REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours Technologie

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H **Date :** 10 Juin 2005 **Heure :** 8 H **Nb pages :** 4

Barème : Exercice : 4 pts. Problème (I : 3 pts. II : 5 pts. III : 5 pts . IV : 3pts.)

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = Log(1+x) \ . \qquad (*)$$

1/ Donner le développement en série entière de $Log(1+x)$ sur $]-1,1[$.
2/ Déterminer une solution de l' équation différentielle (*) , développable en série entière sur $]-1,1[$.

3/ a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$.

b) Calculer la fonction somme de cette série entière.

4/ Résoudre l'équation homogène associée à (*) sur $]0,1[$.
Indication : on cherchera une base de solutions sous la forme de $x \longrightarrow x^r$.
5/ En déduire toutes les solutions de (*) sur $]0,1[$.

Problème

Soit E le **C**-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur **R** à valeurs dans **C**. Soit a un réel strictement positif. A toute fonction f de E, on fait correspondre la fonction $\varphi_a(f)$ définie sur **R** par la relation :

$$\varphi_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x-t)dt.$$

Partie I

1/ Démontrer que pour toute fonction f de E, la fonction $\varphi_a(f)$ est aussi définie par les relations :

$$\varphi_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x+s)ds$$

$$\varphi_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(u)du.$$

2/ Démontrer que si f est paire alors $\varphi_a(f)$ est paire et que si f est impaire alors $\varphi_a(f)$ est impaire.

3/ Déterminer les fonctions $\varphi_a(f)$, $\varphi_a(g)$, $\varphi_a(h)$ et $\varphi_a(k)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = x$.

b) $g(x) = e^x$.

c) $h(x) = \sin x$.

d) $k(x) = \sqrt{|x|}$.

4/ a) Montrer que si f est une fonction de E, périodique de période $2T$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\int_{x-T}^{x+T} f(t)dt = \int_{-T}^{T} f(t)dt.$

b) Donner $\varphi_a(f)$ lorsque f est une fonction de E, périodique de période $2a$.

5/ a) Démontrer que la fonction $\varphi_a(f)$ est continûment dérivable et calculer $(\varphi_a(f))'(x)$.

b) En déduire que si f de classe C^n alors $\varphi_a(f)$ est de classe C^{n+1}.

Partie II

1/ a) Démontrer que l'application $\varphi_a : f \longrightarrow \varphi_a(f)$ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau $Ker(\varphi_a)$ de cet endomorphisme.

2/ On désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à l'entier naturel n.

a) Pour $0 \le p \le n$, on pose $u_p(x) = x^p$. Montrer que $\varphi_a(u_p)$ est une fonction polynôme de degré exactement égal à p. Quel est son terme du plus haut degré ?

b) En déduire que $\mathcal{P}_n$ est stable par φ_a.

3/ Soit $M_a = (m_{i,j}(a))_{1 \le i,j \le n+1}$ la matrice associée à la restriction de φ_a au sous-espace $\mathcal{P}_n$ dans la base canonique $\{1, X, X^2, \ldots\ldots\ldots, X^n\}$.

a) Ecrire M_a pour $n = 2$ puis pour $n = 3$.

Dans le reste de cette partie, n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

b) Démontrer que M_a est une matrice triangulaire.

c) Déterminer les éléments diagonaux de M_a.

d) Déterminer les valeurs propres de la matrice M_a.

4/ Calculer le coefficient $m_{i,i+2}(a)$, $1 \le i \le n-1$, de la matrice M.

5/ a) Démontrer que le rang de la matrice $M_a - I_{n+1}$ est égal à $n-1$ où I_{n+1} est la matrice unité d'ordre $n+1$.

b) En déduire la dimension du noyau de la restriction de $(\varphi_a - id)$ au sous-espace $\mathcal{P}_n$, où id désigne l'application identique de E.

6/ a) Vérifier que le sous-espace $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}_n$ est invariant par φ_a.

b) Existe-t-il des fonctions polynômes de degré strictement supérieur à 1 invariantes par φ_a ?

7/ On désigne par $\mathcal{P}$ le sous-espace de E formé des fonctions polynômes.

a) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par φ_a.

b) Montrer que la restriction de φ_a au sous-espace $\mathcal{P}$ est un automorphisme.

c) Préciser l'ensemble des valeurs propres de la restriction de φ_a au sous-espace $\mathcal{P}$.

Partie III

Dans le reste de ce problème, on désigne par D le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions 2π – périodiques.

1/ Montrer que l'application $\varphi_a : f \longrightarrow \varphi_a(f)$ est un endomorphisme de D.

2/ Pour f et g dans D, on pose :

$$(f / g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)dt.$$

Montrer que $(\varphi_a(f) / g) = (f / \varphi_a(g))$.

3/ On rappelle que le coefficient de Fourier de f est défini par :

$$c_n(f) = (e_n / f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} dt\ , n \in \mathbf{Z},$$

avec $e_n(x) = e^{inx}$.

a) Calculer $\varphi_a(e_n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

b) Montrer que $c_n(\varphi_a(f)) = \begin{cases} c_n(f)\ , & si\ n = 0 \\ \dfrac{\sin na}{na} c_n(f), & si\ n \neq 0. \end{cases}$

4/ a) Montrer que pour tout $n \neq 0$, on a :

$$|c_n(\varphi_a(f))| \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\right).$$

b) En déduire que la série de Fourier de $\varphi_a(f)$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.

5/ Soit g la fonction 2π – périodique, impaire, définie sur $[0,\pi]$ par :

$$g(x) = x(\pi - x)$$

a) Déterminer la série de Fourier de la fonction g.

b) En déduire la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}.$$

6/ a) Déterminer la fonction $\varphi_a(g)$ en supposant que le réel a est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer la série de Fourier de $\varphi_{\frac{\pi}{2}}(g)$.

Partie IV

On pose pour $r \in]0,1[$ et $x \in \mathbf{R}$:

$$A_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

1/ a) Montrer que la fonction $x \longrightarrow A_r(x)$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$A_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

b) Vérifier que $A_r \in$ D, $A_r \geq 0$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_r(t)dt = 1$.

2/ Si $f \in$ D, on pose :

$$P_r(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} c_n(f) e^{inx}.$$

a) Montrer que $x \longrightarrow P_r(f)(x)$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et que $P_r(f) \in$ D.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$P_r(f)\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)A_r(t)dt.$$

c) En utilisant l'uniforme continuité de $f \in$ D et les résultats précédents, montrer que :

$$\lim_{r \to 1^-}\left[\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_r(f)(x) - f(x)|\right] = 0.$$