

Exercice 1

1. Principe de Huyghens-Fresnel : tout élément de surface dS centré en un point P de l'ouverture diffractante et recevant une onde se comporte comme une **source secondaire** émettant une onde sphérique.

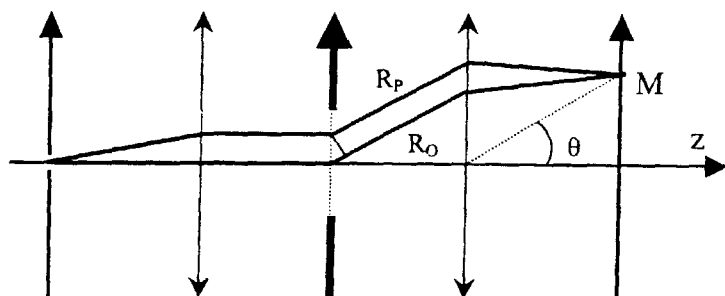
1

Les sources secondaires sont **cohérentes** et au point M les amplitudes s'ajoutent.

2. Les rayons envoyés par l'objet sur le système optique sont peu inclinés par rapport à l'axe optique (rayons paraxiaux).

0,5

3.



1

4. Au point M , la différence de marche s'écrit : $\delta = (F_0PM) - (F_0OM) = -x \sin\theta \approx -x \theta$.

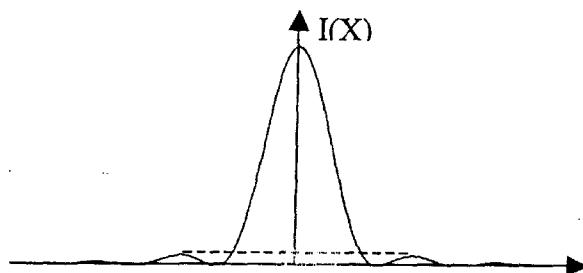
1

$$5. A(M) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp[i \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)] dx = a A_0 \left[\frac{\sin(\frac{\pi a X}{\lambda f})}{\frac{\pi a X}{\lambda f}} \right] \cdot I(X) = I_0 \left[\frac{\sin(\frac{\pi a X}{\lambda f})}{\frac{\pi a X}{\lambda f}} \right]^2$$

2

I_0 désigne l'intensité diffractée au point E : c'est à dire dans la direction de l'onde incidente.

6.



1

$$X_1 \approx \frac{3}{2} \frac{\lambda f}{a} \text{ est : } I_1 = I_0 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ soit } I_1 = 0,045 I_0.$$

7.a. La figure de diffraction n'est pas modifiée lors d'une translation de la fente diffractante F .

1

7.b. toute la figure de diffraction se translate alors de la même distance b mais dans le sens contraire de celui de la fente source.

1

7.c. Lorsqu'on ferme petit à petit la fente, la tache centrale et les taches secondaires s'étalent selon OX ($\Delta X \nearrow$).

Par contre, lorsqu'on ouvre la fente F la figure de diffraction se rétrécit.

Cas limites :

- $a \rightarrow \infty$, $\Delta X \rightarrow 0$: On retrouve, dans ce cas, l'approximation de l'optique géométrique, réalisée quand la taille des ouvertures est très grande devant la longueur d'onde.
- $a \rightarrow 0$, $\Delta X \rightarrow \infty$: la lumière est envoyée dans toutes les directions (de manière isotrope) dans le demi-espace après la fente.

1,5

3 pts

Exercice 2

0,5

1.a. La densité volumique de courant est nulle ($\vec{J} = \vec{0}$).

1.b. * $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \vec{0}$.

- V est constant à l'intérieur du conducteur:
- $\rho = 0$. Le conducteur peut porter des charges en surface.
- $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$, où \vec{n} est la normale sortant du conducteur.

