Concours en Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 07 Juin 2007	**Heure : 8 H00**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 6**
Barème : Pb 1 : 10/20 (A/4,5 ; B/5,5)	;	**Pb 2 : 10/20 (A/5,5 ; B/4,5)**	

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Dans toute l'épreuve, on utilise soit le système de coordonnées sphériques (r,θ,φ) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ ou cartésiennes (x,y,z) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

ε_0 et c désignent la permittivité électrique du vide et la célérité de la lumière dans le vide.

Données utiles:

* Les expressions du laplacien et du gradient d'une fonction scalaire $F(r,\theta,\varphi)$:

$$\Delta F(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}F = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

* Les relations vectorielles : $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}F) = \Delta F$; $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

PROBLEME I : Le problème de Laplace

Le problème de Laplace avec des conditions aux limites est rencontré dans différents domaines de la physique. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles ce problème intervient.

A - Sphère conductrice placée dans un champ électrique uniforme

On considère une sphère conductrice de centre O et de rayon R maintenue au potentiel constant V_s.

La sphère est placée dans le vide où règne un champ électrique uniforme : $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{u}_z$ (figure 1).

A l'équilibre électrostatique, la sphère crée un champ électrique qui se superpose au champ $\vec{E}_0$.

On supposera que la sphère est de taille petite de sorte que loin de la sphère les lignes du champ électrique restent parallèles à (Oz).

1. Rappeler la définition ainsi que les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique (champ et potentiel électriques, répartition des charges).

2. Déterminer l'expression du potentiel $V_0(r,\theta)$ dont dérive le champ $\vec{E}_0$. On prendra $V_0(O) = V_s$.

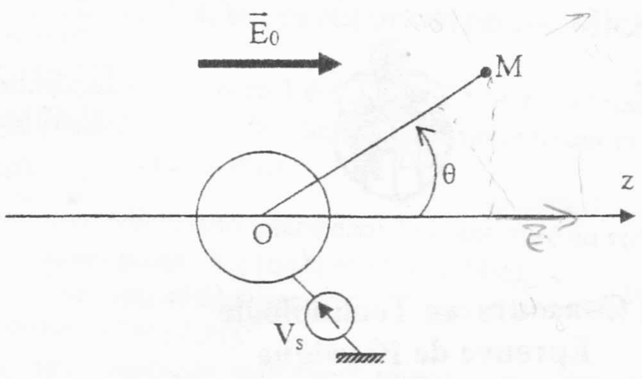

figure 1

3.a. Ecrire l'équation locale satisfaite par le potentiel $V(r,\theta)$ en tout point à l'extérieur de la sphère.

3.b. Quelles sont les conditions aux limites imposées à $V(r,\theta)$?

4. On se propose de chercher la solution à ce problème s'écrivant sous la forme :

$$\boxed{V(r,\theta) = A + f(r)g(\theta)} \text{ ; où A est une constante.}$$

4.a. Montrer qu'il existe une constante β telle que :

$$\frac{1}{f(r)}\left(r^2\frac{d^2f}{dr^2} + 2r\frac{df}{dr}\right) = -\frac{1}{\sin\theta\, g(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dg}{d\theta}\right) = \beta.$$

4.b. Justifier, sans calcul, le choix de $\boxed{g(\theta) = \cos\theta}$ et calculer alors β.

4.c. En cherchant une fonction $f(r)$ sous la forme : $f(r) = r^m$ où $m \in \mathbb{Z}^*$, déterminer les deux valeurs possibles de m.

4.d. A l'aide des conditions aux limites, montrer qu'à l'extérieur de la sphère, le potentiel s'écrit :

$$V(r,\theta) = V_s + E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta.$$

5.a. Exprimer le champ électrique total $\vec{E}$ à l'extérieur de la sphère.

5.b. Montrer que le champ total peut être considéré comme la superposition du champ uniforme $\vec{E}_0$ et celui créé par un dipôle électrostatique dont on déterminera le moment dipolaire $\vec{p}$.

