflexion R et de transmission T :

$$R = \frac{I_r}{I_i} = |\underline{r}|^2 = \frac{(Z_{c_2} - Z_{c_1})^2}{(Z_{c_2} + Z_{c_1})^2}$$ — 0.5

$$T = \frac{I_t}{I_i} = |\underline{t}|^2 \frac{Z_{c_1}}{Z_{c_2}} = \frac{4 Z_{c_1} Z_{c_2}}{(Z_{c_1} + Z_{c_2})^2}$$ — 1

On note que : i/ $R + T = 1$: conservation de l'intensité incidente.
ii/ Si les 2 milieux sont d'impédances caractéristiques trés différentes toute l'énergie incidente est réfléchie. Au contraire si $Z_{c_1} \simeq Z_{c_2}$ (adaptation d'impédance) on a $T \simeq 1$.

c

$Z_{c_1}(\text{air}) \simeq 442 \ kg.m^{-2}s^{-1}$; $Z_{c_2}(\text{eau}) \simeq 1{,}5\,10^6 \ kg.m^{-2}s^{-1}$

L'impédance acoustique caractéristique de l'eau est trés supèrieure à celle de l'air. Par conséquent dans le cas d'une séparation air-eau (ou eau-air) le facteur de réflexion sera proche de l'unité et le facteur de transmission sera trés faible : — 0.5

$r_{air-eau} \approx 1$ donc $R_{air-eau} \simeq 1$ — 0.5

$t_{air-eau} \approx 2$ donc $T_{air-eau} \simeq \dfrac{4 Z_c(\text{air})}{Z_c(\text{eau})} \simeq 1{,}2\,10^{-3} \ll 1.$ — 0.5

I.5 Conduite acoustique - Impédance acoustique ramenée

a

Le champ acoustique résultant en un point x s'écrit;

$$\underline{p}(x,t) = p_0\left[e^{j(\omega t - kx)} + \underline{r}\, e^{j(\omega t + kx)}\right] \quad \text{------ } 0.5$$

$$\underline{v}(x,t) = p_0/Z_c\left[e^{j(\omega t - kx)} - \underline{r}\, e^{j(\omega t + kx)}\right] \quad \text{------ } 0.5$$

En $x=0$, $\underline{Z_T} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}} = Z_c\dfrac{1+\underline{r}}{1-\underline{r}} \Rightarrow \underline{z_t} = \dfrac{1+\underline{r}}{1-\underline{r}} \Rightarrow \underline{r} = \dfrac{\underline{z_t}-1}{\underline{z_t}+1}$ ------ 1

b En un point x, $\underline{Z_r}(x) = Z_c \dfrac{e^{-jkx} + \underline{r}\, e^{jkx}}{e^{-jkx} - \underline{r}\, e^{jkx}} = Z_c \dfrac{1+\underline{r}\, e^{2jkx}}{1-\underline{r}\, e^{2jkx}}$ ------ 1

et en $x=-l$, $\underline{Z_r} = Z_c \dfrac{1+\underline{r}\, e^{-2jkl}}{1-\underline{r}\, e^{-2jkl}} = Z_c \dfrac{(\underline{z_t}+1) + (\underline{z_t}-1)\, e^{-2jkl}}{(\underline{z_t}+1) - (\underline{z_t}-1)\, e^{-2jkl}} =$ ------ 0.5

$$Z_c \frac{\underline{z_t}\left[1+e^{-2jkl}\right] + \left[1-e^{-2jkl}\right]}{\underline{z_t}\left[1-e^{-2jkl}\right] + \left[1+e^{-2jkl}\right]}$$

Sachant que $\left[1-e^{-2jkl}\right]/\left[1+e^{-2jkl}\right] = j\tan kl$ on obtient :

$$\underline{Z_r}(x) = Z_c \frac{\underline{z_t} + j\tan kl}{1 + j\,\underline{z_t}\tan kl} = Z_c \frac{\underline{Z_T} + jZ_c\tan kl}{Z_c + j\,\underline{Z_T}\tan kl} \quad \text{------ } 0.5$$