1

2. $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \text{div} [E(r) \vec{u}_r] = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d(r^2 E)}{dr} = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{A}{r^2} \vec{u}_r, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

1

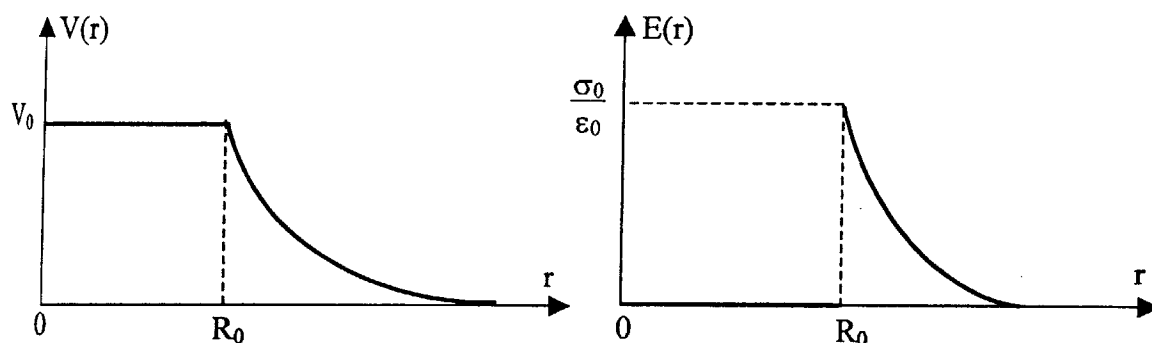
3. Au voisinage de la surface du conducteur ($r = R_0$), le champ électrique est donné par le théorème de Coulomb : $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_r$.

$$\frac{A}{R^2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \text{ et } Q_0 = \sigma_0 4\pi R^2, \text{ on obtient : } A = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}.$$

1

4. Pour $r < R$, $E = 0$ et $V = V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_0}$.

Pour $r > R$, $E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ et $V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$.



1

5.a. Les deux surfaces en regard (de rayons R_1 et R_0) sont en influence totale : la sphère de rayon R_1 portera alors la charge $-Q_0$.

0,5

5.b. Le condensateur est formé par :

- Une armature intérieure : sphère de rayon R_0 .
- Une armature externe : sphère de rayon R_1 .
- Le domaine séparant les deux faces.

0,5

5.c. Pour $r > R_2$: $E = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ $V = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$.

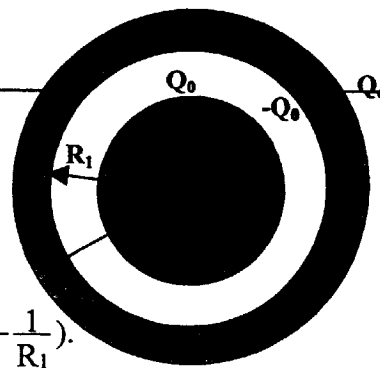
La continuité du potentiel en $r = R_2$: $Q_e = 0$.

Conclusion : $Q(r = R_0) = Q_0$; $Q(r = R_1) = -Q_0$; $Q(r = R_2) = Q_e = 0$.

Entre les deux armatures ($R_0 < r < R_1$), le champ électrique s'écrit :

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \text{ (théorème de Gauss). Le potentiel s'écrit } V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Le potentiel V' du premier conducteur est $V' = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_0 R_1}{R_1 - R_0}$.



1

6. L'énergie stockée par le condensateur (entre ses armatures) s'écrit : $E_p = \iiint_{\text{entre les armatures}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$.	1
$\Rightarrow E_p = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q_0^2}{2C} = W_0$	
7.a. Après coupure de la liaison avec le sol, les deux conducteurs deviennent isolés de l'extérieur et conserveront une charge totale constante : $Q_t = Q_0 - Q_0 = 0$. Le fil conducteur, reliant les deux conducteurs, assure une ddp nulle. Le condensateur est donc déchargé ($Q_{\text{armature}} = CU = 0$) et la sphère de rayon R_2 n'est pas chargée (puisque la charge totale est nulle).	1
7.b. Puisque le champ électrique est nul en tout point de l'espace, l'énergie électrique W_1 est nulle dans cet état d'équilibre.	0,5
7.c. $W_0 = W_{\text{Joule}} + W_1$.	0,5
7.d. La durée séparant les deux états est de l'ordre de $\tau = RC$, où R est la résistance du fil. Elle dépend donc de R et C .	0,5

Problème :

Première partie

1. $a \ll R \Rightarrow T(M,t) = T(\theta,t)$.

