P C

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

Concours en Physique et chimie
Epreuve de Physique

Durée : 4 heures	**Date : 7 juin 2000**	**Heure : 8 h**	**Nb pages : 8** + Annexe
Barème : Partie I : 8/20;	Partie II : 5/20;	Partie III : 4,5/20;	Partie IV : 2,5/20

l'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le problème est constitué de quatre parties **indépendantes** entre elles. Il est conseillé de traiter le problème dans l'ordre des questions. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour des questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

Données utiles

- Dans tout le problème, on assimilera l'air à un gaz parfait à la température T = 293 K et à la pression $P_0 = 10^5$ Pa, caractérisé par :
  - Sa masse molaire $M = 29\ 10^{-3}$ kg.mol^{-1}.
  - Sa masse volumique $\rho_0 = 1,3$ kg.m^{-3}.
  - Le rapport de ses capacités thermiques à pression et volume constants $\gamma = C_P/C_V = 1,4$.
- Pour l'eau, on donne :
  - Sa masse volumique $\rho_0 = 10^3$ kg.m^{-3}.
  - Son coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = 4,5\ 10^{-10}$ Pa^{-1}
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.
- Formule d'analyse vectorielle : $\mathrm{div}\left(f.\vec{a}\right) = f.\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ où f est une fonction scalaire et $\vec{a}$ un champ vectoriel.
- Dans tout le problème, on négligera les effets de pesanteur.

Notation complexe

On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$ et on souligne les grandeurs complexes.

Le but de ce problème consiste à étudier le comportement physique de l'oreille en tant que système acoustique, mécanique et transducteur. Aucune connaissance sur la physiologie et l'anatomie de l'oreille n'est nécessaire pour traiter le problème.

Un schéma et une description simplifiée de l'oreille sont donnés en annexe à titre de lecture.

La première partie du problème porte sur la propagation des ondes acoustiques. Les trois autres parties traitent des modèles élémentaires des différentes parties de l'oreille humaine.

Partie I: Propagation des ondes acoustiques planes monochromatiques

On considère un fluide parfait au repos, la pression P_0 et la masse volumique ρ_0 sont constantes et uniformes. On s'intéresse à la propagation dans ce fluide d'une onde acoustique suivant l'axe x'Ox de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ d'un référentiel galiléen d'origine O. On note c la célérité de l'onde acoustique.

Le milieu est caractérisé à l'instant t et à l'abscisse x par la vitesse des particules fluides $\vec{v} = v(x,t)\,\vec{e}_x$, la pression $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ et la masse volumique $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$.
La variation $\mu(x,t)$ de la masse volumique du fluide, la surpression acoustique p(x,t) et la vitesse particulaire de l'onde acoustique sont supposées faibles. Les grandeurs $\dfrac{p(x,t)}{P_0}$, $\dfrac{\mu(x,t)}{\rho_0}$ et $\dfrac{v(x,t)}{c}$ sont alors des infiniments petits du premier ordre.
Dans l'approximation acoustique, tout terme petit d'ordre supérieur ou égal à 2 sera négligé.
On néglige les forces de pesanteur devant les forces de pression ainsi que les effets d'échange thermique et d'irréversibilité.

On appelle χ_S le coefficient de compressibilité isentropique du fluide $\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$, où V est le volume du fluide.

I-1- Equation de propagation à une dimension

a- Ecrire dans le cas général l'équation locale de conservation de la masse et l'équation d'Euler.

b- Linéariser ces équations et établir les relations entre $\dfrac{\partial \mu}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ d'une part et entre $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ d'autre part.

c- En déduire, dans l'approximation acoustique et pour des évolutions isentropiques, les deux équations couplant les grandeurs p et v.

d- Montrer que la surpression acoustique p(x,t) et la vitesse particulaire v(x,t) sont solutions d'une équation de d'Alembert à une dimension.
Exprimer la célérité c en fonction de ρ_0 et χ_S.

e- Dans le cas où le fluide est un gaz parfait, exprimer la célérité c en fonction de la température T, de la masse molaire M, du rapport γ des capacités thermiques et de la constante R des gaz parfaits.

f- *Application numérique* : Calculer la célérité de l'onde acoustique dans l'eau et dans l'air.

