

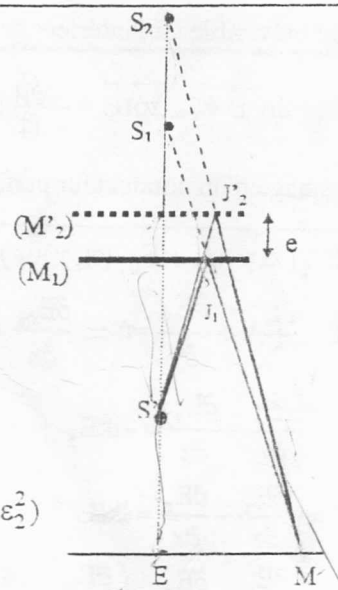
Problème 1:

1	Conducteur en équilibre si le courant volumique est nul ($\vec{j} = \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$; $V = Cte$; charges en surface	2
2	$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}}V_0$; $V_0 = -E_0 z + Cte$; $V_0 = -E_0 r \cos\theta + V_s$	2
3.a	$\Delta V(r, \theta) = 0$	1
3.b	$V(r = R, \theta) = V_s$; $V(r \gg R, \theta) = -E_0 r \cos\theta + V_s$	1
4.a	En écrivant $\Delta V(r, \theta) = 0$ et en divisant par f.g, on obtient : $\frac{1}{f(r)} \left(r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} - 2r \frac{df}{dr} \right) = - \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dg}{d\theta} \right)$. C'est de la forme : $F(r) = G(\theta)$, $\forall(r, \theta) \rightarrow \exists$ une constante β / $F(r) = G(\theta) = \beta$.	1.5
4.b	Pour $r \gg R$, $V \approx -E_0 r \cos\theta + V_s \rightarrow g(\theta) = \cos\theta$. En remplaçant g, on trouve $\beta = 2$.	1
4.c	L'équation différentielle vérifiée par $f(r)$ s'écrit : $r^2 f'' + 2rf' - 2f = 0$. En cherchant des solutions de type r^m , on trouve $m = 1$ ou $m = -2$.	1
4.d	$V(r, \theta) = A + \cos\theta \left(a r + \frac{b}{r^2} \right)$; $V(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos\theta + V_s \rightarrow A = V_s$ et $a = -E_0$ $V(r=R, \theta) = V_s \rightarrow b = -aR^3 = E_0 R^3 \Rightarrow V(r, \theta) = V_s + E_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos\theta$.	1.5
5.a	$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \Rightarrow E_r = E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos\theta$; $E_\theta = E_0 \left(-1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin\theta$	1
5.b	$\vec{E}_0 = E_0 (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{dipôle}}$ avec $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 \vec{u}_z$	2
5.c	$\vec{E}(r=R, \theta) = 3 E_0 \cos\theta \vec{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r \Rightarrow \sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta$	1
5.d	$d\vec{E}_c = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\vec{u}_r)$, or par symétrie \vec{E}_c est suivant (Oz). $dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 \sin\theta d\theta d\phi (\cos\theta)$. Par intégration sur toute la sphère, on trouve $\vec{E}_c = -E_0 \vec{u}_z = -\vec{E}_0$. Résultat prévisible : à l'intérieur de la sphère conductrice en équilibre, $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_0 = \vec{0}$	3
6	$\text{div } \vec{E} = 0$; $\text{div } \vec{B} = 0$; $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Au voisinage d'un conducteur parfait, on a : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \Rightarrow E_T = 0$ et $B_N = 0$.	2
7	$\vec{E} = (E_{0x}(x, y) \vec{u}_x + E_{0y}(x, y) \vec{u}_y) \cdot \exp[i(kz - \omega t)]$; $\vec{B} = (B_{0x}(x, y) \vec{u}_x + B_{0y}(x, y) \vec{u}_y) \cdot \exp[i(kz - \omega t)]$ $\square \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E}_0 = 0$. $\square \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ikE_y \\ ikE_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega B_x \\ i\omega B_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$ Or $\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = \left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) \vec{u}_z \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = \vec{0}$	3
8.a	$\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = \vec{0} \Rightarrow \exists \Psi_0(x, y) / \vec{E}_0 = \vec{\text{grad}} \Psi_0$; $\text{div } \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \Delta \Psi_0 = 0$	1.5
8.b	Condition aux limites : \vec{E}_0 est \perp aux parois du guide ; $\vec{E}_0 = \vec{\text{grad}} \Psi_0 \Rightarrow \vec{E}_0$ est \perp aux surfaces équi Ψ_0 . En tout point des parois du guide Ψ_0 reste alors constante.	1.5
8.c	$\Psi_0 = Cte \Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{0}$: Ce mode (TEM) ne peut pas se propager dans le guide.	1

