



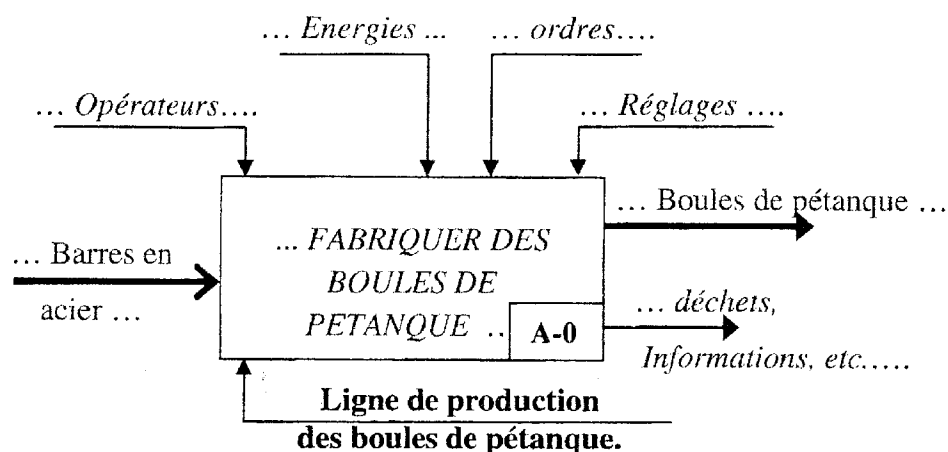
# DOSSIER

## DOCUMENT REPONSE

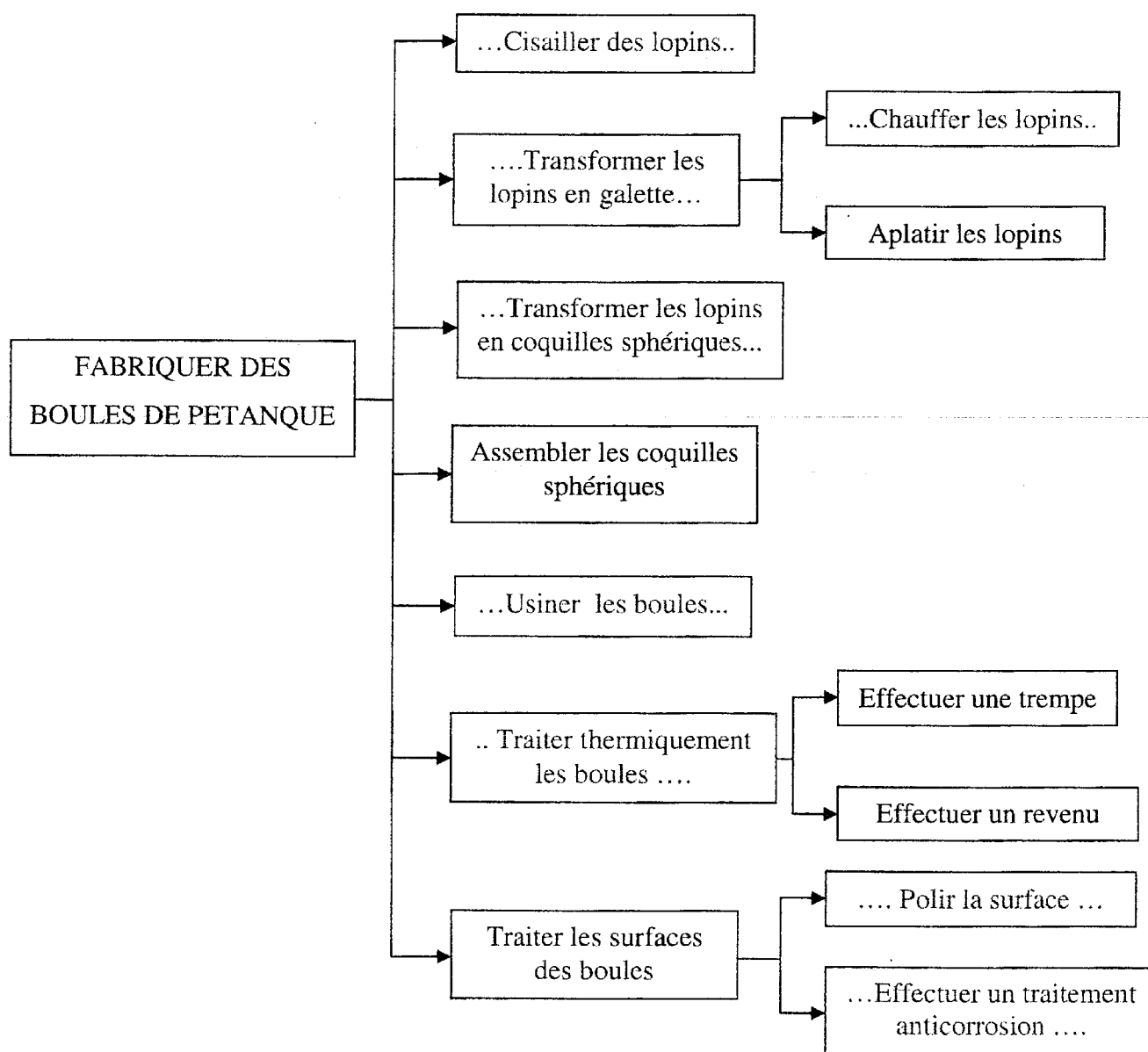
- ✓ Ce dossier comporte 15 pages numérotées de 1 à 15 :
  - Partie A - Technologie de Conception : Pages 1 et 2 ;
  - Partie B - Mécanique : Pages 3 à 9 ;
  - Partie C - Automatique : Pages 10 à 15 ;
- ✓ Un seul dossier document réponse est fourni au candidat et doit être rendu, en totalité, même sans réponses à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

