Correction du Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques
Session : Juin 2005

Exercice

1. $\forall x \in]-1,1[\ , Log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

---

2. Si la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \geq 1$ et si sa fonction somme

   $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de (*) sur $]-1,1[$ alors y est C^∞ sur $]-1,1[$ et

   $\forall x \in]-1,1[$:

   $x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$

   $4xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n x^n$

   $2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n$

   $Log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

   Donc :

   $2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2+3n+2)a_n - \frac{(-1)^{n-1}}{n}] x^n = 0.$

   On en déduit que :

   $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$ est solution de (*) sur $]-1,1[$.

---

3. a) La règle d' Alembert permet de conclure que le rayon de convergence est 1.

---

b) On a : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$

Les trois séries entières de terme général respectivement $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$, $-\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ et $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)}$ ont $R = 1$ pour rayon de convergence.

Donc $\forall x \in]-1, 1[$, $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)} x^n$

De plus $\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} x^n = \frac{1}{2} Log (1 + x)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \frac{1}{x} (Log (1 + x) - \mathrm{x})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)} x^n = \frac{1}{2x^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \frac{1}{2x^2} (Log (1 + x) - x + \frac{x^2}{2})$$

On en déduit que $\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2} Log (1 + x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$$

On sait, d'autre part, que $y(0) = a_0 = 0$ et que y est C^∞ sur $]-1, 1[$.

Il en découle que :

$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2} Log (1 + x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \quad \forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \text{ et } y(0) = 0.$$

---

4. Notons (H) l'équation homogène associée à (*) :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (\mathrm{H})$$

Le coefficient de y'' s'annule en 0. Donc l'ensemble des solutions de (H) sur $]0, 1[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $x \to x^r$ est solution de (H) si et seulement si : $r (r - 1) + 4 r + 2 = 0$

Donc les fonctions $x \to \dfrac{1}{x}$ et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont solutions de (H) sur $]0, 1[$.

---

5. Connaissons les solutions de (H) et une solution particulière de (*), on peut conclure que les solutions de (*) sur $]0, 1[$ sont de la forme :

$$x \to \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{(x+1)^2}{2x^2} Log (1 + x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \text{ avec } a, b \in R.$$

Problème

Partie I

1/ - On pose $s=-t$, on obtient le résultat.
- On pose $u=x+s$ dans la deuxième formule (ou bien $u=x-t$ dans la première formule).

2/ - Si f est paire : Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a :

$$\varphi_a(f)(-x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(-x-t)dt=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x+t)dt=\varphi_a(f)(x)$$, donc $\varphi_a(f)$ est paire.

- Si f est impaire : Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a :

$$\varphi_a(f)(-x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(-x-t)dt=\frac{-1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x+t)dt=-\varphi_a(f)(x)$$, donc $\varphi_a(f)$ est impaire.

3/ a) $f(x)=x$, dans ce cas $\varphi_a(f)(x)=x$, donc $\varphi_a(f)=f$.

---

b) $g(x)=e^x$, dans ce cas $\varphi_a(g)(x)=\dfrac{sha}{a}e^x$, donc $\varphi_a(g)=\dfrac{sha}{a}g$.

---

c) $h(x)=\sin x$, dans ce cas $\varphi_a(h)(x)=\dfrac{\sin a}{a}\sin x$, donc $\varphi_a(h)=\dfrac{sha}{a}h$.

---

d) $k(x)=\sqrt{|x|}$, dans cet exemple on remarque que k est paire t donc d'après 2/ $\varphi_a(k)$ est aussi paire, il suffit alors de calculer $\varphi_a(k)(x)$ pour $x\ge 0$. Dans ce cas , on trouve :

$$\varphi_a(k)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3a}\left[(x+a)^{3/2}-(x-a)^{3/2}\right], & \text{si } x\ge a\\ \dfrac{1}{3a}\left[(x+a)^{3/2}+(a-x)^{3/2}\right], & \text{si } 0\le x\le a\end{cases}$$

4/ a) On peut par exemple voir $\int_{x-T}^{x+T}f(t)\,dt=\int_{x-T}^{-T}f(t)\,dt+\int_{-T}^{T}f(t)\,dt+\int_{T}^{x+T}f(t)\,dt$,

on a : $\int_{x-T}^{-T}f(t)dt\overset{u=t+2T}{=}-\int_{T}^{x+T}f(u)\,du$, ce qui donne le résultat ; ou bien on peut poser

$\Phi(x)=\int_{x-T}^{x+T}f(t)dt$, Φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbf{R}$:

$\Phi'(x)=f(x+T)-f(x-T)=0$, car f est $2T-$périodique, par conséquent

Φ est constante : $\Phi(x)=\Phi(0)=\int_{-T}^{T} f(t)\,dt$.

