Epreuve de Mathématiques (Technologie)

Corrigé

Exercice

On pose $\varphi(x,t) = \frac{1}{(1-xcost)^n}$.

1/ Si $|x| < 1$, la fonction $t \to \varphi(x,t)$ est continue de IR vers IR , donc l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-xcost)^n} dt$ est bien définie. Par conséquent f_n est définie sur $]-1,1[$.

2/ On a $f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-xcost} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{1-xcost} dt.$

On effectue le changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$, on obtient :

pour tout $x \in]-1,1[$, $f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-x)+(1+x)u^2} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3/ La fonction $(x,t) \to \varphi(x,t) = \frac{1}{(1-xcost)^n}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[\times [0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, f_n est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$ $f_n'(x) = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{cost}{(1-xcost)^{n+1}} dt.$

4/ a) On vérifie immédiatement que $nf_{n+1}(x) = xf_n'(x) + nf_n(x)$.

---

b) En utilisant la relation précédente, on obtient $f_2(x) = (1-x^2)^{-3/2}$

et $f_3(x) = \frac{1}{2}(2+x^2)(1-x^2)^{-3/2}$.

---

5) On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 1$ avec $P_1 = 1$. On suppose qu'elle est vraie à l'ordre n : $f_n(x) = \frac{P_n(x^2)}{(1-x^2)^{n-1/2}}$, en utilisant la relation établie dans 4/ , on trouve que la propriété est vraie à l'ordre $n+1$ avec

$$P_{n+1}(u) = \frac{1}{n}(2u(1-u)P_n'(u) + (n+(n-1)u)P_n(u)).$$

6/ a) Avec le changement de variable suggéré, on a : $cost = \frac{x+cos\theta}{1+xcos\theta}$,

$dt = \sqrt{1-x^2}\frac{d\theta}{1+xcos\theta}$.

Ce qui donne $f_n(x) = (1-x^2)^{-n+1/2} \times \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+xcos\theta)^{n-1}\,d\theta$.

Par suite $P_n(x^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+xcos\theta)^{n-1}\,d\theta$.

---

b) On pose $J_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(cos\theta)^k\,d\theta$. En utilisant une intégration par parties, on obtient la relation de récurrence :

$kJ_k = (k-1)J_{k-2}$. Comme $J_0 = 1$ et $J_1 = 0$, on en déduit que

$$J_k = \begin{cases} 0\ , & si\ k = 2p+1 \\ \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\ , & si\ k = 2p \end{cases}$$

---

b) En développant, on trouve :

$P_n(x^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+xcos\theta)^{n-1}\,d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k J_k x^k$.

En tenant compte du résultat précédent, on trouve

$$P_{2n}(x^2) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{2n-1}^{2p} J_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2n-2p-1)!(2^p p!)^2}x^{2p},$$

$$P_{2n}(x) = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2n-2p-1)!\,(2^p p!)^2}x^p$$

$$P_{2n+1}(x^2) = \sum_{p=0}^{n} C_{2n}^{2p} J_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2n-2p)!\,(2^p p!)^2}x^{2p}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2n-2p)!(2^p p!)^2}x^p.$$

7/ On a $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{(1-xcost)^n}dt$, comme pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $t \in [0,\pi]$, $\frac{1}{(1-xcost)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}(cost)^k x^k$. On en déduit par intégration que $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}J_k x^k$. D'où $f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+2p-1)!}{(n-1)!(2^p p!)^2}x^{2p}$.

Problème

Partie I

....

1/ C'est une question de cours.

....

2/ Un calcul direct donne $S(f)(x) = -\int_0^x F_0(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} F_0(t)dt.$

....

3/ Dans ce cas $S(f)(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi^2 x}{3}.$

....

Partie II

1/ On vérifie que $S(\alpha f + g) = \alpha S(f) + S(g)$.

$Ker(S) = \{0_E\}$.

$Im(S) = \{g \in E \ / \ g \in C^2[0,\pi] \ et \ g(0) = g(\pi) = 0\}$.

....

2/ - Si $n = 0$, $S(c_0)(x) = \frac{\pi x - x^2}{2}$.

- Si $n = \geq 1$, $S(c_n)(x) = \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}x}{\pi n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{x}{\pi n^2}$

....

3/ Soient f , $g \in$ E, on a : $S(f)(x) = -\int_0^x F_0(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} F_0(t)dt$ et

$S(g)(x) = -\int_0^x G_0(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} G_0(t)dt$, où F_0 (resp. G_0) désigne la primitive de f (resp. de g) qui s'annule en 0.

Dans $\int_0^{\pi} S(f)(x)g(x)dx$ on fait l'intégration par parties suivante :

$$u = S(f) \ , \qquad u' = \big(S(f)\big)'$$

$v' = g$, $v = -(S(g))'$ (c'est une primitive de g). Puis une deuxième intégration par parties on trouve que : $(S(f)/g) = (f/S(g))$.

....