## PARTIE A - TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

A.1- Compléter l'actigramme A-0 de la ligne de production des boules de pétanque :



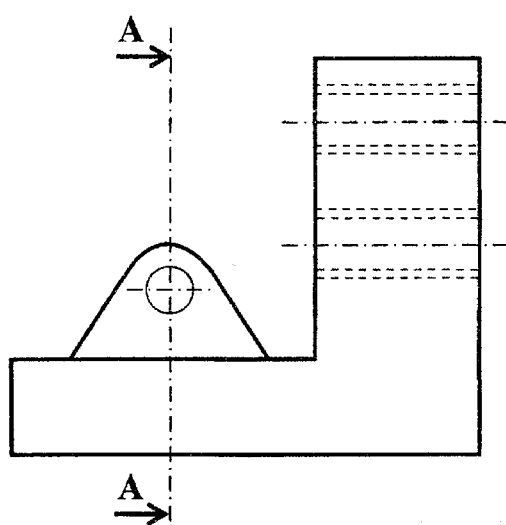
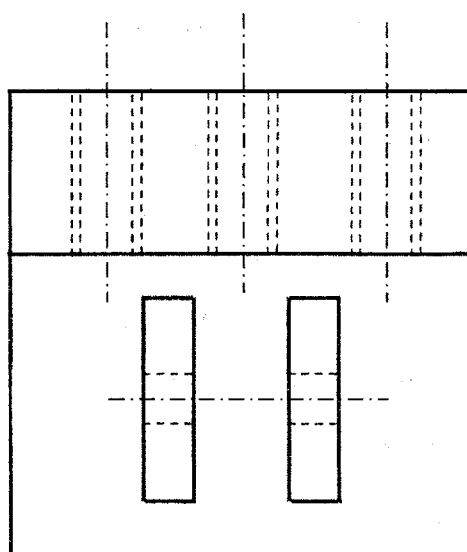
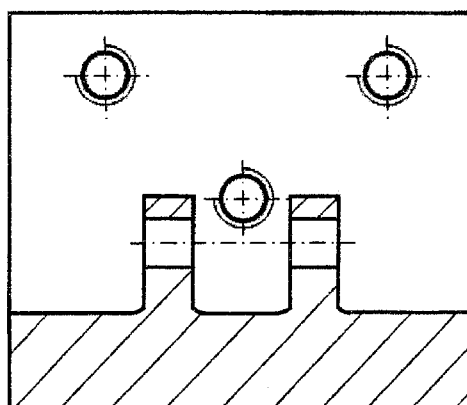
A.2- Compléter le diagramme FAST partiel suivant :



**A.3- ETUDE GRAPHIQUE :**

Le dessin ci-dessous représente le support d'articulation du cylindre de vérin qui commande la vé-came du système de transfert. Ce dessin comporte trois vues à compléter :

- la vue de face en coupe A-A ;
- la vue de dessus ;
- la vue de droite.

**A - A**

## PARTIE B : MECANIQUE

### B.1- ETUDE GEOMETRIQUE :

**B.1.1-** Ecrire, dans la base de  $R_0$ , les équations scalaires traduisant la condition de fermeture géométrique de la chaîne  $S_0$ - $S_1$ - $S_2$ - $S_3$ - $S_0$ . En déduire le nombre de degrés de liberté du système.

.....  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$  .....

.....  $\lambda \cos \alpha - 2e \sin \beta = a$  ..... (1)

.....  $\lambda \sin \alpha + 2e \cos \beta = b$  ..... (2)

Degré de liberté  $d$  :

$d = \dots 3 - 2 = 1 \dots$

**B.1.1-** Déduire la relation entre  $\lambda$  et  $\beta$  ;

..... (1)  $\Leftrightarrow \lambda \cos \alpha = a + 2e \sin \beta$  .....

..... (2)  $\Leftrightarrow \lambda \sin \alpha = b - 2e \cos \beta$  .....

..... (1)<sup>2</sup> + (2)<sup>2</sup>  $\Leftrightarrow \lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e^2 + 4e(a \sin \beta - b \cos \beta)$  .....

Relation entre  $\lambda$  et  $\beta$  : .....  $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e^2 + 4e(a \sin \beta - b \cos \beta)$  .....

### B.2- GEOMETRIE DE MASSES :

On considère l'ensemble  $(S)$  regroupant les solides  $(S_3)$  et  $(S_4)$  :  $S = \{S_3, S_4\}$  (Figure 2-B).  $(S_3)$ , dont les trous des axes d'articulation sont négligés, est assimilé à un secteur de cylindre homogène de rayon  $R$ , de longueur  $2L$  et de masse  $m_3$ .  $(S_4)$  est une boule homogène **supposée pleine**, de masse  $m_4$  et de rayon  $r$ . Le centre d'inertie  $G_3$  de  $(S_3)$  et  $G_4$  de  $(S_4)$  appartiennent au plan de symétrie  $(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ . On notera  $M$  la masse de  $(S)$  :  $M = m_3 + m_4$ .

**B.2.1-** Déterminer, dans la base de  $R_3$ , le vecteur position de  $G_3$  centre d'inertie de  $(S_3)$  :  $\overrightarrow{DG_3}$  ;

.....  $(D, \vec{x}_3)$  est un axe de symétrie de  $(S_3) \Rightarrow G_3 \in (D, \vec{x}_3) \Leftrightarrow y_{G_3} = z_{G_3} = 0$  .....

$(S_3)$  homogène  $\Rightarrow V_{x_G} = \int_{P \in S} x_P dV(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 2Lr \cos \theta r dr d\theta = 2L \frac{-\sqrt{2}}{3} R^3 \dots$  et  $V = \frac{3}{2} L \pi R^2$

.....  $\Rightarrow x_{G_3} = \frac{-4\sqrt{2} R}{9 \pi}$  .....

