

### Problème I

#### MESURE DE DEBIT DANS UNE CANALISATION

1<sup>ère</sup> Partie : Débitmètre de Venturi (15/100)

Q	Réponse	Barème
1-a)	Appliquons l'équation de la statique des fluides dans le mercure entre les points A et B : $p_A + \rho_m g z_A = p_B + \rho_m g z_B$ ; on a $z_B - z_A = h$ $\Rightarrow p_A - p_B = \rho_m g h$ .	1,5
1-b)	Appliquons l'équation de la statique des fluides dans le fluide entre : les points A et A' : $p_A + \rho_f g z_A = p_{A'} + \rho_f g z_{A'}$ avec $p_{A'} = p_1$ les points B et B' : $p_B + \rho_f g z_B = p_{B'} + \rho_f g z_{B'}$ avec $p_{B'} = p_2$ on a $z_{B'} - z_{A'} = \frac{D-d}{2} \Rightarrow p_A - p_B = p_1 - p_2 + \rho_f g \left[ h - \left( \frac{D-d}{2} \right) \right]$ .	1,5
1-c)	$p_1 - p_2 = g h (\rho_m - \rho_f) + \rho_f g \left( \frac{D-d}{2} \right)$ .	1
2-	L'écoulement est incompressible donc on a conservation du débit volumique d'où : $v_1 \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 = v_2 \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow v_1 D^2 = v_2 d^2$ .	2
3-a)	Equation d'Euler : $\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho g z)$ . Le fluide est uniforme ; l'écoulement stationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et on a $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$ . L'équation d'Euler s'écrit : $\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ . Intégrons cette équation le long d'une ligne de courant : $\int \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) \cdot \overrightarrow{dl} + \int (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \Rightarrow \int d \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = 0$ $\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C^{te}$ le long d'une ligne de courant.	1         2
3-b)	Appliquons la relation de Bernoulli le long de la ligne centrale du tube de Venturi entre les points appartenant aux sections 1 et 2 : $\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_f} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_f} + g z_2$ ; on a $z_1 = z_2$ et $v_2 = v_1 \left( \frac{D}{d} \right)^2 \Rightarrow$ $p_1 - p_2 = \frac{\rho_f}{2} v_1^2 \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]$ .	2

4-	$g h(\rho_m - \rho_f) + \rho_f g \left( \frac{D-d}{2} \right) = \frac{\rho_f}{2} v_1^2 \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right] \Rightarrow$ $v_1^2 = \frac{2 g h(\rho_m - \rho_f) + \rho_f g (D-d)}{\rho_f \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]}$ <p>Le débit volumique dans la canalisation est <math>Q_v = v_1 \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \Rightarrow</math></p> $Q_v = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2 g h(\rho_m - \rho_f) + \rho_f g (D-d)}{\rho_f \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]}}$	2
5-	$Q_v = 0,67 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .	1
6-	Le rétrécissement du tube de Venturi au niveau du col fait apparaître des frottements ce qui met en cause le modèle du fluide parfait et donc de l'application de la relation de Bernoulli.	1

## 2<sup>ème</sup> Partie : Débitmètre électromagnétique (25/100)

1-a)	<p>Invariance de l'écoulement par rotation autour de l'axe (Oz) donc <math>p</math> et <math>\vec{v}</math> sont indépendant de <math>\theta</math>.</p> <p>L'écoulement est incompressible <math>\Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0</math> avec <math>(\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_z)</math> d'où</p> <p><math>\frac{\partial v}{\partial z} = 0</math> donc <math>\vec{v}</math> ne dépend que de <math>r</math>.</p>	1 1
1-b)	<p><math>\eta \Delta \vec{v}</math> : densité volumique des forces de viscosité.</p> <p><math>\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}</math> : accélération locale.</p> <p><math>(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}</math> : accélération convective.</p> <p>Écoulement stationnaire <math>\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}</math>.</p> <p><math>\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_z \Rightarrow (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \left( v(r) \frac{\partial}{\partial z} \right) (v(r) \vec{u}_z) = \vec{0}</math>.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
1-c)	<p>On a : <math>\overrightarrow{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z</math> et <math>\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z</math>.</p> <p>Projection de l'équation de Navier Stokes sur <math>\vec{u}_r</math> : <math>\frac{\partial p}{\partial r} = 0</math> donc <math>p</math> ne dépend que de <math>z</math>.</p> <p>Projection de l'équation de Navier Stokes sur <math>\vec{u}_z</math> : <math>\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)</math>,</p> <p>cette équation n'existe que si <math>\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = C^{te} = K \Rightarrow</math></p> <p><math>\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta}</math>.</p>	1 2