9.a	$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c} (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z) ; \vec{k}_2 = \frac{\omega}{c} (-\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$	1
9.b	$\vec{E} = E_0 \{ \exp[i \frac{\omega}{c} (x \sin \alpha + z \cos \alpha) - \omega t] + \rho \exp[i \frac{\omega}{c} (-x \sin \alpha + z \cos \alpha) - \omega t] \} \vec{u}_y$ \vec{E} est tangent aux plans $x=0$ et $x=a \Rightarrow \vec{E}(x=0) = \vec{E}(x=a) = \vec{0}$ $\vec{E}(x=0) = E_0 \{ \exp[i \frac{\omega}{c} z \cos \alpha - \omega t] + \rho \exp[i \frac{\omega}{c} z \cos \alpha - \omega t] \} \vec{u}_y = \vec{0}$ Cette équation, écrite pour $z=0$ et $t=0$, donne $\rho = -1$. $\Rightarrow \vec{E} = 2iE_0 \sin(k_0 x \sin \alpha) \exp[i(k_0 z \cos \alpha - \omega t)] \vec{u}_y$, avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$.	2,5
9.c	$\vec{E}(x=a) = \vec{0} \Rightarrow k_0 a \sin \alpha = n\pi ; \sin \alpha = \frac{n\pi c}{a\omega}$	2
10.a	L'onde résultante se propage suivant les z croissants	1
10.b	$k_g = k_0 \cos \alpha ; k_g^2 = k_0^2 \cos^2 \alpha = k_0^2 (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{\omega^2 - \omega_{cm}^2}{c^2}$, avec $\omega_{cm} = \frac{n\pi c}{a}$. La propagation est possible si $k_g^2 > 0$ c'est-à-dire si $\omega > \omega_{cm}$. Le guide ne laisse pas se propager (coupe) les pulsations inférieures à ω_{cm} : pulsation de coupure.	2,5
11	$v_\phi v_g = c^2 ; v_\phi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cm}^2}{\omega^2}}} ; v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{cm}^2}{\omega^2}}$	2
12	$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow B_z = 2 \frac{E_0}{c} \sin \alpha \cos(k_0 x \sin \alpha) \exp[i(k_0 z \cos \alpha - \omega t)]$: la composante de \vec{B} suivant la direction de propagation est non nulle \Rightarrow l'onde n'est pas TM.	2

Problème 2:

1	Diviseurs du front d'onde : les rayons qui interfèrent en M correspondent à deux rayons distincts issus de la source. La source est ponctuelle , on observe alors des interférences non localisées (pas de problème de cohérence spatiale).	1
2	$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = SJ_2 + J_2I_2 + I_2M - SI_1 - I_1J_1 - J_1M$ $\delta = S'J'_2 + J'_2M - S'J_1 - J_1M$ De point de vue différence de marche, on peut considérer la figure ci-contre qui fait apparaître une lame d'air d'épaisseur e .	2
3.a	$\delta = S_2M - S_1M ; S_2E = 2(d+e) + (D-d) = D+d+2e ; S_1E = D+d$ $\delta = \sqrt{(D+d)^2 + (2e)^2 + 4e(D+d)} - \sqrt{(D+d)^2 + X^2}$ En posant $\varepsilon_1 = \frac{2e}{D+d}$ et $\varepsilon_2 = \frac{X}{D+d}$, un DL à l'ordre deux donne : $\delta = (D+d) \left[1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2) - \frac{1}{8} (4\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2^2) - 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \right] = (D+d) (\varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1\varepsilon_2^2)$ On trouve : $\delta = 2e \left(1 - \frac{X^2}{2(D+d)^2} \right)$	2
3.b	$I = \text{Cte} \rightarrow \delta = \text{Cte} \rightarrow X = \text{Cte}$. La symétrie de révolution autour de l'axe $S'E$: anneaux concentriques (centre E)	1
4	$p_n = p_0 + \frac{1}{2} - n ; p_0 = \frac{2e}{\lambda}$	2
5	$p_n = p_0 \left(1 - \frac{X_n^2}{2(D+d)^2} \right) \Rightarrow X_n = (D+d) \sqrt{2 \frac{p_0 - p_n}{p_0}} = (D+d) \sqrt{\frac{\lambda}{2e} (2n+1)}$	2