$\overrightarrow{DG_3} =$

$(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$   $\begin{vmatrix} \frac{-4\sqrt{2} R}{9 \pi} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

**B.2.2-** Déterminer, dans la base de  $R_3$ , le vecteur position de centre  $G$  de  $(S)$  :  $\overrightarrow{DG}$  ;

$$\overrightarrow{MDG} = \sum_3^4 m_i \overrightarrow{DG_i} = m_3 \overrightarrow{DG_3} + m_4 \overrightarrow{DG_4}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{DG_3} = \frac{-4\sqrt{2}R}{9} \frac{\vec{x}_3}{\pi} = x_{G_3} \vec{x}_3 \dots \text{ et } \overrightarrow{DG_3} = c \vec{x}_3 \dots$$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M} \vec{x}_3$$

$$\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} \frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

**B.2.3-** Montrer que la matrice d'inertie de  $(S)$  au point  $D$  est diagonale dans la base de  $R_3$  :

$$\dots \text{ Deux plans de symétrie : } (D, \vec{x}_3, \vec{y}_3) \text{ et } (D, \vec{x}_3, \vec{z}) \Leftrightarrow P_{Dx_3y_3} = P_{Dx_3z} = P_{Dy_3z} = 0 \dots$$

\dots \text{ Donc la matrice d'inertie de } (S) \text{ au point } D \text{ est diagonale dans la base de } R\_3 \dots

**B.2.4-** Déterminer le moment d'inertie de  $(S_3)$  par rapport à l'axe  $(D, \vec{z})$  :  $I_3$  ;

$$\dots I_3 = \int r^2 dm(P) = \int r^2 \rho dv(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^2 \rho 2Lr dr d\theta \dots \text{ avec } \rho = \frac{m_3}{V} = \frac{2m_3}{3\pi LR^2} \dots$$

$$\dots I_3 = \frac{m_3 R^2}{2} \dots$$

$$I_3 = \dots \frac{m_3 R^2}{2} \dots$$

**B.2.5-** Déterminer le moment d'inertie de  $(S)$  par rapport à l'axe  $(D, \vec{z})$  :  $I$  ;

$$\dots I = I_3 + I_{Dz}(S_4) \dots \text{ or } I_{Dz}(S_4) = I_{G_4z}(S_4) + m_4 c^2 = \frac{2}{5} m_4 r^2 + m_4 c^2 \dots$$

$$\dots I = \frac{m_3 R^2}{2} + m_4 \left( \frac{2}{5} r^2 + c^2 \right) \dots$$

$$I = \dots \frac{m_3 R^2}{2} + m_4 \left( \frac{2}{5} r^2 + c^2 \right) \dots$$

### B.3- ETUDE CINEMATIQUE :

**B.3.1-** Exprimer, dans la base de  $R_1$ , les torseurs cinématiques suivants :

**B.3.1.1-** de mouvement de  $(S_1)$  par rapport à  $(S_0)$  au point A :  $\{V(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dots \dots \dot{\alpha} \vec{z} \dots \\ \dots L \dot{\alpha} \vec{y}_1 \dots \end{Bmatrix}_A$  ;

**B.3.1.2-** de mouvement de  $(S_2)$  par rapport à  $(S_0)$  au point B :  $\{V(S_2/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dots \dots \dot{\alpha} \vec{z} \dots \\ \dots \dot{\lambda} \vec{x}_1 + \dot{\lambda} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \dots \end{Bmatrix}_B$  ;

**B.3.1.3-** de mouvement de  $(S_3)$  par rapport à  $(S_0)$  au point C :  $\{V(S_3/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \dots \dots \dot{\beta} \vec{z} \dots \\ \dots \vec{0} \dots \end{Bmatrix}_C$  ;

**B.3.2-** Déterminer, en fonction de  $\dot{\beta}$ , le vecteur vitesse du point B appartenant à  $(S_3)$  par rapport à  $(S_0)$ . En déduire, par projection dans la base de  $R_1$ , une relation entre  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\lambda}$  :

$$\dots \vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0) = 2e\dot{\beta}\vec{x}_3 \dots$$

$$\dots \text{or } \vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(B \in S_2/S_0) \Rightarrow 2e\dot{\beta}(\cos(\beta - \alpha)\vec{x}_1 + \sin(\beta - \alpha)\vec{y}_1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \dot{\lambda}\dot{\alpha}\vec{y}_1 \dots$$

$$\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \dots 2e\dot{\beta}\vec{x}_3 \dots ; \text{ Relation entre } \dot{\beta} \text{ et } \dot{\lambda} : \dots \dot{\lambda} = 2e\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \dots$$

**B.3.3-** Exprimer, dans la base de  $R_3$ , le vecteur vitesse du point  $G_4$  centre de  $(S_4)$  :  $\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)$  (la boule  $(S_4)$  est supposée fixe dans  $(S_3)$ ) :

$$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \underbrace{\vec{V}(G_4 \in S_4/S_3)}_{\vec{0}} + \vec{V}(G_4 \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overrightarrow{G_4C} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0) \dots$$

$$\dots \vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3) \dots$$

$$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \dots \dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3) \dots$$

**B.3.4-** Exprimer, dans la base de  $R_3$ , le vecteur accélération du point  $G_4$  centre de  $(S_4)$  :  $\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0)$

$$\dots \vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) = \frac{d\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)}{dt} \Big|_{R_0} = (e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3 \dots$$

$$\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) = \dots (e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3 \dots$$

**B.3.5-** Lorsque la boule  $(S_4)$  atteint la gouttière  $(S_5)$ , son centre  $G_4$  est sur l'axe  $(C, \vec{x}_5)$ . Si on note par  $V_0 = \vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) \cdot \vec{y}_5$  la vitesse initiale de  $G_4$  par rapport à  $(S_5)$ , donner l'expression de  $V_0$  :

$$V_0 = \dots \sqrt{e^2 + c^2} \dot{\beta} \dots$$

**B.4- ETUDE DYNAMIQUE :**

Dans cette partie on suppose que le centre d'inertie  $G$  de  $(S)$  est confondu avec  $D$  ( $\overrightarrow{DG} = \vec{0}$ )  
et que le vérin  $(S_2)$  exerce sur  $(S_3)$  un effort axial au point  $B$  défini par :  $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_3) = F\vec{x}_1$ .