C Cas d'une conduite acoustique fermée sur une impédance nulle:
Lorsque la terminaison est ouverte (en $x=0$), $\underline{Z_T} = 0$, on obtient
$\underline{Z_r} = jZ_c\tan kl$ imaginaire pur. ------ 1

d

Pour $\lambda \gg l$ on a $kl \ll 1$, $\tan kl \approx kl$ alors ------ 0.5

$\underline{Z_r} = j\rho_0 c kl = j\rho_0 l\omega$ et $\underline{Z}_m^* = j\rho_0 lS\omega$. ------ 0.5

$\underline{Z}_m^*$ est en $j\omega$. Elle correspond à une inertie de masse $m_r = \rho_0 lS$ induite par le tuyau ouvert (de longueur $l \gg \lambda$). ------ 1

Partie II : Modèle élémentaire de l'oreille externe.

II-1. Oscillations libres

a

L'expression du principe fondamental de la dynamique projetée sur l'axe $x'ox$ s'écrit :

$m\ddot{x} = -k_m x - f_m \dot{x}$. — — — — 0.5

b

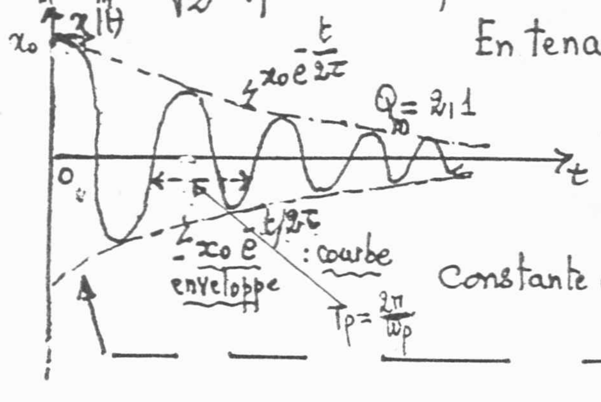
Le facteur de qualité mécanique de l'oscillateur est défini par : $Q_m = m w_0 / h_m$ — 0.5
et le temps de relaxation est $\tau = \frac{m}{h_m} = \frac{Q_m}{w_0}$ où $w_0 = \left(\frac{k_m}{m}\right)^{1/2}$. L'introduction — 0.5
de τ permet d'écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + w_0^2 x = 0$.

A.N : $w_0 \simeq \sqrt{2}\, 10^4\ rd.s^{-1}$, $Q_m \simeq 2{,}1$ et $\tau \simeq 1{,}5\, 10^{-4}\ s$ — — — — 0.5

c

L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{r}{\tau} + w_0^2 = 0$. Son discriminant $\Delta_e = \frac{1}{\tau^2} - 4w_0^2 = 4w_0^2\left[\frac{1}{4Q_m^2} - 1\right]$ est négatif. Ses racines sont : $r_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j w_p$ où $w_p = w_0\sqrt{1-(1/4Q_m^2)}$ est la pulsation propre de l'oscillateur amorti où $Q_m > Q_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (facteur de qualité critique). Le régime est périodique amorti. — — 1



En tenant compte des conditions initiales, la solution s'écrit : $x(t) = x_0 e^{-t/2\tau} \cos w_p t$. Il s'agit d'une fonction sinusoïdale amortie, 2τ étant la constante de temps de l'amplitude. — 0.5

— — — — — — — — 1

II-2- Réponse forcée

a

L'équation du mouvement de l'oscillateur excité s'écrit: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m}\cos\omega t$.

On en déduit, en régime forcé, l'amplitude complexe de l'élongation: $\underline{x}_m = \dfrac{x_{m0}}{1 + j\frac{1}{Q_m}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$, — 1