I-2- Impédance acoustique caractéristique

Le fluide, décrit précédemment, remplit maintenant un tuyau cylindrique de longueur infinie, de section S constante et d'axe x'Ox.
Soit une onde acoustique plane monochromatique de pulsation ω se propageant dans ce tuyau dans la direction x'Ox suivant les x croissants. Les champs de surpression acoustique et de vitesse particulaire ont pour expression en notation complexe : $\underline{p}(x,t) = p_0 \exp j(\omega t - kx)$ et $\underline{v}(x,t) = \underline{v}_0 \exp j(\omega t - kx)$, où p_0 et $\underline{v}_0$ désignent les amplitudes correspondantes et $k = \dfrac{\omega}{c}$ est la norme du vecteur d'onde.

On appelle impédance caractéristique du tuyau acoustique rempli de fluide le rapport $\underline{Z}_C = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$.

a- Justifier cette appellation à l'aide d'une analogie électrique.

b- Montrer que $Z_C = \rho_0 c$ et déterminer son unité.

c- Application numérique : Evaluer Z_C pour l'air et pour l'eau. Conclure.

I-3- Intensité acoustique

L'intensité acoustique I de l'onde plane progressive sinusoïdale se propageant selon la direction x'Ox représente la puissance moyenne transférée par l'onde à travers une surface unité perpendiculaire à x'Ox.

Montrer que $I = \dfrac{p_0^2}{2\rho_0 c}$.

I- 4- Réflexion et transmission des ondes acoustiques

On considère un tuyau cylindrique de longueur infinie d'axe x'Ox et de section constante. En $x = 0$, est placée une membrane, d'épaisseur et de masse négligeables, séparant deux fluides d'impédances caractéristiques Z_{C1} et Z_{C2}.

Une onde acoustique plane progressive monochromatique incidente se propage le long de l'axe x'Ox, dans le sens des x croissants (cf. figure 1). Sa surpression acoustique est $\underline{p}_i = p_0 \exp j\,(\omega t - kx)$. Arrivée sur la membrane, elle donne naissance à une onde réfléchie de surpression acoustique $\underline{p}_r$ dans le fluide 1 occupant la région $x < 0$ et à une onde transmise de surpression $\underline{p}_t$ dans le fluide 2 dans la région $x > 0$.

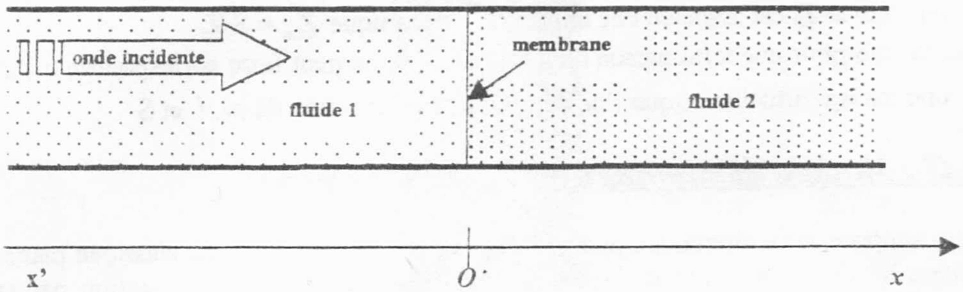

Figure 1

a- En précisant les conditions de passage pour l'onde acoustique globale en $x = 0$, déterminer en fonction de Z_{C1} et Z_{C2} les coefficients de réflexion $\underline{r} = \dfrac{\underline{p}_r}{\underline{p}_i}$ et de transmission $\underline{t} = \dfrac{\underline{p}_t}{\underline{p}_i}$ relatifs aux surpressions acoustiques.

b- En déduire en fonction de Z_{C1} et Z_{C2} les coefficients de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ relatifs aux intensités acoustiques.

c- En calculant les valeurs de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$, que peut-on dire de la transmission des ondes acoustiques à l'interface air-eau ?