**B.4.1-** Déterminer, en projection sur  $\vec{z}$ , le moment au point  $C$  des efforts extérieurs exercés sur  $(S)$  :

.....

$$\dots\dots\dots \vec{\mathcal{M}}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_C(S_0 \rightarrow S) \cdot \vec{z} + \vec{\mathcal{M}}_C(\bar{g} \rightarrow S) \cdot \vec{z} + \vec{\mathcal{M}}_C(S_2 \rightarrow S) \cdot \vec{z} \dots\dots\dots$$

.....

$$\dots\dots\dots \vec{\mathcal{M}}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \dots\dots\dots$$

.....

$$\dots\dots\dots \vec{\mathcal{M}}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = \dots\dots\dots 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \dots\dots\dots$$

**B.4.2-** Déterminer le moment cinétique au point  $C$  associé au mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(S_0)$  ;

.....

$$\dots\dots\dots \vec{\sigma}_C(S/S_0) = \vec{\sigma}_D(S/S_0) + M\overrightarrow{CD} \wedge \vec{V}(D \in S/S_0) = [I_D(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) + M(-e\vec{y}_3) \wedge e\dot{\beta}\vec{x}_3 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{ou } \vec{\sigma}_C(S/S_0) = [I_C(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) = I_{Cz}\dot{\beta}\vec{z} \text{ car } C \text{ est fixe par rapport à } S_0 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{avec } I_{Cz} = I_{Gz} + Me^2 = I + Me^2 \text{ (Th de Hygens)} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{\sigma}_C(S/S_0) = \dots\dots\dots (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

**B.4.3-** Déterminer le moment dynamique au point  $C$  associé au mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(S_0)$  ;

.....

$$\dots\dots\dots \vec{\delta}_C(S/S_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}_C(S/S_0)}{dt} \right)_{R_0} = (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z} \text{ car } C \text{ est fixe par rapport à } S_0 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{\delta}_C(S/S_0) = \dots\dots\dots (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

**B.4.4-** En appliquant le théorème du moment dynamique, en projection sur  $\vec{z}$ , à  $(S)$  au cours de son mouvement par rapport à  $(R_0)$ , déterminer l'expression permettant de calculer la force  $F$  développée par le vérin  $(S_2)$  en fonction de  $\dot{\lambda}$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\ddot{\beta}$  et des données du problème.

$$\dots\dots\dots R_0 \text{ est supposé galiléen } \Leftrightarrow \vec{\delta}_C(S/S_0) \cdot \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (I + Me^2)\ddot{\beta} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \text{ et } \dot{\lambda} = 2e\dot{\beta}Cos(\beta - \alpha) \dots\dots\dots$$

.....

$$\dots\dots\dots F = \dots\dots\dots \left[ (I + Me^2)\ddot{\beta} + eMgSin\beta \right] \frac{\dot{\beta}}{\dot{\lambda}} \dots\dots\dots$$

**B.5- ETUDE DU MOUVEMENT DE LA BOULE DANS LA GOUTTIERE :**

Une fois transférer, la boule ( $S_4$ ) commence à rouler sans glisser dans la gouttière ( $S_5$ ) à travers un contact ponctuel en deux points  $I$  et  $J$  et sous l'effet d'une adhérence de coefficient  $f$ .

L'action mécanique de contact de la gouttière ( $S_5$ ) sur la boule ( $S_4$ ) aux points  $I$  et  $J$  est définie par les deux torseurs :  $\{T_1(S_5 \rightarrow S_4)\}_I = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_I - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$  et  $\{T_2(S_5 \rightarrow S_4)\}_J = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_J - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_J$

Le moment d'inertie de la boule par rapport à l'axe ( $G_4, \vec{z}$ ) est :  $I_{G_4z} = \frac{2}{5}m_4r^2$ .

**B.5.1-** En se basant sur la condition de roulement sans glissement de ( $S_4$ ) par rapport à ( $S_5$ ), déterminer, en fonction de  $\dot{\phi}$ , le vecteur vitesse du point  $G_4$  centre de ( $S_4$ ) par rapport à ( $R_5$ ) :

$$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \vec{V}(I \in S_4/R_5) + \vec{G_4I} \wedge \vec{\Omega}(S_4/R_5) = -r\vec{n}_I \wedge \dot{\phi}\vec{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\phi}\vec{y}_5 \dots\dots\dots$$

$$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\phi}\vec{y}_5 \dots\dots\dots$$

**B.5.2-** Déterminer l'énergie cinétique de ( $S_4$ ) dans son mouvement par rapport à  $R_5$ ;

$$Ec(S_4/R_5) = \frac{1}{2}(I_{G_4z}\dot{\phi}^2 + m_4\vec{V}^2(G_4 \in S_4/R_5)) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m_4r^2\dot{\phi}^2 + m_4\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2\right) \dots\dots\dots$$

$$Ec(S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{9}{20}m_4r^2\dot{\phi}^2 \dots\dots\dots$$

**B.5.3-** Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur ( $S_4$ ) au cours de son mouvement par rapport à  $R_5$  ;

$$P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \underbrace{P(S_5 \rightarrow S_4/R_5)}_0 + P(\vec{g} \rightarrow S_4/R_5) = m_4\vec{g} \cdot \vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) \dots\dots\dots$$

$$P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{\sqrt{2}}{2}rm_4g \sin\gamma \dot{\phi} \dots\dots\dots$$

$$P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{\sqrt{2}}{2}rm_4g \sin\gamma \dot{\phi} \dots\dots\dots$$



**B.5.4-** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $(S_4)$  au cours de son mouvement par rapport  $R_5$ . En déduire son équation de mouvement.