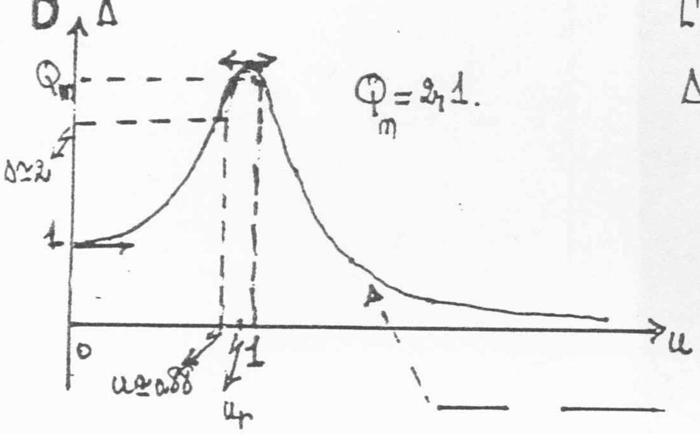
où $x_{m0} = \dfrac{F_m}{m\omega_0^2} = x_m(\omega = 0)$. - - - - 0.5

L'amplitude réduite complexe correspondante est donnée par:

$$\underline{\Delta}(u) = \frac{\underline{x}_m}{x_{m0}} = \frac{1}{1 + j\frac{u}{Q_m} - u^2}$$ - - - - 0.5

---

b



L'amplitude réduite s'écrit:

$$\Delta(u) = |\underline{\Delta}(u)| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q_m^2}}}$$ - - - 0.5

- Pour $u = 0$, $\Delta = 1$.
- Lorsque $u \to \infty$, $\Delta \to 0$.
- Pour $u = 1$, $\Delta = Q_m$ — 1

La fonction $\Delta(u)$ présente un extrémum pour $u = 0$ et pour $u_r = \left(1 - \frac{1}{2Q_m^2}\right)^{1/2}$ - - - 1

$\Delta(u_r) = \dfrac{Q_m}{\sqrt{1 - (1/4Q^2)}} > Q_m$. La réponse présente alors un maximum pour la pulsation $\omega_r = \omega_0 u_r$. Il s'agit d'un phénomène de résonance en amplitude.

---

c Application numérique. (voir figure ci-dessus)

Pour une surpression d'amplitude $p_0 = 2\,10^{-5}$ Pa l'amplitude de la force est donnée par $F_m = Sp_0 = 12.10^{-10}$ N. — 0.5

La réponse asymptotique lorsque $\omega \to 0$ est alors $x_{m0} = \dfrac{F_m}{m\omega_0^2} \simeq 4.10^{-13}$ m. - - - 0.5

Pour $\omega = 2\pi \times 2000$ rd.s^{-1} on a $u = 0{,}88$. En portant u dans l'expression de Δ on trouve $\Delta \simeq 2$ et par suite $x_m = x_{m0}\Delta \simeq 8\,10^{-13}$ m. Cela montre la grande sensibilité de l'oreille. - - 1

II-3- Impédance mécanique

a

Soit l'équation du mouvement : $m\ddot{x} + h_m\dot{x} + k_m x = F_m \cos\omega t$ où

$x = Ré(\underline{x})$ avec $\underline{x} = \underline{x}_m e^{j\omega t}$ $\Rightarrow$ $[-m\omega^2 + jh_m\omega + k_m]\underline{x}_m = \underline{F}_m$

d'où $j\omega \underline{x}_m \left[j\omega m + h_m + \frac{k}{j\omega m}\right] = \underline{F}_m$ — — 1,5

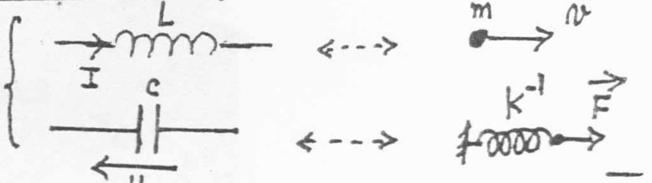
Comme $\underline{v}_m = j\omega \underline{x}_m$, on obtient $\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}_m}{\underline{v}_m} = h_m + j\left\{m\omega - \frac{k_m}{\omega}\right\}$ qui s'exprime en $N.m^{-1}.s$.

b

	Mécanique	Electrocinétique
Oscillateur	Masse d'inertie m	inductance L
	Constante de raideur k_m	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
	Coefficient de frottement h_m	résistance R
Excitation	Force $F(t)$	tension $u(t)$
Réponse	Elongation $x(t)$	charge $q(t)$
	Vitesse : $v(t) = \dot{x}(t)$	courant : $i(t) = \dot{q}(t)$