0,5

2.a. $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(\theta,t) = \vec{J}_{th} = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$.

Puisque $r \approx R$ pour tout point de l'anneau, on a : $\vec{J}_{th} = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$.

0,5

2.b. $\phi_{th} = \vec{J}_{th} \cdot \pi a^2 \vec{u}_\theta = \phi_{th} = -\lambda \frac{\pi a^2}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}$.

0,5

3. $[\phi_{th}(\theta,t) - \phi_{th}(\theta + d\theta, t)] dt = -\frac{\partial \phi_{th}}{\partial \theta} d\theta dt = \lambda \frac{\pi a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta dt = dU = \mu c \pi a^2 R \frac{\partial T}{\partial t} d\theta dt$.

On obtient : $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \tau_0 \frac{\partial T}{\partial t}$, où $\tau_0 = \frac{\mu c}{\lambda} R^2 = 1794 \text{ s} \approx 30 \text{ min}$.

1,5

4.a. $dU_0 = \mu c \pi a^2 R d\theta T_0(\theta)$

0,5

4.b. $U_0 = \mu c \pi a^2 R \int_{-\pi}^{+\pi} T_0(\theta) d\theta = \mu c \pi a^2 2\pi R T_m$

0,5

4.c. $U_\infty = \mu c \pi a^2 2\pi R T_\infty$

0,5

4.d. $\Delta U = U_\infty - U_0 = 0 \Rightarrow T_\infty = T_m$.

0,5

5. $\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\theta^2} = \tau_0 \frac{1}{g} \frac{dg}{dt}$, c'est de la forme : $F(\theta) = G(t)$.

Les variables θ et t sont indépendantes, l'égalité $F(\theta) = G(t)$ ne peut être vérifiée que si chaque membre est constant, notons β cette valeur commune (β est une constante sans unité).

1

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{d\theta^2} - \beta f = 0 & (1) \\ \frac{dg}{dt} - \frac{\beta}{\tau_0} g = 0 & (2) \end{cases}$$

6. $g(t) = g_0 \exp\left(\frac{\beta}{\tau_0} t\right)$

$T(\theta, \infty) = T_\infty = T_m$. Pour satisfaire $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(\theta, t) = 0$, la constante β introduite doit être négative.

1

7. En prenant $\beta = -\alpha^2$, l'équation (1) devient : $\frac{d^2 f}{d\theta^2} - \alpha^2 f(x) = 0$.

Elle admet une solution de la forme : $f(\theta) = A_0 \cos(\alpha\theta) + B_0 \sin(\alpha\theta)$.

1

$\eta(\theta, t) = [A \cos(\alpha\theta) + B \sin(\alpha\theta)] \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\tau_0} t\right)$, où A et B désignent deux constantes.

8. Le profil initial montre que $T_0(\theta)$ est une fonction paire : $T_0(-\theta) = T_0(\theta)$. En raison de symétrie, cette parité de la dépendance de la température en fonction de θ doit être conservée pour $t > 0 \Rightarrow B = 0$.

1

$T(\theta = \pi, t) = T(\theta = -\pi, t) \Rightarrow \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0$.

9.a. $B = 0$; $\eta(\theta, t) = A \cos(\alpha\theta) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\tau_0} t\right)$.

$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0$, donne : $\sin(\alpha\pi) = 0$, ce qui montre que α doit être entier ($\alpha = n$).

0,5

9.b. $\tau_n = \frac{\tau_0}{n^2}$.