.....  $R_5$  (fixe par rapport à  $R_0$ ) est supposé galiléen  $\Rightarrow P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{dEc(S_4/R_5)}{dt}$  .....

.....  $\frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \sin \gamma \dot{\phi} = \frac{9}{10} m_4 r^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} \Leftrightarrow 9r\ddot{\phi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Equation de mouvement de  $S_4/R_5$  : .....  $9r\ddot{\phi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Soit  $y$  l'ordonnée du centre d'inertie  $G_4$  de  $(S_4)$  sur l'axe  $(E, \vec{y}_5)$  :  $\overrightarrow{EG_4} = y\vec{y}_5$ . On suppose qu'initialement à  $t = 0$  :  $\phi = 0$ ,  $y = 0$  et  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_0$ .

**B.5.5-** Exprimer l'équation de mouvement de  $(S_4)$  par rapport à  $R_5$  en fonction de  $\ddot{y}$ .

.....  $\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dot{y}\vec{y}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\phi} \vec{y}_5 \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\phi} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \ddot{\phi} \Leftrightarrow \sqrt{2}\ddot{y} = r\ddot{\phi}$  .....

.....  $9\sqrt{2}\ddot{y} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Equation de mouvement de  $S_4/R_5$  : .....  $9\ddot{y} - 5g \sin \gamma = 0$  .....

**B.5.6-** Déterminer le paramètre de position  $y(t)$  :

.....  $\ddot{y} = \frac{5}{9} g \sin \gamma \Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + C_1$  or pout  $t = 0, \dot{y} = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0$  .....

.....  $\Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + V_0$  .....

.....  $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t + C_2$  or pout  $t = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$  .....

$y(t) = \dots y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t$  .....

**B.5.4-** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $(S_4)$  au cours de son mouvement par rapport  $R_5$ . En déduire son équation de mouvement.

.....  $R_5$  (fixe par rapport à  $R_0$ ) est supposé galiléen  $\Rightarrow P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{dEc(S_4/R_5)}{dt}$  .....

.....  $\frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \sin \gamma \dot{\varphi} = \frac{9}{10} m_4 r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \Leftrightarrow 9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Equation de mouvement de  $S_4/R_5$  : .....  $9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Soit  $y$  l'ordonnée du centre d'inertie  $G_4$  de  $(S_4)$  sur l'axe  $(E, \vec{y}_5)$  :  $\overrightarrow{EG_4} = y\vec{y}_5$ . On suppose qu'initialement à  $t = 0$  :  $\varphi = 0$ ,  $y = 0$  et  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_0$ .

**B.5.5-** Exprimer l'équation de mouvement de  $(S_4)$  par rapport à  $R_5$  en fonction de  $\ddot{y}$ .

.....  $\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dot{y}\vec{y}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\varphi} \vec{y}_5 \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\varphi} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \ddot{\varphi} \Leftrightarrow \sqrt{2}\ddot{y} = r\ddot{\varphi}$  .....

.....  $9\sqrt{2}\ddot{y} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$  .....

Equation de mouvement de  $S_4/R_5$  : .....  $9\ddot{y} - 5g \sin \gamma = 0$  .....

**B.5.6-** Déterminer le paramètre de position  $y(t)$  :

.....  $\ddot{y} = \frac{5}{9} g \sin \gamma \Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + C_1$  or pout  $t = 0, \dot{y} = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0$  .....

.....  $\Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + V_0$  .....

.....  $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t + C_2$  or pout  $t = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$  .....

$y(t) = \dots y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t$  .....

**B.5.7-** En appliquant le théorème de la résultante dynamique à  $(S_4)$  au cours de son mouvement par rapport  $R_5$ , exprimer, en fonction de  $m_4$ ,  $g$  et  $\gamma$ , les efforts tangentiel et normal (T et N) exercés par la gouttière  $(S_5)$  sur la boule  $(S_4)$  :

.....  $R_5$  est supposé galiléen  $\Rightarrow \vec{R}(\vec{S}_4 \rightarrow S_4) = m_4 \vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/R_5) = m_4 \ddot{y} \vec{y}_5$  .....

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}N - m_4 g \cos \gamma = 0 \quad (1) \\ m_4 g \sin \gamma - 2T = m_4 \ddot{y} \quad (2) \end{array} \right. \quad \text{..... et } \ddot{y} = \frac{5}{9} g \sin \gamma \quad \text{.....}$$

$$N = \dots \frac{1}{\sqrt{2}} m_4 g \cos \gamma \dots$$

$$T = \dots \frac{2}{9} m_4 g \sin \gamma \dots$$

**B.5.8-** En se basant sur la loi de Coulomb relative au roulement sans glissement, déterminer la valeur maximale de l'angle  $\gamma$  pour que  $(S_4)$  roule sans glisser sur la gouttière  $(S_5)$  :

$$\text{..... Roulement sans glissement} \Leftrightarrow \|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \frac{2}{9} m_4 g \sin \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} f m_4 g \cos \gamma \quad \text{.....}$$