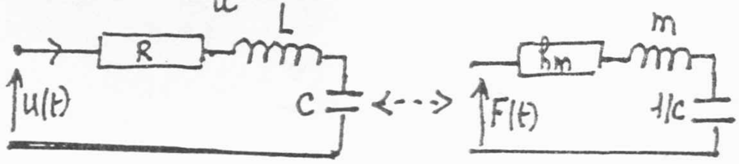
— — — 1.5

On en déduit les schémas équivalents :



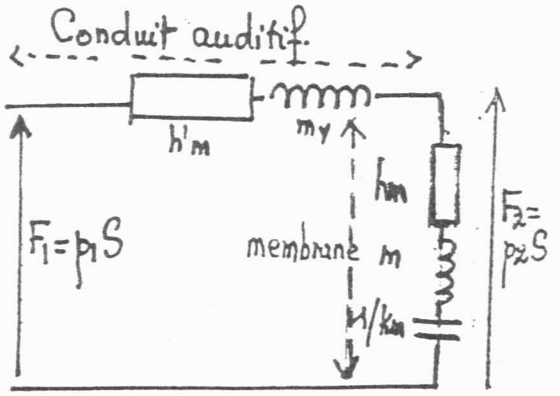
— — 1

et par suite le schéma analogue à l'oscillateur mécanique :



II-4- Fonction de transfert

a



La membrane d'impédance mécanique $\underline{Z}_m$ chargée par la conduite acoustique d'impédance ramenée $\underline{Z}_r$ aura une impédance totale $\underline{Z}_m^t = \underline{Z}_m + \underline{Z}'_m$ où $\underline{Z}'_m = h'_m + j m_Y \omega$ avec $m_Y = \rho_0 l S$

La longueur d'onde λ étant très grande devant la dimension l de la conduite, il est donc possible de négliger les variations de volume d'une tranche d'air en mouvement. Nous avons donc continuité du débit volumique ($D_v = S v$) entre l'entrée et la sortie de la conduite (c'est à dire continuité de la vitesse vibratoire) — 0.5

En régime sinusoïdal et en notation complexe on peut écrire :

- à l'entrée de la conduite : $\underline{F}_1 = \underline{p}_1 S = \underline{Z}_m^t \underline{v}$ — 1
- au niveau de la membrane : $\underline{F}_2 = \underline{p}_2 S = \underline{Z}_m \underline{v}$ — 0.5

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{F}_2}{\underline{F}_1} = \frac{\underline{p}_2}{\underline{p}_1} = \frac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_m^t} = \frac{h_m + j\left[m\omega - \frac{k_m}{\omega}\right]}{(h_m + h'_m) + j\left[(m+m_Y)\omega - \frac{k_m}{\omega}\right]}$$ — 0.5

b Application numérique

- La condition de l'ABF est satisfaite puisque $kl = \frac{2\pi\nu}{c} l = 6.7\,10^{-2} \ll 1$ — 1
et par conséquent $\mathrm{tg}\,kl \approx kl$
- Dans l'expression de $\underline{Z}_m$ le terme d'inertie est négligeable devant le terme de raideur :
$\underline{Z}_m \simeq -2{,}4j$ — 0.5
- $|\underline{Z}_m^t| = \left[(h_m + h'_m)^2 + \left\{(m+m_Y)\omega - \frac{k_m}{\omega}\right\}^2\right]^{1/2}$; dans cette expression on a $(m + \rho_0 l S)\omega \simeq 0{,}015 \ll \frac{k_m}{\omega} \simeq 2{,}4$ donc $|\underline{Z}_m^t| = \left[(h_m + h'_m)^2 + \frac{k_m}{\omega}\right]^{1/2} \Rightarrow$ — 0.5
$|\underline{Z}_m^t| \simeq \left[(3{,}6)^2 + (2{,}4)^2\right]^{1/2} \simeq 4{,}32$ N.s.m^{-1} d'où le rapport $\frac{|\underline{p}_2|}{|\underline{p}_1|} \simeq 0{,}6$ et par suite la pression effective agissant sur le tympan : $|\underline{p}_2| \simeq 3$ Pa. — 0.5