---

b) Si f est $2a-$périodique alors, d'après a), on a : pour tout $x\in\mathbf{R}$,
$\varphi_a(f)(x)=\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t)dt$, et donc $\varphi_a(f)$ est constante.

5/ a) Comme f est continue sur $\mathbf{R}$, soit $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ une primitive de f, F est de classe C^1 et sa dérivée est f et on a $\varphi_a(f)(x)=\dfrac{1}{2a}[F(x+a)-F(x-a)]$, donc :
$(\varphi_a(f))'(x)=\dfrac{1}{2a}[F'(x+a)-F'(x-a)]=\dfrac{1}{2a}[f(x+a)-f(x-a)]$.

---

b) Si f est de classe C^n alors F est de classe C^{n+1} et $\varphi_a(f)$ est de classe C^{n+1}.

Partie II

1/ a) Il est clair que $\varphi_a : f \longrightarrow \varphi_a(f)$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale), de plus pour tout f dans E, $\varphi_a(f)$ est dans E, donc φ_a est un endomorphisme de E.

---

b) $Ker\,(\varphi_a)=\left\{f\in E \text{ tel que } f \text{ est } 2a-\text{périodique et } \int_{-a}^{a} f(t)dt=0\right\}$.

2/ a) Pour $0\le p\le n$,
$$\begin{aligned}\varphi_a\,(u_p)(x)&=\frac{1}{2a(p+1)}[(x+a)^{p+1}-(x-a)^{p+1}]\\&=\frac{1}{2a(p+1)}[\sum_{k=0}^{p+1}C_{p+1}^{k}\,x^{p+1-k}(a^k-(-a)^k)]\\&=\frac{1}{a(p+1)}(\sum_{0\le 2j+1\le p+1}C_{p+1}^{2j+1}\,a^{2j+1}x^{p-2j})\end{aligned}$$
De cette expression, on conclut que $\varphi_a(u_p)$ est une fonction polynôme de degré exactement égal à p, le coefficient de x^p est 1 (il correspond au terme de la somme pour $j=0$).

---

b) C'est une conséquence immédiate de I. 2/ a).

3/ a) Pour $n=2$, on a $M_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et pour $n=3$, on a $M_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

b) Le coefficient $(m_{i,j}(a))$ est nul dés que $i > j$, car $\varphi_a(u_j) = \varphi_a(x^j)$ est un polynôme de degré égal à j. Donc la matrice M_a est triangulaire supérieure.

---

c) Les coefficients sur la diagonale sont tous égaux à 1.

---

d) La matrice M_a est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, donc elle possède une seule valeur propre égale à 1.

4/ On a : $\varphi_a(x^{i+2}) = \dfrac{1}{a(i+3)}\Big(\sum\limits_{0 \le 2j+1 \le i+3} C_{i+3}^{2j+1} a^{2j+1} x^{i+2-2j}\Big)$.

Donc le coefficient $m_{i,i+2}(a) = \dfrac{(i+1)(i+2)a^2}{6}$.

5/ a) Puisque les deux premières colonnes de $M_a - I_{n-1}$ sont nulles, le rang de cette matrice est $r \le n-1$, d'autre part, en supprimant les deux premières colonnes et les deux dernières lignes, la matrice obtenue est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$, ses éléments diagonaux sont $m_{i,i+2}(a), 1 \le i \le n-1$, qui sont tous non nuls, son déterminant $\prod\limits_{1 \le i \le n+2} m_{i,i+2}(a) \ne 0$, d'où le rang est $r = n-1$.

---

b) On sait que $\dim Ker(\varphi_a - id) + rg(\varphi_a - id) = \dim \mathcal{P}_n = n+1$,
ce qui donne $\dim Ker(\varphi_a - id) = 2$.

6/ a) Le sous espace $\mathcal{P}_1$ est engendré par $u_0 = 1$ et $u_1 = x$, on a $\varphi_a(u_0) = u_0$ et $\varphi_a(u_1) = u_1$ donc $\mathcal{P}_1$ est invariant par φ_a.

---

b) D'après II. 5/ b) et II. 6/ a) il n'existe pas de fonctions polynômes de degré strictement supérieur à 1 invariantes par φ_a.