1-d)	$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) = \frac{K}{\eta} r \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{K}{2\eta} r + \frac{C_1}{r} \Rightarrow v(r) = \frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$ <p>On prend <math>C_1 = 0</math> pour que <math>v</math> ne diverge pas lorsque <math>r \rightarrow 0</math>.</p> <p>Le fluide étant visqueux il adhère à la paroi d'où <math>v(r=a) = 0 \Rightarrow</math></p> $C_2 = -\frac{K}{4\eta} a^2 \text{ d'où } v(r) = -\frac{K}{4\eta} (a^2 - r^2) \Rightarrow v_0 = -\frac{K}{4\eta}.$	1 0,5 0,5 1
1-e)	$Q_v = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = v_0 \int_0^{2\pi} d\theta \left[ a^2 \int_0^a r dr - \int_0^a r^3 dr \right] \Rightarrow Q_v = \frac{\pi}{2} v_0 a^4.$	2
2-a)	Le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ représente l'effet Hall.	1
2-b)	<p>En régime stationnaire l'équation de conservation de la charge s'écrit :</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \\ \vec{j} &= \gamma (-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \\ \Delta V &= \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V = \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$ <p><math>\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = v_0 B_0 (a^2 - r^2) \vec{u}_y</math> avec <math>\vec{u}_y = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta \Rightarrow</math></p> $\Delta V = -2 v_0 B_0 r \sin \theta.$	0,5 0,5 0,5 1
2-c)	$\frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} f(r) (-\sin \theta) = -2 v_0 B_0 r \sin \theta \Rightarrow$ $\frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d}{dr} \left( \frac{df}{dr} \right) + d \left( \frac{1}{r} \right) f(r) = -2 v_0 B_0 r \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( \frac{f(r)}{r} + \frac{df}{dr} \right) = -2 v_0 B_0 r.$	1,5
2-d)	$\left( \frac{f(r)}{r} + \frac{df}{dr} = -v_0 B_0 r^2 + C \right) \times r \Rightarrow \frac{d}{dr} (r f(r)) = -v_0 B_0 r^3 + C r \Rightarrow$ $f(r) = -\frac{v_0 B_0}{4} r^3 + \frac{C}{2} r + \frac{C'}{r} \Rightarrow V(r, \theta) = \left( -\frac{v_0 B_0}{4} r^3 + \frac{C}{2} r + \frac{C'}{r} \right) \sin \theta$ <p>On prend <math>C' = 0</math> pour que <math>V</math> ne diverge pas lorsque <math>r \rightarrow 0 \Rightarrow</math></p> $V(r, \theta) = \left( -\frac{v_0 B_0}{4} r^3 + \frac{C}{2} r \right) \sin \theta.$	1 1 1
2-e)	<p>Le tube est isolant donc le courant ne traverse pas le tube <math>\Rightarrow</math></p> $\left. \begin{aligned} j_r(r=a) &= \vec{j}(r=a) \cdot \vec{u}_r = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{u}_r &= \gamma \left[ -\frac{\partial V}{\partial r} + v_0 B_0 (a^2 - r^2) \sin \theta \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} \Big _{r=a} = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{2} v_0 B_0 a^2$	1 1
2-f)	$V(r, \theta) = \frac{v_0 B_0}{4} (-r^3 + 3 a^2 r) \sin \theta$ $\left. \begin{aligned} V_A - V_B &= V(r=a, \theta=\frac{\pi}{2}) - V(r=a, \theta=-\frac{\pi}{2}) = v_0 B_0 a^3 \\ Q_v &= \frac{\pi}{2} v_0 a^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{2 B_0}{\pi a} Q_v$	0,5 1
2-g)	$Q_v = \frac{\pi a}{2 B_0} (V_A - V_B) = 0,785 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$	1