Partie III : Modèle élémentaire de l'oreille moyenne

III-1- Couplage mécanique

a

Tant que λ reste grande devant les dimensions de la cavité ($\lambda \gg \sqrt[3]{V_0}$) on peut admettre qu'il y a uniformité de pression à l'intérieur de la cavité

Une force de surpression agissant sur S_2 entraîne un déplacement x_2 de la membrane (S_2). Ce déplacement entraîne une variation de volume de l'enceinte $= S_2 x_2$. A cette variation de volume correspond une variation de pression dans la cavité. La force de pression agissant sur la membrane (S_3) entraine un déplacement x_3 donc une variation de volume $S_3 x_3$. Ainsi la variation totale du volume est : $\Delta V = S_2 x_2 - S_3 x_3$. ---------- 0,5

Pour une évolution isentropique de l'air, on considère l'équation de Laplace $PV^\gamma = cte$. La dérivée logarithmique $\frac{dP}{P_0} + \gamma \frac{dV}{V_0} = 0$ permet d'exprimer la variation de pression ΔP en fonction de ΔV :

$$\Delta P = -\frac{\gamma P_0}{V_0} \Delta V = \frac{\gamma P_0}{V_0}(S_3 x_3 - S_2 x_2).$$ ---------- 1,5

b

Dans l'ABF les forces de rappel $S \Delta P$, dûes à la compression (ou à la dépression) de l'air, peuvent s'écrire sous la forme :

$$f_2 = S_2 \Delta P = S_2 \frac{\gamma P_0}{V_0}(S_3 x_3 - S_2 x_2)$$ ---------- 1

$$f_3 = -S_3 \Delta P = S_3 \frac{\gamma P_0}{V_0}(S_2 x_2 - S_3 x_3)$$ ---------- 1

NB : Dans l'ABF la compression (ou la dépression) est transmise intégralement à tout le volume de la cavité.

III-2- Oscillations forcées du système couplé

La R.F.D: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{eff}$. projetée suivant x'ox donne:

$$m_2\ddot{x}_2 = -h_{m_2}\dot{x}_2 - k_{m_2}x_2 + \frac{\gamma P_0}{V_0}S_2\left(S_3x_3 - S_2x_2\right) + F$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -h_{m_3}\dot{x}_3 - k_{m_3}x_3 + \frac{\gamma P_0}{V_0}S_3\left(S_2x_2 - S_3x_3\right)$$

Le système des équations dynamiques du système couplé est alors:

$$m_2\ddot{x}_2 + h_{m_2}\dot{x}_2 + k_{m_2}x_2 + S_2^2\frac{\gamma P_0}{V_0}x_2 - \frac{\gamma P_0}{V_0}S_2S_3x_3 = F \quad \text{— — 1}$$

$$m_3\ddot{x}_3 + h_{m_3}\dot{x}_3 + k_{m_3}x_3 + S_3^2\frac{\gamma P_0}{V_0}x_3 - \frac{\gamma P_0}{V_0}S_2S_3x_2 = 0 \quad \text{— — 1}$$

où F est la force appliquée à la membrane S_2.

(b)

On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{x_i} = \underline{X_i}e^{j\omega t}$ $(i=1,2)$

En négligeant les forces de frottement $-h_{m_i}\dot{x}_i$ on obtient le système d'équations algébriques:

$$\left[-\omega^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_2}\right]\underline{X_2} - \frac{k}{m_2}\underline{X_3} = \frac{F_m}{m_2} \quad \text{— — — 1}$$

$$\left[-\omega^2 + \omega_{03}^2 + \frac{k_3}{m_3}\right]\underline{X_3} - \frac{k}{m_3}\underline{X_2} = 0$$