I -5- Conduite acoustique – Impédance acoustique ramenée

Une conduite acoustique (cf. figure 2) cylindrique d'axe x'Ox et de section S constante est remplie d'air. Elle est fermée en $x = 0$ sur une impédance acoustique $\underline{Z}_T$ (impédance terminale).

Une onde acoustique incidente de surpression $\underline{p}_i = p_0 \exp j\,(\omega t - kx)$, donne naissance au niveau de l'impédance terminale $\underline{Z}_T$ à une onde réfléchie. Soit $\underline{r} = \dfrac{\underline{p}_r}{\underline{p}_i}$ le coefficient de réflexion en $x = 0$.

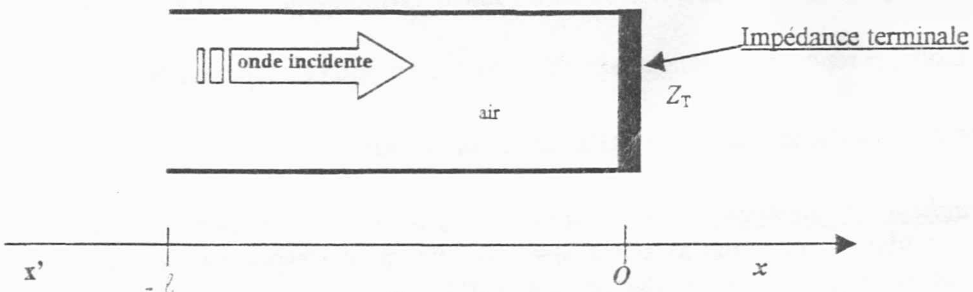

Figure 2

L'impédance acoustique terminale ramenée en un point d'abscisse x de la conduite est définie par le rapport :

$\underline{Z}_r(x) = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$ où $\underline{p}$ et $\underline{v}$ représentent le champ acoustique résultant en ce point.

a- Exprimer $\underline{r}$ en fonction de $\underline{z}_T = \dfrac{\underline{Z}_T}{Z_C}$ où Z_C est l'impédance caractéristique de l'air.

b- Montrer que l'impédance terminale $\underline{Z}_r = \underline{Z}_r(x = -\ell)$ de la conduite ramenée à une distance ℓ (en $x = -\ell$)

est donnée par : $\underline{Z}_r = Z_C \dfrac{\underline{Z}_T + jZ_C \tan kl}{Z_C + j\underline{Z}_T \tan kl}$.

c- En déduire, lorsque la terminaison est ouverte en x = 0 ($\underline{Z}_T = 0$), l'expression de l'impédance acoustique ramenée $\underline{Z}_r$ en $x = -\ell$.

d- On se place dans l'approximation des basses fréquences (ABF) pour laquelle la longueur d'onde λ est supposée très grande devant la longueur de la conduite ($\lambda >> \ell$).

A l'impédance $\underline{Z}_r$ est associée une impédance mécanique $\underline{Z}^*_m = S\,\underline{Z}_r$.
Montrer que pour une terminaison ouverte en x = 0, on peut faire correspondre à l'impédance mécanique $\underline{Z}^*_m$ une masse virtuelle m_v que l'on déterminera en fonction de ρ_0, ℓ et S.