5.c. Exprimer, en fonction de E_0, θ et de ε_0, la densité surfacique de charges σ qui apparaît sur la sphère.

5.d. En ulilisant la loi de Coulomb, déterminer le champ électrique $\vec{E}_c$ créé par cette distribution au centre O de la sphère. Dire en le justifiant si ce résultat était prévisible.

B - Mode TE dans un guide rectangulaire

On considère un guide de section rectangulaire constitué de parois parfaitement conductrices. On suppose que l'air à l'intérieur du guide a les propriétés électrique et magnétique du vide (figure 2).

Dans ce guide, de coté a suivant (Ox) et b suivant (Oy), on cherche si une onde de pulsation ω peut se propager suivant l'axe (Oz).

En représentation complexe, les champs électrique et magnétique associés à cette onde s'écrivent :

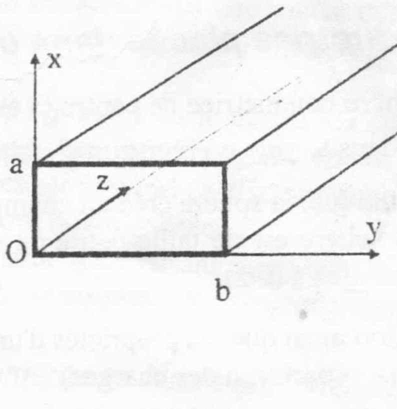

figure 2

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0(x,y)\exp[i(kz-\omega t)] \text{ ; avec } \vec{E}_0.\vec{u}_z = 0.$$

$$\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0(x,y)\exp[i(kz-\omega t)] \text{ ; avec } \vec{B}_0.\vec{u}_z = 0.$$

6. Rappeler les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique à l'intérieur du guide ainsi que les conditions aux limites imposées par les surfaces métalliques.

7. Montrer que la structure choisie impose : $\operatorname{div}\vec{E}_0 = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E}_0 = \vec{0}$.

8.a. En déduire que le vecteur $\vec{E}_0$ dérive d'une fonction scalaire $\Psi_0(x,y)$ vérifiant l'équation de Laplace : $\Delta\Psi_0 = 0$.

8.b. En se rappelant des conditions aux limites imposées à $\vec{E}_0$, justifier qu'en tout point des parois du guide Ψ_0 reste constante.

8.c. On admet que dans tout le volume intérieur du guide la fonction Ψ_0 reste constante.
En déduire que la structure proposée de l'onde ne peut pas se propager dans ce guide.

Dans la suite, on étudiera une structure susceptible de se propager (TE).

9. Une onde plane progressive, monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement selon (Oy) est envoyée en oblique dans le guide selon le vecteur d'onde $\vec{k}_1 = k_{1x}\vec{u}_x + k_{1z}\vec{u}_z$ faisant l'angle α ($\alpha \in]0,\pi/2[$) avec l'axe (Oz) (figure 3).
En représentation complexe, le champ électrique associé s'écrit : $\underline{\vec{E}}_1 = E_0 \exp[i(\vec{k}_1.\vec{r} - \omega t)]\,\vec{u}_y$.