7/ a) D'après ce qui précède si f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi_a(f)$ est une fonction polynôme de même degré : donc $\mathcal{P}$ est stable par φ_a.

---

b) - Soit $f \in Ker(\varphi_a)$, avec $\deg(f) \leq n$, alors $f \in \mathcal{P}_n$. Comme la restriction de φ_a à $\mathcal{P}_n$ est injective alors $f = 0$. Ainsi la restriction de φ_a à $\mathcal{P}$ est injective.

- Soit $g \in \mathcal{P}$, avec $\deg(g) \leq n$, alors $g \in \mathcal{P}_n$. Comme la restriction de φ_a à $\mathcal{P}_n$ est surjective alors g a un antécédent par cette restriction. Ainsi la restriction de φ_a à $\mathcal{P}$ est surjective.

---

c) Puisqu'on a $\varphi_a(u_1) = u_1$, alors 1 est une valeur propre de la restriction de φ_a à $\mathcal{P}$. D'autre part si $g \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi_a(g) = \lambda g$, il existe $n \in N$ tel que $g \in \mathcal{P}_n$. D'après II.3/ c), $\lambda = 1$. Ainsi, la restriction de φ_a à $\mathcal{P}$ possède une unique valeur propre $\lambda = 1$.

Partie III

1/ Dans la formule $\varphi_a(f)(x) = \dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x-t)dt$, on voit que si f est 2π – périodique alors $\varphi_a(f)$ est aussi 2π – périodique. Donc D est stable par φ_a et comme on sait déjà que φ_a est linéaire alors φ_a est un endomorphisme de D.

2/ D'après le théorème de Fubini, on a :

$$(\varphi_a(f)/g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_a(f)(t)}g(t)dt = \frac{1}{4a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-a}^{a}\overline{f(t+s)}ds\right)g(t)dt = \frac{1}{4a\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t+s)}g(t)dt\right)ds$$

En posant $u = t+s$, en utilisant II. 4/ a) et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\varphi_a(f)/g) &= \frac{1}{4a\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t+s)}g(t)dt\right)ds \\
&\overset{u=t+s}{=} \frac{1}{4a\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi+s}^{\pi+s}\overline{f(u)}g(u-s)du\right)ds \\
&= \frac{1}{4a\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(u)}\,g(u-s)du\right)ds \\
&\overset{Fubini}{=} \frac{1}{4a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(u)}\left(\int_{-a}^{a}g(u-s)ds\right)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(u)}\varphi_a(g)(u)du \\
&= (f/\varphi_a(g)).
\end{aligned}$$

3/ a) $\varphi_a(e_n)=\begin{cases} e_n \ , \ si\ n=0 \\ \dfrac{\sin na}{na}e_n \ , \ n\neq 0. \end{cases}$

---

b) On a $c_n(\varphi_a(f))=(e_n/\varphi_a(f))=(\varphi_a(e_n)/f)=\begin{cases} c_n(f)\ , \ si\ \ n=0 \\ \dfrac{\sin na}{na}c_n(f),\ si\ n\neq 0. \end{cases}$

4/ a) Pour tout $n\neq 0$, en majorant $|\sin na|$ par 1 et en utilisant l'inégalité $2\alpha\beta\leq\alpha^2+\beta^2$ avec $\alpha=\dfrac{1}{n}$ et $\beta=|c_n(f)|$, on obtient :

$$|c_n(\varphi_a(f))|\leq\frac{1}{2a}(\frac{1}{n^2}+|c_n(f)|^2).$$

---

b) La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est évidemment convergente, le théorème de Parseval assure que la série de terme général $|c_n(f)|^2$ est convergente. L'inégalité précédente permet alors de conclure que la série de Fourier de $\varphi_a(f)$ est normalement convergente et par suite elle est uniformément convergente sur **R** .

5/ a) La fonction g est impaire , on a : $c_0(g)=0$ et

$$\begin{aligned} c_n(g)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-\mathrm{int}}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0}g(t)e^{-\mathrm{int}}dt+\int_0^{\pi}g(t)e^{-\mathrm{int}}dt) \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}g(t)(e^{-\mathrm{int}}-e^{\mathrm{int}})dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}-2i\sin nt g(t)dt \\ &=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)\sin nt dt. \end{aligned}$$

Deux intégrations par parties permettent de trouver :

$$c_n(g)=\frac{-2i}{\pi n^3}[1-(-1)^n]=\begin{cases} 0\ , \ si\ \ n\ est\ pair \\ \dfrac{-4i}{\pi n^3}\ , \ si\ \ n\ est\ \ impair. \end{cases}$$

La série de Fourier de g est

$$\sum_{n\in Z} c_n(g)e^{inx} = \sum_{\substack{n\in Z\\ n\,impair}} \frac{-4i}{\pi n^3}e^{inx} = \sum_{p\geq 0}\frac{-4i}{\pi(2p+1)^3}e^{i(2p+1)x} + \sum_{p\geq 0}\frac{4i}{\pi(2p+1)^3}e^{-i(2p+1)x}.$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)x.$$

La fonction g est impaire, on aurait pu calculer les coefficients trigonométriques de Fourrier et trouver directement sa série de Fourier en série de sinus $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$ avec

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$.