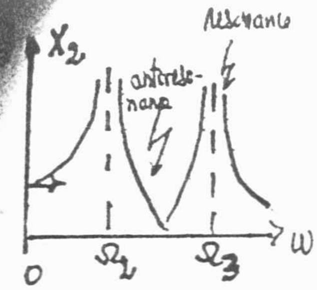
donc

$$\underline{X_2} = \frac{\left[-\omega^2 + \omega_{03}^2 + \frac{k_3}{m_3}\right]\frac{F_m}{m_2}}{\left[-\omega^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_2}\right]\left[-\omega^2 + \omega_{03}^2 + \frac{k_3}{m_3}\right] - \frac{k^2}{m_2m_3}} \quad \text{— — — 0,5}$$

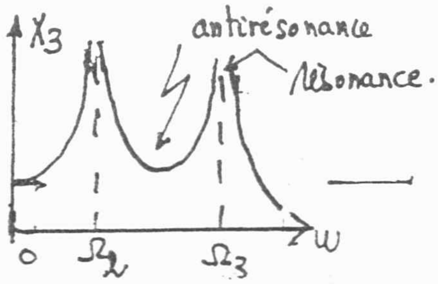
$$\underline{X_3} = \frac{\frac{k}{m_3}\,\frac{F_m}{m_2}}{\left[-\omega^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_2}\right]\left[-\omega^2 + \omega_{03}^2 + \frac{k_3}{m_3}\right] - \frac{K^2}{m_2m_3}}$$

Notons que sous l'effet du couplage la force excitatrice appliquée à la membrane (S_2) est communiquée à la membrane (S_3) — 1

Oscillateurs non amortis :



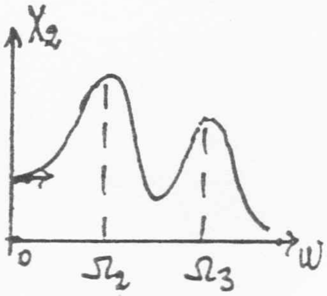
(On a supposé que $\Omega_2 < \Omega_3$)

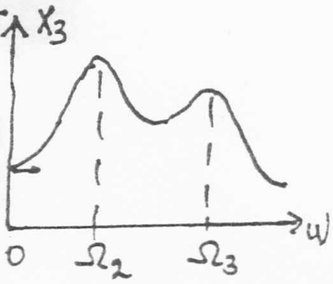


— — 1.5

Dans le cas où les frottements sont négligés, les amplitudes deviennent infinies à la résonance lorsque la pulsation ω d'excitation est égale à l'une des deux pulsations propres Ω_2 et Ω_3 du système.

Oscillateurs amortis



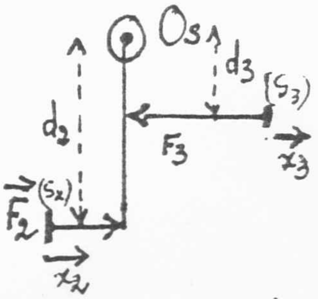


— — 1.5

La divergence de l'amplitude devient limitée par la prise en compte des forces de frottement. Les phénomènes de résonance et d'antirésonance sont toujours présents mais moins " aigus "

III.3. Transmission mécanique

ⓐ



• La condition d'équilibre du système solide autour de l'axe fixe O_s est que la somme des moments des forces appliquées par rapport à cet axe est nulle :

$$\sum \mathcal{M}_{O_s}(\vec{F}_{app}) = 0. \Rightarrow \quad F_2 d_2 - F_3 d_3 = 0 \Rightarrow \frac{F_3}{F_2} = \frac{d_2}{d_3} = \beta > 1$$ — — 1.5

• La transmission mécanique transforme la force de surpression $F_2 = p_2 S_2$ (sur S_2) en une force de surpression $p_3 S_3$ (sur S_3). On a :

$\frac{F_3}{F_2} = \frac{p_3 S_3}{p_2 S_2} = \beta$. Le rapport des surpressions est par conséquent

$\alpha = p_3/p_2 = \beta \frac{S_2}{S_3}$ avec $S_2/S_3 > 1$ et $\beta > 1$. — — — — 0.5

A.N: $\alpha = 1{,}3 \times \frac{60}{3} = 26$.