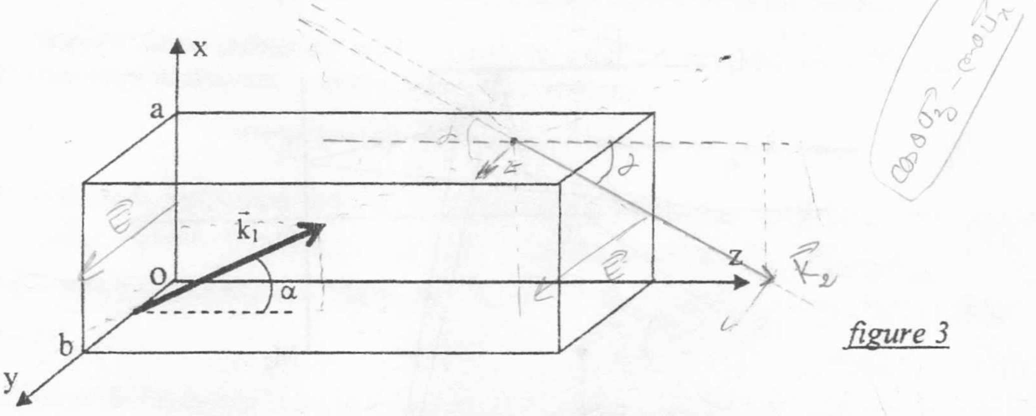

figure 3

9.a. En utilisant les lois de Descartes pour la réflexion, écrire en fonction de ω, α et la célérité de la lumière dans le vide c, les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}_2$ de l'onde plane réfléchie.

9.b. En introduisant un coefficient de réflexion ρ, le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit alors : $\underline{\vec{E}}_2 = \rho E_0 \exp[i(\vec{k}_2.\vec{r} - \omega t)]\,\vec{u}_y$.
Déterminer la valeur du coefficient de réflexion ρ.
En déduire que le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie s'écrit : $\underline{\vec{E}} = 2iE_0 \sin(k_0 x \sin\alpha)\, \exp[i(k_0 z \cos\alpha - \omega t)]\,\vec{u}_y$, avec $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$.

9.c. Déterminer les valeurs possibles de $\sin\alpha$ en fonction d'un entier n, a, ω et c.

10.a. Donner la direction et le sens de propagation de l'onde résultante.

10.b. Exprimer le module du vecteur d'onde k_g dans le guide en fonction de α et k_0.
En déduire la relation de dispersion du mode associé à l'entier n. On fera apparaître une pulsation, dite de coupure, notée ω_{cn}. Justifier cette appellation.

11. Trouver une relation entre la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de c et du rapport $\dfrac{\omega_{cn}}{\omega}$.

12. Justifier que l'onde guidée n'est pas transverse magnétique (TM).

PROBLEME II : L'interféromètre de Michelson

Dans ce problème, on cherchera à étudier l'effet de l'élargissement de la source sur les interférences obtenues par l'interféromètre de Michelson et notamment la localisation des franges dans les deux situations : lame d'air et coin d'air.

L'interféromètre de Michelson, placé dans l'air assimilé au vide, est constitué de :

- deux miroirs plans : M_1 (fixe) et M_2 (mobile) ;
- d'une lame semi-réfléchissante (S_p), non absorbante, appelée séparatrice et inclinée de 45° par rapport à l'axe (Ox).
  Cette lame, supposée infiniment mince, n'introduit aucun déphasage supplémentaire entre les ondes qui interfèrent.

L'interféromètre est éclairé par une source S monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ. Afin d'étudier le problème de cohérence spatiale, S peut être ponctuelle ou étendue.