Partie II : Modèle élémentaire de l'oreille externe

Le tympan, supposé isolé du conduit auditif, est assimilé à une membrane élastique plane de masse m vibrant parallèlement à elle même suivant l'axe x'Ox. On désigne par x son élongation par rapport à sa position d'équilibre. Au cours de son mouvement, la membrane est soumise à une force de rappel $-k_m x$ ($k_m>0$) et à une force de frottement fluide $-h_m \dot{x}$ ($h_m>0$).
Les caractéristiques mécaniques relatives au tympan, obtenues par méthode holographique, sont :
$m = 15.10^{-6}$ kg , $k_m = 3000$ N.m^{-1} et $h_m = 0,1$ N.s.m^{-1} .

II-1- Oscillations mécaniques libres de la membrane

a- Ecrire l'équation différentielle décrivant le régime d'oscillations libres de la membrane.

b- Calculer le facteur de qualité mécanique Q_m et le temps de relaxation τ de la membrane. On désigne par ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur libre non amorti.

c- Déterminer la solution x(t) de l'équation différentielle.
Représenter l'allure de x(t) sachant qu'à l'instant t = 0 : $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$.

II-2- Réponse forcée de la membrane à une excitation sinusoïdale

On applique maintenant à la membrane une force de surpression acoustique sinusoïdale suivant la direction x'Ox, d'amplitude constante F_m et de pulsation ω.

On relève sa courbe de réponse en amplitude réduite $\Delta = \dfrac{x_m}{x_{m_0}}$ en fonction de la pulsation réduite $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$,

x_m désigne l'amplitude réelle de l'élongation de valeur asymptotique $x_{m0} = x_m(u = 0)$.

a- Etablir, la réponse en élongation réduite complexe $\underline{\Delta}(u)$ en fonction de Q_m.

b- En déduire l'amplitude $\Delta(u)$ et l'allure de sa variation.

c- *Application numérique* : La membrane de section S = 60 mm^2 est excitée par une surpression sinusoïdale d'amplitude constante $p_0 = 2.10^{-5}$ Pa qui correspond au seuil d'audition. Calculer F_m et en déduire l'amplitude des vibrations x_m à 2000 Hz.

II-3- Impédance mécanique du tympan non chargé par le conduit auditif

En régime sinusoïdal permanent, l'impédance mécanique complexe de la membrane (tympan) est le rapport de l'amplitude complexe $\underline{F_m}$ de la force excitatrice par l'amplitude complexe $\underline{v_m}$ de la réponse en vitesse :

$$\underline{Z_m}(\omega) = \frac{\underline{F_m}}{\underline{v_m}}$$

a- Ecrire $\underline{Z_m}(\omega)$ en fonction de ω, m, k_m et h_m.

b- Indiquer sur un tableau les correspondances entre les grandeurs relatives aux oscillations électriques et mécaniques.
En déduire le schéma électrique analogue à cet oscillateur mécanique.

II-4- Fonction de transfert du quadripôle équivalent au tympan chargé par le conduit auditif

On considère maintenant la membrane (tympan) située à l'extrémité du conduit auditif. On assimile ce dernier à un tuyau acoustique de longueur ℓ = 18 mm d'axe x'Ox et de même section S = 60 mm^2 que celle de la membrane. L'autre extrémité (x = 0) est ouverte à l'air libre. Ce conduit est rempli d'air dans lequel se propage une onde acoustique sinusoïdale de pulsation ω et de longueur d'onde λ (cf figure 3).