**Problème II**  
**DIFFUSION RAYLEIGH ATMOSPHERIQUE**

**1<sup>ère</sup> Partie : Rayonnement émis par un dipôle (19,5/100)**

1-a)	$a \ll \lambda \Rightarrow \frac{a}{T} \ll \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v \ll c.$	1
1-b)	$a \ll \lambda$ : Approximation dipolaire : le calcul du champ électromagnétique se fait en un point M éloigné du dipôle. $\lambda \ll r$ : zone de rayonnement : le champ électromagnétique est reçu au point M après un retard dû à la propagation.	1 1
1-c)	$\vec{p}(t) = q z(t) \vec{u}_z \Rightarrow \vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec $p_0 = q a$	2
2-a)	Le plan $\Pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution $\Rightarrow$ $\vec{E} \in \Pi \Rightarrow \vec{E}(M, t) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$ avec $E_r \ll E_\theta$ ; $\vec{B} \perp \Pi \Rightarrow \vec{B}(M, t) = B_\phi \vec{u}_\phi.$	1 1
2-b)	$t - \frac{r}{c}$ : terme de propagation donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des ondes progressives qui se propage selon $+\vec{u}_r$ avec la vitesse c.	1
2-c)	Globalement cette onde n'est ni plane ni sphérique mais localement, c.à.d. au voisinage de M, elle a la structure d'une onde plane se propageant dans le vide, en effet : • La surface d'onde $r = C^{te}$ est assimilée a un plan a voisinage de M • Au voisinage de M $r = C^{te}$ et $\theta = C^{te}$ donc l'amplitude est uniforme • la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$ est vérifiée.	1 2
2-d)	$M \in (Oz) \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \vec{E}(M, t) = \vec{0}.$ $M \in (xOy) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(M, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 p(t - \frac{r}{c})}{dt^2} \frac{1}{r} \vec{u}_z.$ Le rayonnement dipolaire est anisotrope.	1 1,5 1
3-a)	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_\theta^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\omega(t - \frac{r}{c})) \vec{u}_r.$ $\ \vec{\Pi}(M, t)\  = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}.$	2 1
3-b)	$P_r = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \iint \ \langle \vec{\Pi} \rangle\  r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}.$	2

1-		1,5
2-		1,5
3-a)	$\begin{vmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi(t)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi(t)) \end{vmatrix}$ <p>OPPM non polarisée      OPPM polarisée rectilignement selon <math>\vec{u}_y</math>      OPPM polarisée rectilignement selon <math>\vec{u}_z</math></p>	1,5
3-b)	<p>L'OPPM non polarisée induit un dipôle oscillant <math>\vec{p}(t) = \vec{p}_y(t) + \vec{p}_z(t)</math> d'où le champ rayonné par <math>\vec{p}(t)</math> est <math>\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2</math>.</p> <p>A partir de la lumière non polarisée du soleil on obtient une lumière diffusée polarisée rectilignement dans les directions orthogonales à celle du soleil.</p>	0,5 1,5 1
3-c)	Lorsqu'on tourne l'axe du polariseur l'intensité transmise ne varie pas en effet dans cette direction la lumière diffusée est non polarisée.	1
3-d)	Lorsqu'on tourne l'axe du polariseur l'intensité transmise passe par un maximum et un minimum nul décalé de $\pi/2$ en effet dans cette direction la lumière diffusée est polarisée rectilignement.	2