0,5

9.c. L'équation de diffusion thermique est linéaire

0,5

10.a. La décomposition d'un signal périodique en série de Fourier est très utile en électronique : effet d'un filtre sur un signal périodique.	0,5
<p>10.b. A l'instant $t = 0$, on peut écrire : $\eta(\theta, 0) = T_0(\theta) - T_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta)$.</p> <p>En multipliant cette équation par $\cos(n\theta)$ et en intégrant sur $[-\pi, \pi]$, on obtient :</p> $\int_{-\pi}^{+\pi} \eta(\theta, 0) \cos(n\theta) d\theta = \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} A_n \cos^2(n\theta) d\theta}_{\pi A_n} + \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{m \neq n} A_m \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta}_0$ <p>On trouve : $A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \eta(\theta, 0) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [T_0(\theta) - T_m] \cos(n\theta) d\theta$.</p>	1
<p>11. $\tau_n = \frac{\tau_0}{n^2}$. Les termes correspondant à $n > 1$ s'amortissent beaucoup plus rapidement que le fondamental ($n = 1$) de constante $\tau_1 = \tau_0$.</p> <p>A un instant t fixé, le rapport entre l'amplitude du terme en $\cos(3\theta)$ et celle du terme en $\cos(\theta)$ s'écrit : $\frac{\frac{1}{9} \exp(-\frac{9}{\tau_0} t)}{\exp(-\frac{1}{\tau_0} t)} = \frac{1}{9} \exp(-\frac{8}{\tau_0} t)$.</p> <p>Au bout d'une minute ce rapport devient très faible (de l'ordre de $8 \cdot 10^{-2}$)</p> <p>Pour $t > t_0 = 1$ min, l'écart s'écrit alors : $\eta(\theta, t) \approx A_1 \exp(-\frac{t}{\tau_0}) \cos(\theta)$.</p>	1
12.a. $dS = \mu c \pi a^2 R d\theta \int_{T_0(\theta)}^{T_m} \frac{dT}{T} = \mu c \pi a^2 R \ln\left(\frac{T_m}{T_0(\theta)}\right) d\theta$.	1
<p>12.b. Pour tout l'anneau, la variation d'entropie s'écrit : $\Delta S = \mu c \pi a^2 R \int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left(\frac{T_m}{T_0(\theta)}\right) d\theta$.</p> <p>$\Delta S = S^C$: La transformation est irréversible.</p>	1
<p>Deuxième partie</p> <p>1. $\phi_{th}(\theta) - \phi_{th}(\theta + d\theta) = -\frac{d\phi_{th}}{d\theta} d\theta = \lambda \frac{\pi a^2}{R} \frac{d^2 T_0(\theta)}{d\theta^2} d\theta = d\phi_{cc} = h [T_0(\theta) - T_a] 2\pi a R d\theta$.</p> <p>On aboutit à l'équation : $\frac{d^2 T_0}{d\theta^2} = \frac{R^2}{L^2} (T_0(\theta) - T_a)$, avec $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} = 28,2$ cm.</p>	1,5
<p>2. La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $T_0(\theta)$ est de la forme :</p> <p>$T_0(\theta) = T_a + \xi_1 \operatorname{ch}\left(\frac{R}{L} \theta\right) + \xi_2 \operatorname{sh}\left(\frac{R}{L} \theta\right)$, avec ξ_1 et ξ_2 sont deux constantes.</p> <p>En écrivant $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=\pi R} = 0$ et que la température en $\theta = 0$ vaut $T_0(0)$, on trouve :</p> $\xi_1 = T_0(0) - T_a \text{ et } \xi_2 = (T_0(0) - T_a) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi R}{L}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi R}{L}\right)}$	1,5
<p>a. $\mathcal{R} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2} = \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{R(\pi - \theta_2 + \pi/4)}{L}\right] + \operatorname{ch}\left[\frac{R(\pi - \theta_2 - \pi/4)}{L}\right]}{\operatorname{ch}\left[\frac{R(\pi - \theta_2)}{L}\right]} = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi R}{4L}\right)$.</p>	1
<p>est en accord avec la constatation de Fourier puisque \mathcal{R} est indépendant de $T_0(0)$ et de θ_2.</p> <p>b. $\mathcal{R}_{théorique} = 2,31$; $\mathcal{R}_{expérimental} = 2,36$: le modèle théorique proposé par de Fourier est très satisfaisant.</p>	1