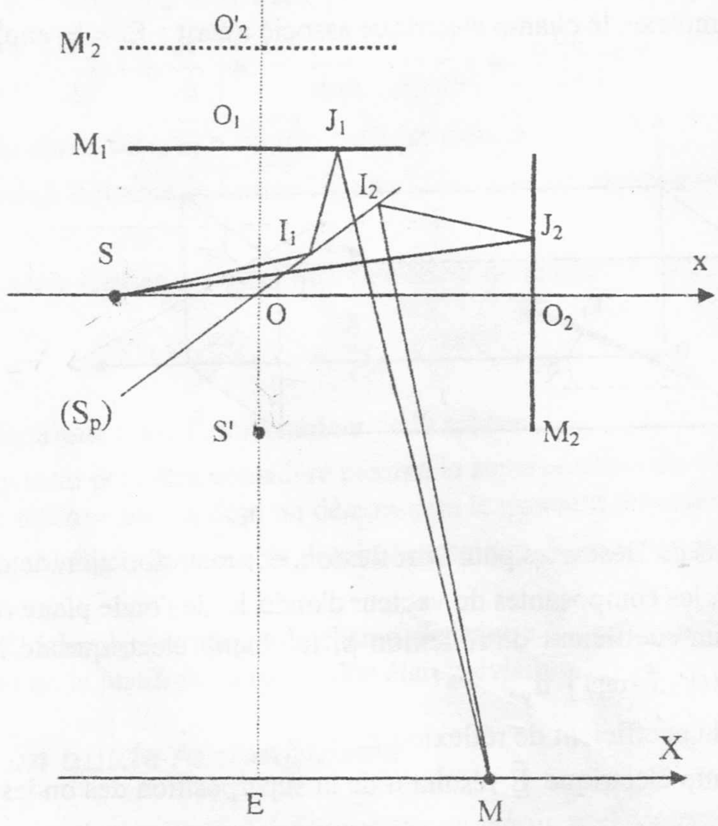

figure 4

A - Michelson en lame d'air

L'interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air, est éclairé par une source ponctuelle S.
La figure 4 donne les marches réelles de deux rayons émergent de l'interféromètre correspondant à deux rayons lumineux **distincts** issus de S.
Le premier rayon émerge du Michelson après une réflexion sur le miroir M_1 alors que le deuxième après une réflexion sur le miroir M_2. Ces deux rayons se rencontrent en un point M.

1. Justifier l'affirmation suivante : les interférences au point M (à distance finie de O) sont du type division de front d'ondes et les franges obtenues sont non localisées.

2. Montrer que le dispositif est équivalent à une lame d'air faisant intervenir M_1, M_2' et S', où S' et M_2' sont les symétriques de S et M_2 par rapport à la séparatrice (S_p) respectivement.

Dans toute la suite du problème, les raisonnements se feront en considérant M_1, M_2' *et* S'.

On cherche à déterminer la différence de marche δ entre deux rayons issus de S et qui interfèrent en un point M de l'espace d'abscisse X (figure 5). On note $d = S'O_1$ et $D = EO_1$.
On se limitera aux rayons peu inclinés par rapport à l'axe O_1S' et on supposera que l'épaisseur e de la lame est faible ($e << X << D+d$).

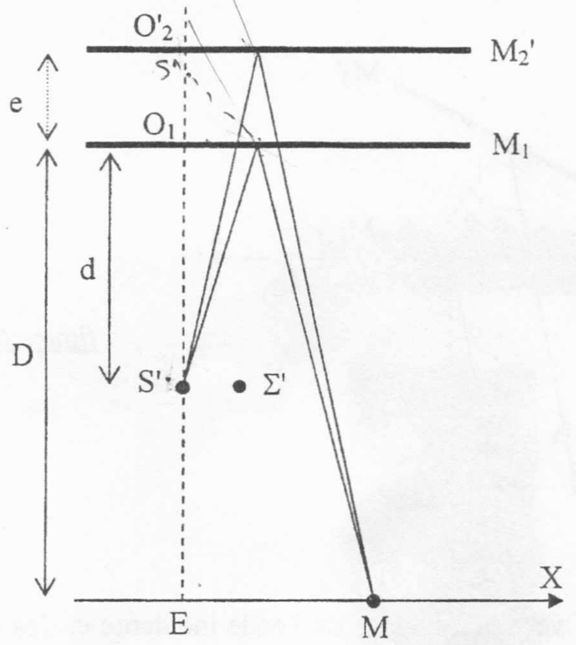

figure 5

3.a. En considérant S_1 et S_2, images de S' à travers les miroirs M_1 et M'_2 respectivement, montrer que la différence de marche au point M s'écrit : $\delta(X) = S_2M - S_1M \approx 2e\left(1 - \dfrac{X^2}{2(D+d)^2}\right)$.

3.b. Justifier pourquoi les franges d'interférences sont des anneaux.