1-a)	$-m_e \omega_0^2 \vec{r}_e$ : force de rappel élastique qui modélise l'action exercée par les noyaux et les autres électrons de la molécule sur l'électron.	1,5
1-b)	$-\frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}_e}{dt}$ : force de frottement visqueux qui modélise l'amortissement des oscillations de l'électron dû à l'énergie rayonnée par le dipôle oscillant induit par l'action du champ incident.	1,5
2-a)	$\ \vec{r}_e\  \ll \lambda \Rightarrow v_e \ll c \Rightarrow \frac{\ \vec{F}_m\ }{\ \vec{F}_e\ } = \frac{v_e \ \vec{B}\ }{\ \vec{E}\ } = \frac{v_e}{c} \ll 1.$	1
2-b)	$\ \vec{r}_e\  \ll \lambda$ : c'est l'approximation des régimes quasi-stationnaire c.à.d. on néglige le retard dû à la propagation d'où $\vec{E}$ est uniforme à l'échelle du déplacement de l'électron.	1
3-a)	L'équation différentielle étant linéaire on peut remplacer les grandeurs réelles dans l'équation par leurs grandeurs complexes associées. $m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}_e - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}_e}{dt} - e \vec{E} \Rightarrow \vec{r}_e = \frac{-e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \vec{E}.$	1 2
3-b)	$\vec{p}(t) = N e(-\vec{r}_e) \Rightarrow \vec{p}(t) = \frac{N e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ d'où l'amplitude complexe est : $\underline{p}_0 = \frac{N e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} E_0.$	2 1
4-a)	$P_d = \frac{ \underline{p}_0 ^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow P_d = \frac{N^2 e^4 E_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3 m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}.$	2
4-b)	$\ \langle \vec{\Pi}_l \rangle\  = \left\  \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \right\  = \frac{\epsilon_0 E_0^2 c}{2} \Rightarrow$ $P_d = \frac{N^2 e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \ \langle \vec{\Pi}_l \rangle\ .$	1 2
5-a)	$\omega \simeq 310^{15} \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \simeq 5,7 \cdot 10^{-2} \ll 1$ et $\frac{\omega^2}{\tau^2} \simeq 9 \cdot 10^{48} \ll \omega_0^4 \simeq 10^{64}.$	1 1
5-b)	$\frac{P_{d_B}}{P_{d_R}} = \left( \frac{\omega_B}{\omega_R} \right)^4 = 16$ : La puissance diffusée est 16 fois plus intense dans le bleu que dans le rouge ce qui explique la couleur bleu du ciel.	1 1
6-a)	$dP_d = n S dx P_d \Rightarrow dP_d = \frac{n N^2 e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \Pi(x) S dx.$	2

6-b)	$P_i(x) = dP_d + P_i(x+dx) \text{ avec } P_i(x) = \Pi(x)S \Rightarrow \frac{d\Pi(x)}{dx} + \frac{\Pi(x)}{L} = 0 \text{ avec}$ $L = \frac{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega_0^4}{n N^2 e^4 \omega^4} \text{ et } \Pi(x) = \Pi(0) e^{-x/L}.$	<p>1</p> <p>2</p>
6-c)	$L_R = 1196 \text{ km} ; L_B = 74 \text{ km}.$ $L_R \gg L_B$ : Plus la lumière avance dans l'atmosphère plus elle s'appauvrit en bleu.	<p>1    1</p> <p>1</p>
6-d)	<p>Au coucher le soleil apparait rouge en effet un rayon direct émis du soleil traverse une grande épaisseur d'atmosphère donc il s'appauvrit en bleu et le rayon reçu par l'observateur est rouge.</p> <p>En plein jour le soleil apparait jaune orange en effet un rayon directe émis du soleil traverse une épaisseur d'atmosphère moins importante qu'au coucher d'où la couleur du soleil.</p>	<p>1</p> <p>1</p>