La liaison mécanique représentée par le levier mécanique (chaîne des osselets) apporte un gain important de surpression acoustique (s'exerçant sur S_3) — — 0.5

364963

(b)

Le levier permet de provoquer un déplacement de la membrane S_3 en sens inverse de la force $\vec{F_3}$ et de provoquer un déplacement de la membrane S_2 dans le sens de la force $\vec{F_2}$. La force $\vec{F_2}$, dont le travail est un travail moteur est la force motrice, la force $\vec{F_3}$, dont le travail est résistant est la force résistante. Dans ce système mécanique conservatif les travaux de ces forces sont $F_2 x_2$ et $-F_3 x_3$ et l'on a:

$F_2 x_2 - F_3 x_3 = 0$ donc $\frac{F_3}{F_2} = \frac{x_2}{x_3} \Rightarrow \frac{x_3}{x_2} = \beta^{-1}$ — — 1

En régime sinusoïdal et en notation complexe la vitesse est proportionnelle au déplacement : $\underline{v} = j\omega \underline{x}$. Par conséquent $|\underline{v_3}|/|\underline{v_2}| = \beta^{-1}$. — 0.5

Ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse.

(c)

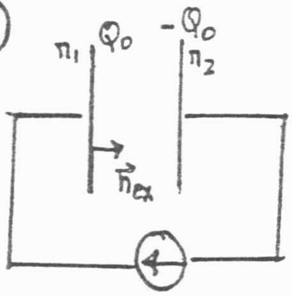
- D'après les résultats de la question I-4-c la transmission eau-air des ondes acoustiques est très faible. Sans liaison mécanique, une onde acoustique émise dans l'air n'est pratiquement pas perçue dans le milieu liquidien (eau). Elle est totalement réfléchie à la surface de séparation. — 0,5

Avec la liaison mécanique, et pour une puissance acoustique donnée, la vitesse acoustique v diminue et la surpression p augmente en passant du milieu aérien au milieu liquidien. Le système mécanique par son action de levier et le rapport S_2/S_3 réalise une adaptation d'impédance entre les deux milieux. L'intensité acoustique instantanée $I = pv$, fournie au milieu aérien (oreille externe) est intégralement transmise au milieu liquidien (oreille interne). D'après ce modèle simplifié il n'y a ni stockage, ni dissipation d'énergie. 2

Partie IV : Modèle élémentaire de l'oreille interne en tant que transducteur : Microphone électrostatique.

IV - 1 - Etude du système à l'équilibre

a



A l'équilibre la tension entre π_1 et π_2 est égale à U_0. L'armature π_1 porte la charge Q_0, l'armature π_2 porte la charge $-Q_0$. La distance interarmature est d_0.

La capacité du condensateur est définie par $Q_0 = C_0 U_0$. — 0,5

Le théorème de Gauss appliqué au condensateur et la relation champ-potentiel ($\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$) permettent d'écrire : $C_0 = \dfrac{\varepsilon S}{d_0}$ — 1,5

b

La pression électrostatique sur une armature est $p_e = \dfrac{\sigma_0^2}{2\varepsilon}$ avec $\sigma_0 = \dfrac{Q_0}{S_0}$ est la charge surfacique. La force qu'exerce l'armature

π_1 sur π_2 (force attractive) a pour expression $\vec{f_0} = \iint_{S_0} p_e \vec{n}_{ex} \, dS_0 = S_0 p_e \vec{e_x}$ ... 1

soit $\vec{f_0} = \dfrac{Q_0^2}{2\varepsilon S_0} \vec{e_x}$ — 0,5

IV-2. Etude du système en régime variable

ⓐ Pour un déplacement x de π_1 la capacité devient :

$$C = \frac{\varepsilon S_0}{d_0 + x} = \frac{C_0}{1 + (x/d_0)}$$ — 0.5

et pour une charge $Q = Q_0 + q$ de π_1 la nouvelle valeur de la tension aux bornes du condensateur est donneé par :

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0 + q}{C_0}\left(1 + \frac{x}{d_0}\right) = \frac{Q_0}{C_0}\left[1 + \frac{q}{Q_0}\right]\left(1 + \frac{x}{d_0}\right)$$ — 0.5

