RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
***
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2000

Concours en Physique et Chimie

Épreuve de Mathématiques

Durée: 4H	Date: 5 Juin 2000	Heure: 8H	Nb pages: 5
Barème:	Problème 1: I:3pts, II:4pts, III: 3pts;	Problème 2: I:6pts, II:4pts	

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Le long de ce sujet, on désignera par
- N un entier naturel tel que $N \geq 2$.
- $(e_1, ..., e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
- $< ./. >$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^N$, défini par

$$< x/y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \ si \ x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \ \ et \ \ y = \sum_{i=1}^{N} y_i e_i.$$

- $M(N, \mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre N.

Problème 1 Soit $J = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N} \in M(N, \mathbb{R})$ la matrice diagonale telle que

$$a_{11} = 1, \quad a_{ii} = -1, \quad pour \quad 2 \leq i \leq N.$$

Partie I 1/ Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $< x/Jy > = x_1y_1 - \sum_{i=2}^{N} x_iy_i$.
2/ Soit $A \in M(N, \mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante

$$(\mathcal{P}) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad < Ax/JAy > = < x/Jy > .$$

a) Montrer qu'on a l' équivalence entre les trois propriétés suivantes:
i) A vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $< Ax/JAx > = < x/Jx >$.
iii) ${}^tAJA = J$.
${}^tA$ étant la matrice transposée de A (i.e.$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$, $< Ax/y > = < x/{}^tAy >$).
b) Soit $G_N = \{A \in M(N, \mathbb{R})/A \ \textit{vérifie la propriété}\ (\mathcal{P})\}$.
i) Soit $A \in G_N$, montrer que $|detA| = 1$.
ii) Montrer que G_N est un groupe pour la multiplication des matrices.

Partie II Dans cette partie, on prend $N = 2$.
1/ a) Montrer que

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & \epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix} ; \epsilon \in \{-1, 1\},\ a, b \in \mathbb{R}\ et\ a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

b) En déduire que

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1\, ch(t) & \epsilon_2\, sh(t) \\ \epsilon_3\, sh(t) & \epsilon_4\, ch(t) \end{pmatrix} ; \epsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, 3;\ \epsilon_4 = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3;\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2/ On pose $\tilde{G}_2 = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$.
a) Montrer que $\tilde{G}_2$ est un sous-groupe de G_2.
b) Soit $t \in \mathbb{R}$ trouver P inversible tel que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
c) Montrer que $\tilde{G}_2$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

3/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculer B^p, $p \in \mathbb{N}$
b) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad A(t) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k B^k}{k!}.$$

Partie III Dans cette partie, on prend N=3.

1/ Déterminer l'ensemble des matrices M de G_3 vérifiant $\left\{ \begin{array}{l} Me_2 = sh(t)e_1 + ch(t)e_2 \\ Me_3 = e_3. \end{array} \right.$

2/ Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 0 \end{array} \right.$

3/ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A \in G_3$.

b) Diagonaliser A et calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$

c) Trouver un vecteur $V = (a, b, c)$; $a, b, c \in \mathbb{N}$ non tous nuls, tel que

$$< V/JV >= 0.$$

d) Donner une méthode pour construire à partir de V une infinité de solutions de l'équation de Fermat: $x^2 = y^2 + z^2$, avec $x, y, z \in \mathbb{N}$

Problème 2

Partie I Soit u_0 une fonction continue à valeurs réelles, de classe C^1 par morceaux, impaire et 2π-périodique, telle que $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.

1/ a) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad où\ b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) sin(kx)\ dx.$$

b) Montrer que $lim_{k \longrightarrow +\infty} b_k = 0$.

2/ Pour $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[$, on considère la fonction

$$(*) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(k^2+1)t} \sin(kx).$$

a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} k^p |b_k| e^{-(k^2+1)\alpha} = 0.$$

b) En déduire que u est de classe C^∞ sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$.

c) Montrer que u est solution du système:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi], \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \forall x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \ \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

3/ Soit v une fonction continue sur $[0,\pi]\times[0,+\infty[$, à valeurs réelles, de classe C^2 sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$. On pose

$$G(t)=\int_0^{\pi} v^2(x,t)\ dx.$$

v_t

a) Montrer que G est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

b) On suppose que v vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)+v(x,t)=0,\ \forall x\in[0,\pi],\quad \forall t>0,\\ v(0,t)=v(\pi,t)=0,\quad \forall t\geq 0.\end{cases}$$

i) Montrer que

$$\forall\, t>0,\ \int_0^{\pi} v(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\ dx=-\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)^2\ dx.$$

ii) En déduire que G est décroissante sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que si v vérifie en plus, la condition initiale

$$\forall x\in[0,\pi],\ v(x,0)=0,$$

alors v est identiquement nulle sur $[0,\pi]\times[0,+\infty[$.

d) En admettant que la fonction u donnée par $(*)$, est continue sur $[0,\pi]\times[0,+\infty[$, montrer que u est l'unique fonction à valeurs réelles, continue sur $[0,\pi]\times[0,+\infty[$, de classe C^2 sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$, qui est solution du système (S).

Partie II Dans cette partie, on cherche une solution approchée du problème (S).

Soit N un entier positif. On divise l'intervalle $[0,\pi]$ en $(N+1)$ intervalles de longueur égale: $h=\frac{\pi}{N+1}$.

On considère alors, la matrice carrée d'ordre N, définie par:

$$A_N=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$