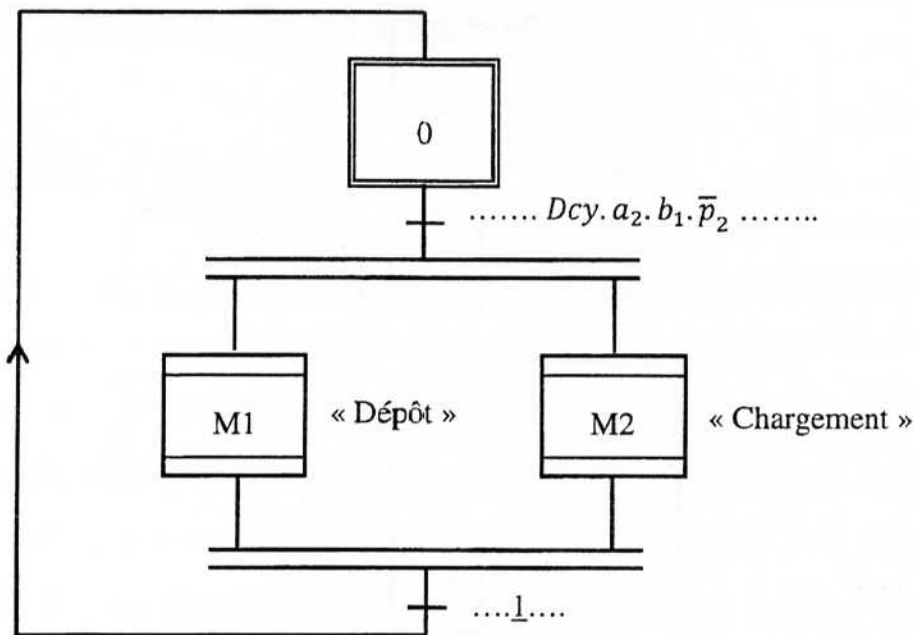
$$\text{..... } \tan \gamma \leq \frac{9}{2\sqrt{2}} f \quad \text{.....}$$