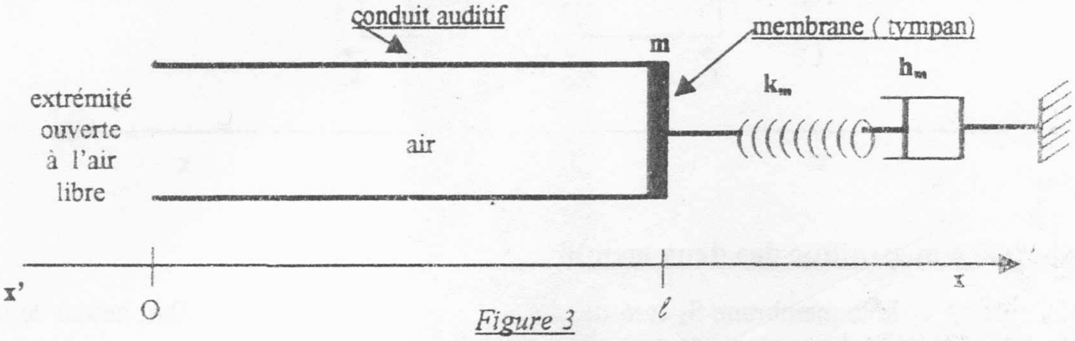

Figure 3

La présence de l'onde acoustique se propageant dans le conduit auditif, de longueur ℓ et d'extrémité ouverte, induit la masse virtuelle m_v déterminée à la question I-5-d.
Les effets d'amortissement liés à une réduction du passage de l'air sont modélisés par un coefficient de frottement mécanique $h'_m = 3{,}6$ N.s.m^{-1}.
Compte tenu de l'analogie électrique-mécanique et dans l'approximation des basses fréquences ABF ($\lambda >> \ell$), la membrane (de constantes mécaniques m, k_m et h_m) chargée par le conduit auditif peut être modélisée par le schéma électrique représenté sur la figure 4.

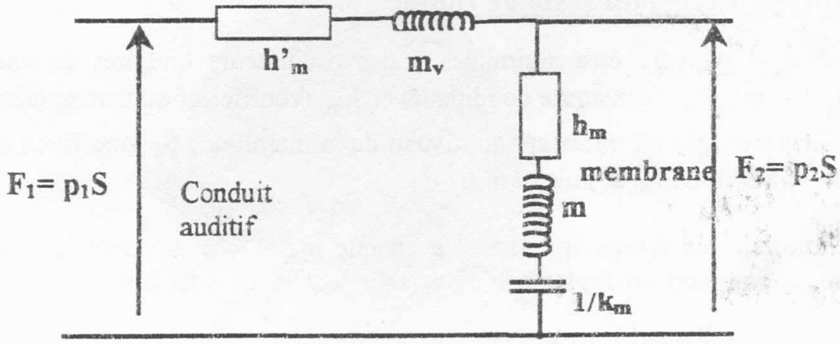

Figure 4

a- Etablir, en régime sinusoïdal et en notation complexe, la fonction de transfert du quadripôle $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{p_2}}{\underline{p_1}}$. Les grandeurs $\underline{p_2}$ et $\underline{p_1}$ désignent respectivement les surpressions agissant sur la membrane et à l'entrée du conduit auditif.

b- *Application numérique* : Calculer l'amplitude de la surpression $\underline{p_2}$ pour une onde acoustique de fréquence ν = 200 Hz et d'amplitude de surpression p_1 = 5 Pa.

Partie III : Modèle élémentaire de l'oreille moyenne

Une cavité de "grand" volume V_o contenant de l'air communique avec l'extérieur par deux membranes planes élastiques (d'épaisseurs négligeables) de sections respectives $S_2 = S = 60\ mm^2$ et $S_3 = 3\ mm^2$ (cf. figure 5).
Un tube capillaire permet d'équilibrer les pressions statiques assurant ainsi dans la cavité une pression P_0 égale à celle de l'extérieur.

On suppose dans toute cette partie, que la longueur d'onde λ reste très grande devant les dimensions de la cavité (ABF).