En développant cette expression et en négligeant les termes de second ordre on obtient : $U \simeq U_0\left[1 + \dfrac{q}{Q_0} + \dfrac{x}{d_0}\right]$ — 0.5

ⓑ

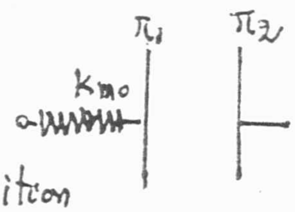
La force électrostatique d'attraction entre les armatures devient : $\vec{f} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon S_0} \vec{e_x}$ avec $Q = Q_0 + q$. — 0.5

En négligeant les termes du second ordre nous avons :

$Q^2 = (Q_0 + q)^2 \simeq Q_0^2\left(1 + \dfrac{2q}{Q_0}\right)$ et par conséquent

$\vec{f} \simeq \dfrac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S_0}\left(1 + \dfrac{2q}{Q_0}\right)\vec{e_x} = f_0\left(1 + \dfrac{2q}{Q_0}\right)\vec{e_x}$. Le 1er terme représente la force statique. Le terme supplémentaire est dû au déplacement de π_1. — 1

IV-3 - Equations du transducteur.



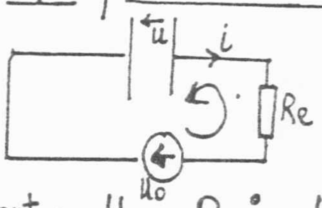
i/ Equation mécanique.

L'armature π_1 est rappelée à sa position d'équilibre par le ressort de constante de raideur k_{m_0}. A l'équilibre force électrostatique f_0 est équilibrée par la force de rappel $-k_{m_0}\delta_0$ où δ_0 est l'allongement du ressort (lorsque $q=0$), soit $f_0 - k_{m_0}\delta_0 = 0$. — 0.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'armature π_1 soumise à la force de surpression s'écrit : $m_0\ddot{x} = f - h_{m_0}\dot{x} - k_{m_0}(x+\delta_0) + pS_0$. En remplaçant f par son expression (voir IV-2-b) et en tenant compte de la relation à l'équilibre $-k_{m_0}\delta + f_0 = 0$, l'équation mécanique du transducteur s'écrit : — 0.

$$m\ddot{x} + h_{m_0}\dot{x} + k_{m_0}x = pS_0 + \frac{2f_0 q}{Q_0} \quad (E.M.)$$ — 0.

- ii/ Equation électrique :



La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :
$-U_0 - R_e i + U = 0$ avec $i = -\dot{q}$ — 0.5
En remplaçant U par son expression (IV-2-a) il vient : $-U_0 + R_e\dot{q} + U_0\left[1 + \frac{q}{Q_0} + \frac{x}{d_0}\right] = 0$ soit $R_e\dot{q} + U_0\frac{q}{Q_0} = -U_0\frac{x}{d_0}$. (E.E.) — 0.5

Interprétation :

Les équations (E.M.) et (E.E.) forment un système différentiel régissant le transducteur :
$$\begin{cases} m_0\ddot{x} + h_{m_0}\dot{x} + k_{m_0}x = pS_0 + \frac{2f_0}{Q_0}q & (E.M.) \\ R_e\dot{q} + U_0\frac{q}{Q_0} = -U_0\frac{x}{d_0} & (E.E.) \end{cases}$$

- Dans l'équation (E.M.) la force de surpression acoustique pS_0 sur l'armature mobile π_1 se trouve renforcée par la force d'attraction supplémentaire des armatures $2f_0/Q_0$.
- Lorsqu'une onde de surpression $p(t)$ arrive sur l'armature mobile elle lui applique une force $F(t) = p(t)S_0$ qui provoque sa mise en vibration forcée à la pulsation ω de l'onde. Lorsque π_1 vibre, — 1
la capacité C varie. C'est donc par la variation du paramètre capacité que le circuit électrique va se trouver couplé au mouvement mécanique de π_1. Le dispositif étudié est un microphone électrostatique qui transforme le signal acoustique en un signal électrique. L'oreille interne peut être considérée comme un véritable microphone électrostatique.