4/ Si $S(f) = \alpha f$ et $S(g) = \beta g$, l'égalité $(S(f)/g) = (f/S(g))$ donne

$(\alpha - \beta)\,(f/g) = 0$ d'où $(f/g) = 0$ et par suite f et g sont orthogonaux.

....

Partie III

1/

- Si $\lambda = 0$, on trouve $y = 0$, à rejeter, car une fonction propre est non nulle.
- Si $\lambda > 0$, on trouve $y(x) = A\cos\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x + B\sin\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x$.
- Si $\lambda < 0$, on trouve $y(x) = A\mathrm{ch}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x + B\mathrm{sh}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x$.

2/ Soit λ une valeur propre (réelle) de S associée à la fonction propre y :
$S(y) = \lambda y$.

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda y''(x) + y(x) = 0 \ , \\ y(0) = y(\pi) = 0 \ , \end{cases}$$

car la condition $y'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_0\,(t)dt$ est équivalente à $y(\pi) = 0$.

D'après la question précédente, on a :

- Si $\lambda = 0$, on trouve $y = 0$, à rejeter, car une fonction propre est non nulle.
- Si $\lambda > 0$, on trouve $y(x) = A\cos\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x + B\sin\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x$, la condition $y(0) = 0$

  implique que $A = 0$ et la condition $y(\pi) = 0$ implique que $\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = n$, avec

  $n \in \mathrm{IN}^*$.
- Si $\lambda < 0$, on trouve $y(x) = A\mathrm{ch}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x + B\mathrm{sh}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x$, la condition $y(0) = 0$

  implique que $A = 0$ et la condition $y(\pi) = 0$ implique que $B = 0$, ce qui donne $y = 0$, à rejeter.

Finalement l'ensemble des valeurs propres de S est $\left\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathrm{IN}^*\right\}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{n^2}$ est engendré par la fonction s_n.

....

3/ On vérifie facilement que pour tous $m, n \in \mathrm{IN}^*$.

$(s_m/s_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 1 \ , \ si \ \ m = n \\ 0 \ , \ si \ \ m \neq n \end{cases}$

Donc la suite (s_n) est un système orthonormal.

....

4/ La fonction $\hat{f}$ est une fonction périodique de période 2π , impaire et coïncide avec f sur $[0,\pi]$, $(f/s_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = b_n(f)$ (le coefficient de Fourier de $\hat{f}$). Ainsi, $f_N = \sum_{n=1}^{N}(f/s_n)s_n$ représente la somme partielle de la série de Fourier associée à $\hat{f}$.

....

5/ a) Dans ce cas $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{x}(\pi - x)\sin(nx)dx$.En effectuant deux intégrations par parties, on obtient :

$$b_n(f) = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \ , \ si \ \ n \ est \ pair \\ \dfrac{8}{\pi n^3} \ , \ si \ \ n \ est \ impair \end{cases}$$

....

b) La fonction $\hat{f}$ est continue , sa dérivée est aussi continue donc sa série de Fourier converge en tout point de IR vers $\hat{f}(x)$.

....

c) On a : $\forall\, x \in [0,\pi]$, $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$, en faisant $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

d) La formule de Parseval donne $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

....

Partie IV

1/ a) $Tf(x) = \frac{\pi-x}{\pi}\int_0^x tf(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_x^\pi (\pi - t)f(t)dt.$

$$(Tf)'(x) = \frac{-1}{\pi}\int_0^x tf(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_x^\pi (\pi - t)f(t)dt$$
$$(Tf)''(x) = -f(x).$$

b) On a $(Tf)''(x) = -f(x)$, $(Tf)(0) = (Tf)(\pi) = 0$. D'après l'unicité, on conclut que $S(f) = T(f)$.

....

2/ a) Evident.

b) En remarquant que pour tout $x \in [0,\pi]$, $\left|\frac{x(\pi-x)}{\pi}\right| \leq \frac{\pi}{4}$, il vient :

$\forall f \in E$, $\forall x \in [0,\pi]$, $|S(f)(x)| \leq \frac{\pi}{4}\|f\|_1$.

....

3/ a) $\int_0^\pi (K(x,t))^2\, dt = \frac{(\pi-x)^2}{\pi^2}\int_0^x t^2\, dt + \frac{x^2}{\pi^2}\int_x^\pi (\pi - t)^2\, dt = \frac{x^2(\pi-x)^2}{3\pi}.$

....

b) Montrer que pour $f \in E$ et pour tout $x \in [0,\pi]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$|S(f)(x)| \leq \left(\int_0^\pi (K(x,t))^2\, dt\right)^{1/2} \|f\|_2$$

$$|S(f)(x)| \leq \frac{x(\pi-x)}{\sqrt{3\pi}}\|f\|_2 .$$

....

c) En utilisant la majoration $|x(\pi - x)| \leq \frac{\pi^2}{4}$, on obtient $\|S(f)\|_\infty \leq \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{3}}\|f\|_2$.

....