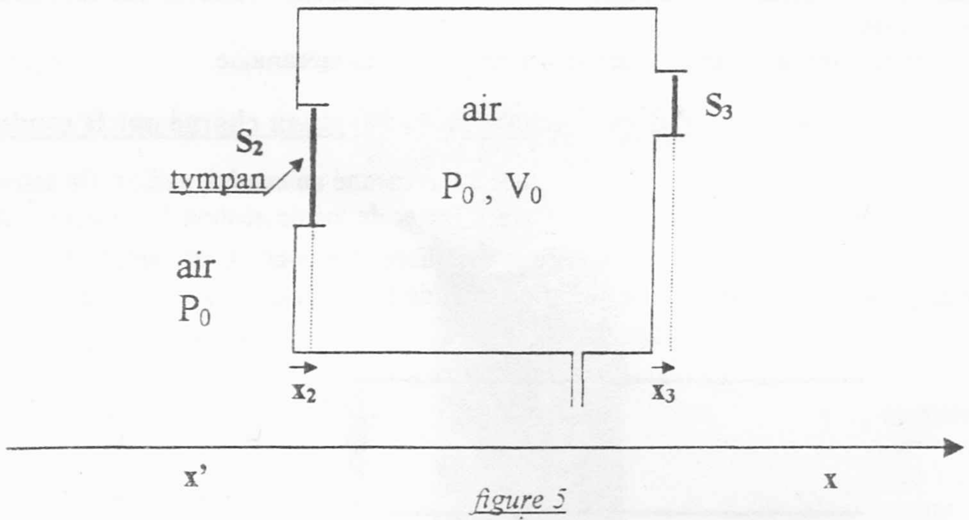

figure 5

III-1 Couplage mécanique des deux membranes

Les déplacements x_2 de la membrane S_2 et x_3 de la membrane S_3 suivant l'axe x'O x, autour de leurs positions d'équilibre, entraînent une variation ΔV du volume de l'air contenu dans la cavité.

a- Exprimer ΔV en fonction de S_2, x_2, S_3 et x_3. Les déplacements x_2 et x_3 sont supposés faibles.
Déterminer la variation de pression ΔP pour des évolutions isentropiques de l'air à l'intérieur de la cavité en fonction de γ, P_o, V_o, S_2, x_2, S_3 et x_3.

b- En déduire les forces f_2 et f_3 de couplage élastique exercées respectivement sur S_2 et sur S_3 dues à la variation du volume de l'air dans la cavité.

III- 2 Oscillations forcées du système couplé

Les deux membranes peuvent être assimilées à des oscillateurs linéaires de caractéristiques mécaniques respectives : m_i (masse), k_{m_i} (constante de raideur) et h_{m_i} (coefficient de frottement fluide) où i = 2,3.
On excite le système couplé en imposant au niveau de la membrane S_2 une force de surpression sinusoïdale parallèle à x'Ox d'amplitude F_m et pulsation ω.

a- Etablir le bilan des forces appliquées à chaque membrane et écrire le système des deux équations dynamiques couplant les déplacements $x_2(t)$ et $x_3(t)$ autour des positions d'équilibre.

b- En négligeant les forces de frottement, exprimer en régime forcé, les amplitudes complexes des déplacements $\underline{X_2}$ et $\underline{X_3}$ des deux membranes couplées. On désignera par ω_{o2} et ω_{o3} les pulsations propres des deux oscillateurs non amortis et on posera : $K = \frac{\gamma P_o}{V_o} S_2 S_3$, $K_2 = \frac{\gamma P_o}{V_o} S_2^2$ et $K_3 = \frac{\gamma P_o}{V_o} S_3^2$.

c- Tracer, en fonction de ω, l'allure des courbes donnant les variations des modules de $\underline{X_2}$ et $\underline{X_3}$.
Sans faire de calcul, indiquer l'effet des forces de frottement supposées faibles devant les forces élastiques de rappel.

Sans faire de calcul, indiquer l'effet des forces de frottement supposées faibles devant les forces élastiques de rappel.

III- 3-Transmission mécanique

Pour transmettre les ondes acoustiques sans perte de puissance depuis la cavité contenant de l'air vers le milieu liquide (la périlymphe, assimilée à de l'eau), la chaîne des osselets, par leurs actions de levier entre le tympan (S_2) et la fenêtre ovale (S_3), permet de réaliser un meilleur transfert de l'onde de pression. Le levier mécanique (O_S, S_2, S_3), pivotant sans frottement autour d'un axe fixe passant par O_S et normal au plan de la figure 6, relie les deux membranes S_2 et S_3 avec un rapport des longueurs des bras : $\beta = \frac{d_2}{d_3} = 1{,}3$.