$$\tan \gamma \leq \dots \frac{9}{2\sqrt{2}} f \quad \text{.....}$$

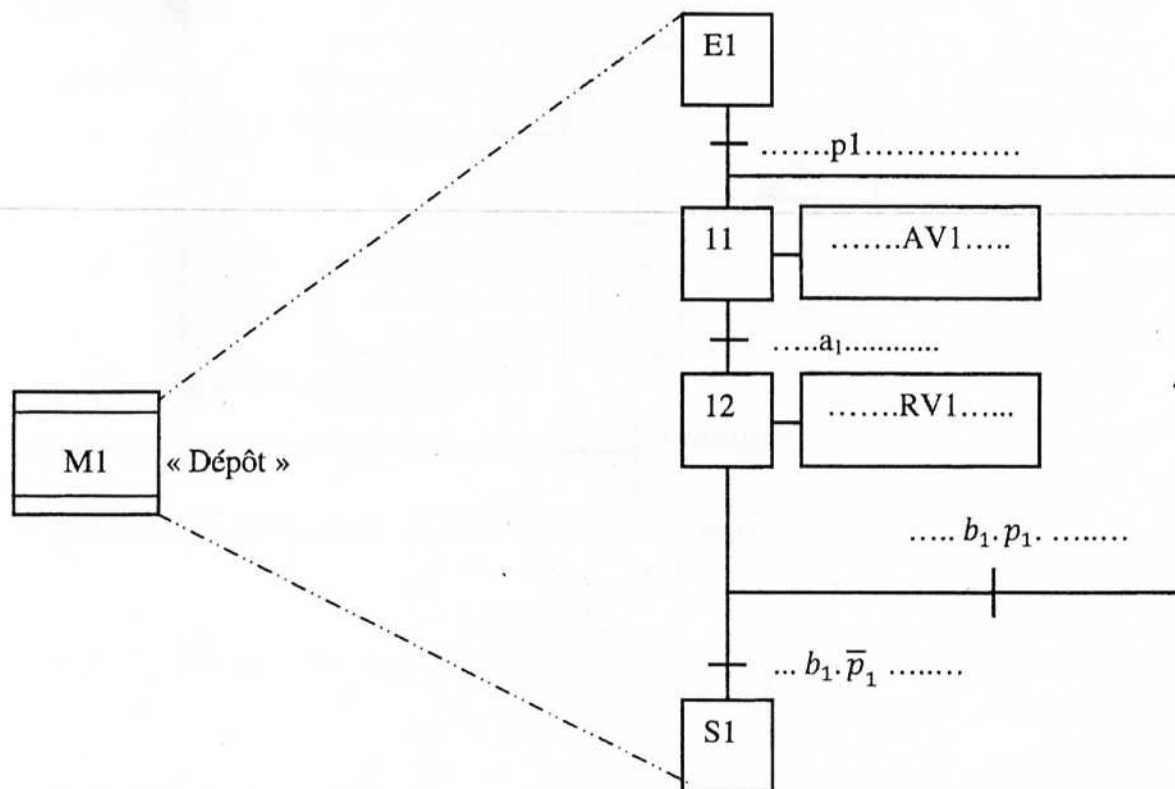
## PARTIE C - AUTOMATIQUE

## C.1- Commande séquentielle du poste de transfert des boules :

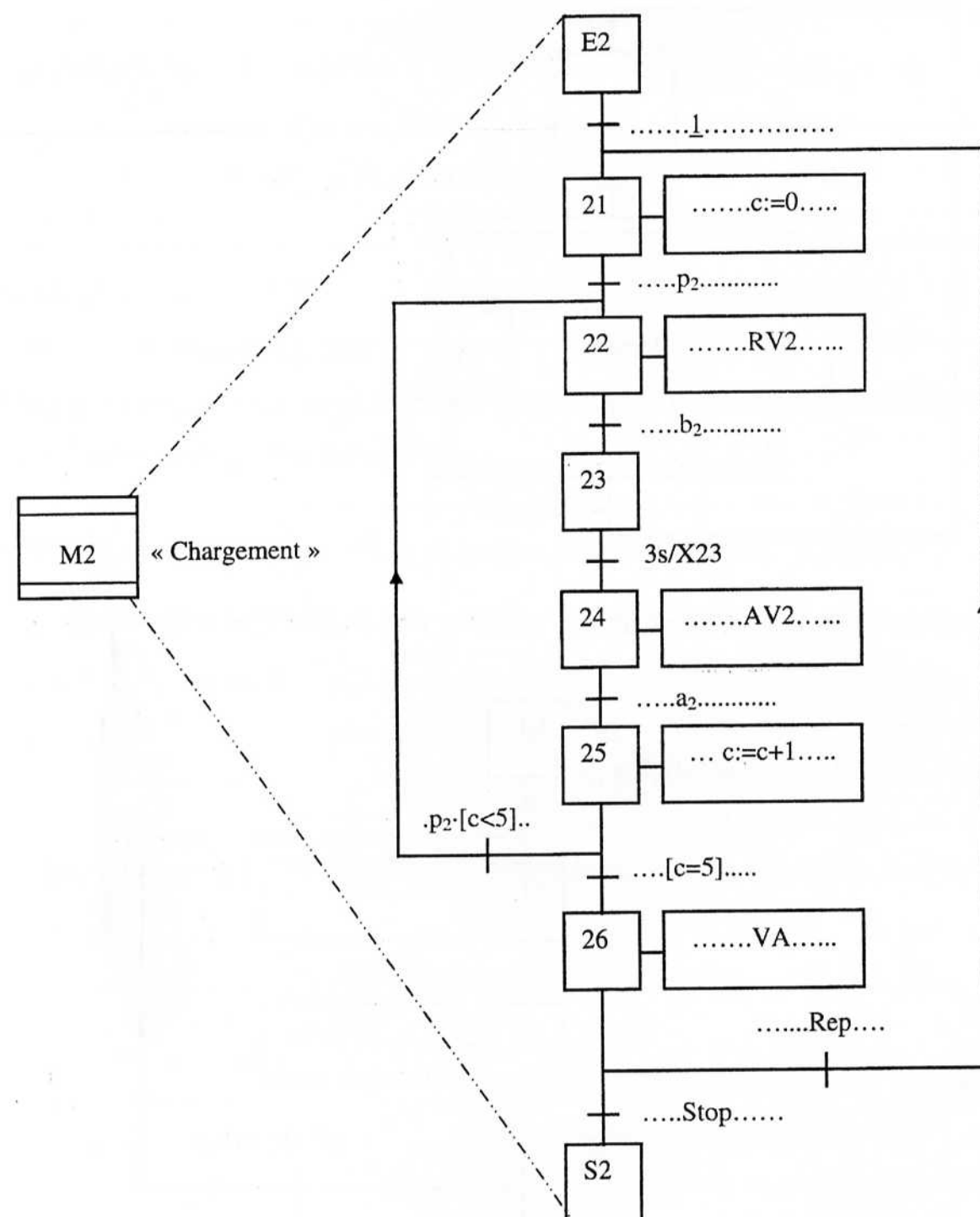
C.1.1- Compléter le GRAFCET suivant qui décrit le fonctionnement du système de transfert:



C.1.2- Compléter l'expansion de la macro-étape M1 « Dépôt » dont la structure est donnée ci-dessous:



**C.1.3- Compléter** l'expansion de la macro-étape M2 « Chargement » dont la structure est donnée ci-dessous:



## C.2- REGULATION DE LA TEMPERATURE DU FOUR TUNNEL :

### Premier cas : régulateur proportionnel avec retour unitaire

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \quad C_2(p) = 1$$

Dans ce cas, on suppose que la perturbation est nulle :  $l(t) = 0$ .

**C.2.1- Donner** l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$  (la mettre sous la forme canonique standard d'un système de premier ordre  $\frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$ ). **Exprimer** le gain statique  $k_{BF}$  et la constante de temps  $\tau_{BF}$  en fonction de  $k_r$ ,  $k$  et  $\tau$  avec  $k = k_1 \cdot k_2$ .

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1+C_1(p)H(p)} = \frac{\frac{kk_r}{1+kk_r}}{1+\frac{\tau}{1+kk_r}p} = \frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$$

Par identification, on obtient :  $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$  et  $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$

**C.2.2- Donner** l'expression de l'erreur statique ( $e_s$ ) sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude  $y_{c1}$ .

$$E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = (1 - H_{BF}(p))Y_{ref}(p)$$

$$E(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p) \quad \text{et} \quad Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$$

L'erreur statique est donnée par :  $e_s = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \frac{1}{1+kk_r}y_{c1}$

**C.2.3- Donner** l'expression de la valeur initiale du signal de commande sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude  $y_{c1}$ .

$$U(p) = k_r E(p) \quad \text{d'où} \quad U(p) = \frac{k_r}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p) \quad \text{et} \quad Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$$

La valeur initiale est donnée par :  $u(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pU(p) = k_r y_{c1}$

**C.2.4-** On fixe  $k_r$  de façon à limiter la valeur initiale de la commande à (+ 10 V). Sachant que  $y_{c1} = 8 \text{ V}$ , **Donner** les valeurs de  $k_r$ ,  $k_{BF}$ ,  $\tau_{BF}$  et de l'erreur statique  $e_s$ . **En déduire** la valeur de la température  $\theta$  dans le four en régime permanent.

..... On a:  $u(0) = k_r y_{c1}$ ,  $k = k_1 k_2 = 1$ ,  $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$ ,  $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$ ,  $e_s = \frac{1}{1+kk_r} y_{c1}$ .....

.....  $k_r = 1.25$   $k_{BF} = 0.555$   $\tau_{BF} = 160 \text{ s}$   $e_s = 3.555 \text{ V}$ .....

.....  $e_s = y_{c1} - y_{\infty}$  donc  $y_{\infty} = y_{c1} - e_s = 4.444 \text{ V}$   $\theta = \frac{y_{\infty}}{0.02} = 222.222 \text{ }^\circ\text{C}$  .....