6	$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n = (D+d) \sqrt{\frac{\lambda}{2e}} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) = (D+d) \sqrt{\frac{\lambda n}{e}} \left(\sqrt{1+\frac{3}{2n}} - \sqrt{1+\frac{1}{2n}} \right) \approx \frac{D+d}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{en}}$	2
7.a	Le centre des anneaux se translate de la même distance : $\ell \leq \frac{1}{4} \Delta X_n = \frac{D+d}{8} \sqrt{\frac{\lambda}{en}}$	1
7.b	$D \rightarrow \infty$: pas de limitation pour ℓ Les franges obtenues sur un écran placé à l'infini gardent un bon contraste.	1
8.a	On observe dans le plan focal image de la lentille se qu'on observerait sur un écran placé à l'infini.	1
8.b	voir figure ci contre.	2
8.c	Les rayons qui interfèrent en M proviennent d'un même rayon incident : diviseur d'amplitude.	1
8.d	$\tan \theta_{\max} = \frac{r_0}{f}$ $p_{\max} = p_0 = p(\theta=0) = \frac{2e}{\lambda} = 3395,5$ $p_{\min} = p(\theta = \theta_{\max}) = \frac{2e}{\lambda} \cos \theta_{\max} = 3391,2$: on observe 4 anneaux brillants	2
9	Problème de cohérence temporelle	2
10.a	$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z)$; $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_z)$; $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin(\theta+2\alpha) \vec{u}_x - \cos(\theta+2\alpha) \vec{u}_z)$	3
10.b	$\varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} = \frac{2\pi}{\lambda} \{ x[\sin(\theta+2\alpha) - \sin \theta] + z[\cos \theta - \cos(\theta+2\alpha)] \}$	2
11.a	Pour θ et α faibles, un DL donne : $p = \frac{2\alpha}{\lambda} [x + (\alpha + \theta)z]$.	2
11.b	$I = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{4\pi\alpha}{\lambda} (x + z(\alpha + \theta)) \right] \right\}$	1
12.a	$dI = \frac{2I_0}{2\theta_0} d\theta \left\{ 1 + \cos \left[\frac{4\pi\alpha}{\lambda} (x + z(\alpha + \theta)) \right] \right\} \Rightarrow I(x, z, \theta_0) = 2I_0 \left[1 + \sin_c \left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda} z \theta_0 \right) \cos \left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda} (x + \alpha z) \right) \right]$	3
12.b	En tout point du plan $z = 0$, le contraste reste bon ($C = 1$) et ceci $\forall \theta_0$.	2
12.c	$I(x, z=0, \theta_0) = \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda} x \right) \right]$; franges rectilignes ; $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$.	2
12.d	En s'éloignant de ce plan, le contraste diminue et les franges disparaissent. Avec une source étendue, les franges sont localisées au voisinage du coin.	1
13	$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{\overline{OA'} f}{f - \overline{OA'}} = -25 \text{ cm.}$ $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -4$; $i_{\text{écran}} = \gamma i$; $\alpha = \frac{\lambda \gamma }{2i_{\text{écran}}} = 5,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	2