---

b) La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, elle appartient à D , d'après III. 4/ b) sa série de Fourier est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. En particulier :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ g(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)x.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

La formule de Parseval donne : $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

6/ a) La fonction g est impaire , d'après I-2/ la fonction $\varphi_a(g)$ est aussi impaire. On va donner $\varphi_a(g)(x)$ pour $x\geq 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$.

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}}(g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{x+\pi/2} g(u)du.$$

- Si $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\pi}{2}}(g)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{0} g(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x+\pi/2} g(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2-x} g(-u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x+\pi/2} g(u)\,du \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2-x} g(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x+\pi/2} g(u)\,du \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2-x} u(\pi-u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x+\pi/2} u(\pi-u)\,du \\
&= x\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3\pi}x^2\right).
\end{aligned}$$

- Si $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\pi}{2}}(g)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{\pi} g(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{x+\pi/2} g(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{\pi} g(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x-\pi/2} g(v+\pi)\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{\pi} g(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x-\pi/2} g(v-\pi)\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{\pi} g(u)\,du - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x-\pi/2} g(\pi-v)\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi/2}^{\pi} u(\pi-u)\,du - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x-\pi/2} v(\pi-v)\,dv \\
&= \frac{2}{3\pi}x^3-2x^2+\frac{3}{2}\pi x-\frac{1}{6}\pi^2.
\end{aligned}$$

---

b) D'après III. 3/ b) la série de Fourier de $\varphi_{\frac{\pi}{2}}(g)(x)$ est :

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{p\ge 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)x.$$

Partie IV

1/ a) On a $\left|r^{|n|}e^{inx}\right| = r^{|n|}$, comme $0<r<1$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{inx}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbf{R}$, ce qui prouve que la fonction $x \longrightarrow A_r(x)$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} A_r(x) &= \sum_{n\le -1} r^{|n|}e^{inx} + 1 + \sum_{n\ge 1} r^n e^{inx} \\ &= 1 + \sum_{n\ge 1} r^n e^{-inx} + \sum_{n\ge 1} r^n e^{inx} \\ &= 1 + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} + \frac{re^{ix}}{1-re^{ix}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}.$$

---

b) Il est clair que $A_r \in \mathrm{D}$, $A_r \ge 0$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{\text{int}}\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}dt = 1.$$

La permutation entre intégrale et série est justifiée par la convergence normale.

2/ a) Puisque $f \in \mathrm{D}$, $(|c_n(f)|)$ est bornée et le raisonnement précédent permet de conclure que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}c_n(f)e^{inx}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbf{R}$, ce qui prouve que $x \longrightarrow P_r(f)(x)$ est bien définie et que $P_r(f) \in \mathrm{D}$.

---

b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P_r(f)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}c_n(f)e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt\Big)e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(x-t)}\Big)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)A_r(x-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)A_r(t)dt. \end{aligned}$$

---

c) En utilisant $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_r(t)dt = 1$, on peut écrire :

$$P_r(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))A_r(t)dt.$$

f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ tel que si $|x - x'| \leq \alpha$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.

Donc si $|t| \leq \alpha$, (on peut supposer que $\alpha < \pi$), alors $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

$$|P_r(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt \quad \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\alpha}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt +$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt.$$

On a : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt \leq \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$\lim_{r \to 1^-} A_r(t) = 0$, pour tout $t \in [\alpha, \pi]$, donc il existe $0 < r_0 < 1$ tel que si $r_0 < r < 1$,
$0 \leq A_r(t) \leq \varepsilon$.
ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt \quad \leq \quad \|f\|_\infty \varepsilon$$

Un raisonnement analogue permet d'obtenir que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\alpha}|f(x-t) - f(x)|A_r(t)dt \leq \|f\|_\infty \varepsilon$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{r \to 1^-}\Big[\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_r(f)(x) - f(x)|\Big] = 0$$