REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche Scientifique et
de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles
de formation d'ingénieurs
Session 2007

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours Technologie

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H **Date : 4 Juin 2007** **Heure : 8 H** **Nb pages : 4**

Barème : Exercice : 7 pts Problème : (I : 2 pts. II : 3 pts. III : 4 pts IV : 4 pts)

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soit n un entier naturel strictement positif, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-x\cos t)^n}\,dt.$$

1/ Montrer que f_n est définie sur $]-1,1[$.

2/ Montrer que pour $x \in \,]-1,1[$, on a $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3/ Montrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $]-1,1[$. Donner l'expression de $f_n'(x)$.

4/ a) Montrer que pour tout $x \in \,]-1,1[$, on a la relation suivante :

$$nf_{n+1}(x) = xf_n'(x) + nf_n(x).$$

b) Calculer f_2 et f_3.

5/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[\ , \ f_n(x) = \frac{P_n(x^2)}{(1-x^2)^{n-1/2}}.$$

6/ a) En effectuant dans $\int_0^{\pi} \frac{1}{(1-x\cos t)^n} dt$ le changement de variables défini par

$$tg\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, tg\frac{\theta}{2},$$

montrer que

$$P_n(x^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 + x\cos\theta)^{n-1}\, d\theta.$$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta)^k\, d\theta = \begin{cases} 0 \ , & si \ k = 2p+1 \\ \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \ , & si \ k = 2p \end{cases}$$

c) En déduire l'expression des polynômes P_{2n} et P_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

7/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n admet le développement en série entière suivant:

$$\forall x \in]-1,1[\ , \ f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+2p-1)!}{(n-1)!(2^p p!)^2}\, x^{2p}.$$

Problème

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, à valeurs réelles. On munit E du produit scalaire :

$$(f/g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Pour $f \in E$, on pose :

- $\|f\|_1 = \int_0^{\pi}|f(x)|dx$
- $\|f\|_2 = \sqrt{(f/f)}$
- $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le\pi}|f(x)|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note s_n et c_n les fonctions définies sur $[0,\pi]$ par :

- $s_n(x) = \sin(nx)$ et
- $c_n(x) = \cos(nx)$.

Partie I

1/ Soit f un élément de E et $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$ la primitive de f sur $[0,\pi]$ qui s'annule en 0.

Montrer que sur l'intervalle $[0,\pi]$, le système suivant : $\begin{cases} y''(x) = -f(x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_0(t)dt. \end{cases}$

admet une solution unique qu'on notera $S(f)$.

2/ Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a :

$$S(f)(x) = -\int_0^x F_0(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi F_0(t)dt.$$

3/ Déterminer $S(f)$ lorsque f est la fonction définie par $f(x) = \pi - x$.

4/ Pout tout entier naturel n , calculer $S(c_n)$.

Partie II

1/ Montrer que $f \to S(f)$ est un endomorphisme de E .

2/ Déterminer son noyau et son image.

3/ Montrer que pour tous f , $g \in$ E , on a :

$$(S(f)/g) = (f/S(g))$$

4/ Soient f , $g \in$ E , des vecteurs propres de S associées à des valeurs propres distinctes α et β . Montrer que f et g sont orthogonaux.

Partie III

1/ Soit λ une constante réelle. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\lambda y''(x) + y(x) = 0$$

2/ Déterminer les valeurs propres de S et les sous-espaces propres correspondants .

3/ Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ forme un système orthonormal dans E .

4/ Soit f un élément de E. Pour $N \in$ IN*, on pose : $f_N = \sum_{n=1}^{N}(f/s_n)s_n$.

On désigne par $\hat{f}$ la fonction définie sur IR , 2π −périodique, impaire qui coïncide avec f sur l'intervalle $]0,\pi[$ et vérifiant la condition suivante : en tout point $x \in$ IR

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0^+}(\hat{f}(x+h) + \hat{f}(x-h)\right).$$

Que représente la fonction f_N pour la fonction $\hat{f}$?

5/ Dans cette question, on prend f la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par :

$$f(x) = x(\pi - x).$$

a) Déterminer dans ce cas f_N .

b) Etudier la convergence de la suite $(f_N)_N$.

c) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

d) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$.

Partie IV

1/ Soit f un élément de E. Pour tout $x \in [0,\pi]$, on pose :

$$T(f)(x) = \frac{\pi - x}{\pi}\int_0^x tf(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_x^{\pi}(\pi - t)f(t)dt.$$

a) Calculer $(T(f))'(x)$ puis $(T(f))''(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,\pi]$, $S(f)(x)$ s'écrit sous la forme

$$Sf(x) = \int_0^{\pi} K(x,t)f(t)dt$$

où
$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{t(\pi - x)}{\pi}, & si \quad 0 \le t \le x, \\ \frac{x(\pi - t)}{\pi}, & si \quad 0 \le x < t \le \pi. \end{cases}$$

2/ a) Vérifier que pour tous $x\,, t \in [0,\pi]$, on a : $|K(x,t)| \le \frac{x(\pi - x)}{\pi}$.

b) En déduire que pour $f \in E$, $\|S(f)\|_\infty \le \frac{\pi}{4}\, \|f\|_1$.

3/ a) Calculer $\int_0^{\pi}(K(x,t))^2\, dt$.

b) Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a :

$$|S(f)(x)| \le \frac{x(\pi - x)}{\sqrt{3\pi}}\, \|f\|_2 .$$

c) Conclure que $\|S(f)\|_\infty \le \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{3}}\, \|f\|_2$.