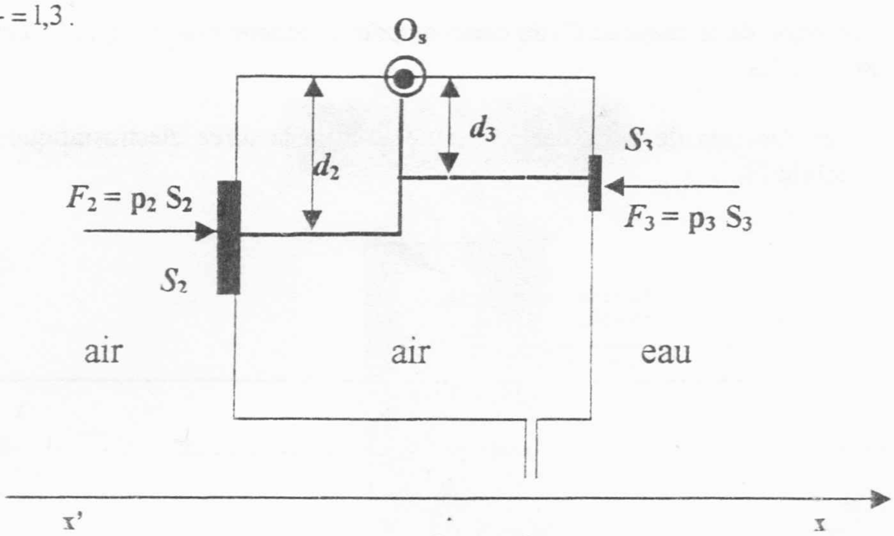

Figure 6

Les deux bras du levier sont soumis uniquement aux deux forces de surpression F_2 et F_3 exercées respectivement par S_2 et S_3 (cf figure 6).

a- Exprimer le rapport $\frac{F_3}{F_2}$ en fonction de β.

En déduire en fonction de S_2, S_3 et β le coefficient d'amplification des surpressions $\alpha = \frac{p_3}{p_2}$ résultant de la liaison mécanique.

Le couplage, assuré uniquement par la cavité d'air entre les deux membranes et étudié dans les questions III-1 et III-2, introduit un coefficient d'amplification $\alpha_o = 2$.

Comparer α_o à la valeur de α calculée précédemment.

b- Montrer que $\frac{F_3}{F_2} = \frac{x_2}{x_3}$. En déduire, en régime sinusoïdal, le rapport $\frac{|v_3|}{|v_2|}$ en fonction de β.

Les grandeurs v_2 et v_3 désignent respectivement les vitesses vibratoires de la membrane S_2 et de la membrane S_3.

c- Que peut-on dire de la transmission des ondes acoustiques du milieu aérien (oreille externe, côté S_2) au milieu liquidien (oreille interne, côté S_3) :

- sans liaison mécanique (voir I-4-c)
- avec liaison mécanique ?

Partie IV : Modèle élémentaire de l'oreille interne en tant que tansducteur: Microphone électrostatique

L'oreille interne est chargée de transformer les variations de la surpression acoustique transmise au niveau de la membrane S_3, en un signal électrique véhiculé par le nerf auditif. L'oreille interne peut alors être considérée comme un véritable microphone.

Un microphone électrostatique est constitué de deux armatures métalliques planes, indéformables et de même surface S_0.

La première armature Π_1 est une membrane élastique de masse m_0 qui peut se déplacer en translation dans une direction (x'Ox) perpendiculaire au plan de sa surface. L'autre armature Π_2, parallèle à Π_1, est fixe. Le milieu entre Π_1 et Π_2, de permittivité ε, est supposé linéaire, homogène et isotrope. L'ensemble Π_1 et Π_2 constitue un condensateur plan de capacité C dont on négligera les effets de bord.