**Deuxième cas : régulateur proportionnel avec retour non unitaire**

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \quad C_2(p) = \lambda$$

**C.2.5-** On suppose que :  $l(t) = 0$ .

**C.2.5.1-** **Donner** la nouvelle expression de l'erreur statique dans le cas où le signal de référence est un échelon de position d'amplitude  $y_{c1}$ . **Donner** l'expression du paramètre  $\lambda$  permettant d'annuler l'erreur statique de position.

.....  $E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = Y_{ref}(p) - \frac{H_{BF}(p) Y_{ref}(p)}{\lambda C_1(p) H(p) E(p)}$ .....

.....  $E(p) = \frac{1 + (\lambda - 1) C_1(p) H(p)}{1 + \lambda C_1(p) H(p)} Y_{ref}(p)$  et  $Y_{ref}(p) = \frac{1}{p} y_{c1}$ .....

..... L'erreur statique est donnée par :  $e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \frac{1 + (\lambda - 1) k k_r}{1 + \lambda k k_r} y_{c1}$ .....

..... L'erreur statique est nulle lorsque :  $\lambda = \frac{k k_r - 1}{k k_r}$  .....

**C.2.5.2-** **Donner** l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée pour la valeur de  $\lambda$  calculée dans la question précédente. **Donner** la valeur de la constante de temps du système en boucle fermée sachant que  $k_r = 1,25$ .

.....  $H_{BF}(p) = \frac{C_1(p) H(p)}{1 + C_1(p) C_2(p) H(p)} = \frac{\frac{k k_r}{1 + \lambda k k_r}}{1 + \frac{\tau}{1 + \lambda k k_r} p}$ .....

..... Pour la valeur de :  $\lambda = \frac{k k_r - 1}{k k_r}$ , on obtient :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{k k_r} p}$ .....

.....  $\tau_{BF} = \frac{\tau}{k k_r}$  .....  $\tau_{BF} = 288 \text{ s}$  .....

**C.2.6-** On suppose que  $l(t) \neq 0$ . La perturbation est de type échelon de position.

**C.2.6.1-** En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} :$$

$$Y(p) = H(p)U(p) + L(p) = -C_1(p)C_2(p)H(p)Y(p) + L(p)$$

$$\text{Soit } (1 + C_1(p)C_2(p)H(p))Y(p) = L(p)$$

$$\text{Ce qui conduit à } Y(p) = \frac{1}{1 + C_1(p)C_2(p)H(p)} L(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1 + C_1(p)C_2(p)H(p)}$$

$$F(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \lambda k k_r + \tau p}$$

**C.2.6.2-** Calculer la valeur finale de la sortie  $y(t)$  sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V,  $k_r = 1,25$  et  $\lambda$  est la valeur assurant une erreur statique nulle.

$$y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)L(p) \Leftrightarrow y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1 + \tau p}{1 + \lambda k k_r + \tau p} \frac{1}{p}$$

$$y_\infty = \frac{1}{1 + \lambda k k_r}$$

$$\text{On remplace } \lambda \text{ par sa valeur assurant une erreur statique nulle, on obtient : } y_\infty = \frac{1}{k k_r}$$

$$y_\infty = \frac{1}{1.25} = 0.8 \text{ V}$$

**3ème Cas : régulateur proportionnel intégral avec retour unitaire**

$$C_1(p) = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \quad \text{et} \quad C_2(p) = 1$$

**C.2.7-** On suppose que  $l(t) = 0$ .

**C.2.7.1-** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$ .

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1 + C_1(p)H(p)} = \frac{k k_r (1 + T_i p)}{T_i \tau p^2 + T_i (1 + k k_r) p + k k_r}$$



**C.2.7.2-** On pose:  $x = kk_r$ , **Donner** l'expression de dénominateur  $D(p)$  de  $H_{BF}(p)$  en fonction de  $x$ ,  $T_i$  et  $\tau$ . **Donner**, selon la nature de la réponse du système en boucle fermée (réponse apériodique ou réponse pseudo-périodique), la relation entre les paramètres  $x$ ,  $T_i$  et  $\tau$ .

.....  $D(p) = T_i \tau p^2 + T_i(1 + kk_r)p + kk_r = T_i \tau p^2 + T_i(1 + x)p + x$  .....

..... Le discriminant est donné par :  $\Delta(p) = T_i^2(1 + x)^2 - 4T_i \tau x$  .....

..... Réponse apériodique :  $\Delta(p) \geq 0 : \frac{\tau}{T_i} \leq \frac{(1+x)^2}{4x}$  .....

..... Réponse pseudo périodique :  $\Delta(p) < 0 : \frac{\tau}{T_i} > \frac{(1+x)^2}{4x}$  .....

.....

**C.2.8-** On suppose que  $l(t) \neq 0$ . La perturbation est de type échelon de position.

**C.2.8.1-** En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)}.$$

.....

.....  $Y(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)} L(p) \Leftrightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}$  .....

.....  $F(p) = \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i \tau p^2 + T_i(1+kk_r)p + kk_r}$  .....

.....

**C.2.8.2-** Calculer la valeur finale de la sortie  $y(t)$  sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V.

.....

.....  $y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)L(p)$  .....

.....  $y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i \tau p^2 + T_i(1+kk_r)p + kk_r} \frac{1}{p}$  .....

.....  $y_\infty = 0$  .....

**C.2.9-** Comparer les performances des régulateurs étudiés.

.....

..... **Régulateur proportionnel** : erreur statique non nulle, dynamique rapide.....

..... **Régulateur proportionnel avec retour non unitaire** : erreur statique nulle, dynamique lente, n'élimine pas l'effet de la perturbation. ....

..... **Régulateur proportionnel intégral** : erreur statique nulle, la dynamique dépend des paramètres du régulateur, élimine l'effet de la perturbation. ....

.....