On considère le circuit R_eC formé par la mise en série du condensateur décrit précédemment et d'une résistance R_e. Ce circuit est alimenté par une source de tension de f.e.m constante U_0 (cf figure 7).
A l'équilibre, on désigne par d_0, C_0 et Q_0 respectivement la distance séparant les deux armatures, la capacité du condensateur et la charge de l'armature Π_1.

IV- 1 -Etude du système à l'équilibre

a- Ecrire l'expression de la capacité C_0 du condensateur en fonction de S_0, d_0 et ε ainsi que celle de Q_0 en fonction de C_0 et U_0.

b- Déterminer, en fonction de d_0, Q_0 et ε, l'expression de la force électrostatique f_0 qui s'exerce sur l'armature mobile Π_1.

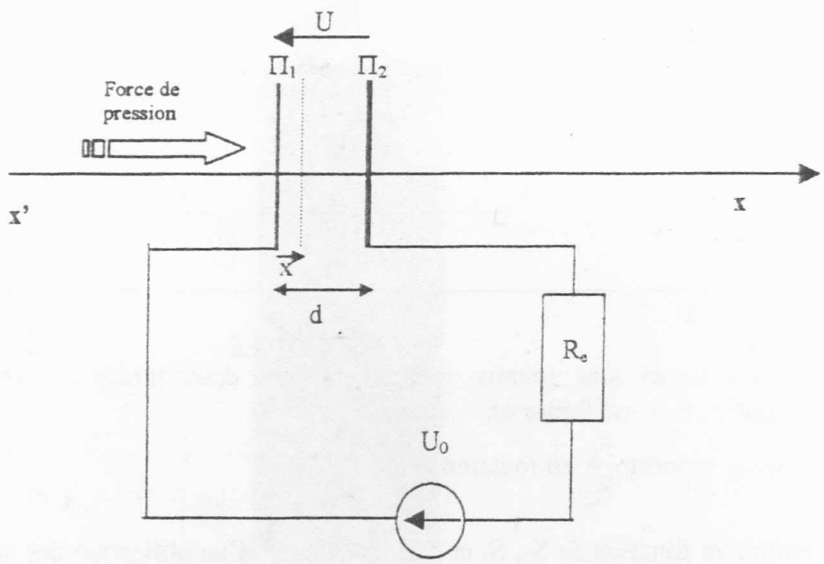

Figure 7

IV- 2 -Etude du système en régime variable

On impose, à présent, à Π_1 un petit déplacement x(t) par rapport à sa position d'équilibre et une petite variation q(t) de la charge. La distance entre les armatures devient alors $d = d_0 + x$ et la charge de l'armature Π_1 devient $Q = Q_0 + q$ avec $|x| \ll d_0$ et $|q| \ll Q_0$.
On suppose que les lois de l'électrostatique restent valables en régime variable (ARQP).

En effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{x}{d_0}$ et $\frac{q}{Q_0}$, déterminer :

a- La valeur de la nouvelle tension U aux bornes du condensateur en fonction de U_0, $\frac{x}{d_0}$ et $\frac{q}{Q_0}$.

b- La valeur de la nouvelle force électrostatique f exercée sur l'armature mobile en fonction de f_0 et $\frac{q}{Q_0}$.

IV- 3- Equations du transducteur

L'armature mobile de surface S_0 est modélisée par un système masse-ressort linéaire de masse m_0, de constante de raideur k_{m0} et de coefficient de frottement fluide h_{m0}. En plus de la force électrostatique, l'armature Π_1 est soumise à une force extérieure qui résulte de la surpression d'une onde acoustique ; p désigne la valeur de cette surpression.

Etablir, au premier ordre en $\frac{x}{d_0}$ et $\frac{q}{Q_0}$, les équations électrique et mécanique de ce transducteur en fonction des variables q(t) et x(t). Interpréter.