4. Donner l'ordre d'interférence p_n du $n^{ième}$ anneau brillant. On supposera qu'au centre E on observe une tache noire.

5. Exprimer le rayon X_n du $n^{ième}$ anneau brillant en fonction de D, d, λ, e et n.

6. Montrer que pour n >> 1, la distance entre le $n^{ième}$ et $(n+1)^{ième}$ anneau brillant s'écrit :

$$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n \approx \frac{D+d}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{e\,n}}.$$

7. A une distance ℓ de la source S, on place une autre source Σ. Ces sources ponctuelles et incohérentes émettent la même longueur d'onde λ. Les symétriques S' et Σ' de ces sources à travers la séparatrice, distants de ℓ, sont alignés parallèlement à l'axe (EX) (figure 5).
On admet que les n premiers anneaux brillants restent bien visibles si le décalage entre les deux systèmes de franges est inférieur au quart de ΔX_n.

7.a. Trouver la condition sur ℓ pour que les n premiers anneaux restent visibles.

7.b. Commenter le cas où l'écran est placé à l'infini ($D \to \infty$).

8. On remplace les deux sources ponctuelles par une source étendue assimilée à un disque de rayon $r_0 = 1$ cm et placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_1) de focale f = 20 cm.

8.a. Justifier que les franges observées sur un écran, placé dans le plan focal image d'une deuxième lentille convergente (L_2), gardent un bon contraste.

8.b. Tracer la marche de deux rayons émergent de l'interféromètre et qui interfèrent en un point du plan focal image de (L_2).

8.c. Justifier que les interférences obtenues à l'infini sont du type division d'amplitude.

8.d. Exprimer, en fonction de r_0 et f, l'angle d'incidence maximal θ_{max}. En déduire le nombre de franges brillantes observables sur l'écran. On prendra : e = 1 mm et λ = 589 nm.

9. L'expérience montre que lorsqu'on augmente l'épaisseur e de la lamé d'air le contraste diminue et les anneaux finissent par disparaître. Expliquer.

B - Michelson en coin d'air

L'interféromètre de Michelson, réglé maintenant en coin d'air d'angle α, est éclairé par une onde plane provenant d'une source ponctuelle située à l'infini. On désigne par θ l'angle que fait la direction de l'onde incidente avec la normale au miroir fixe M_1 (figure 6).

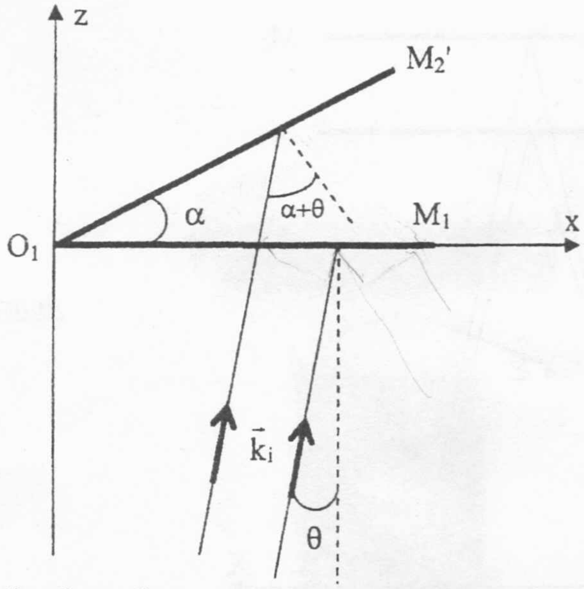

figure 6

10.a. On désigne par $\vec{k}_i$, $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ les vecteurs d'ondes de l'onde incidente et des ondes réfléchies sur les miroirs M_1 et M_2' respectivement.

Exprimer les composantes de ces trois vecteurs en fonction de α, θ et λ.

10.b. En prenant l'origine des phases au point O_1, déterminer le déphasage φ entre les deux ondes réfléchies interférant en un point $M(x,y,z)$.

11.a. Pour α et θ faibles vérifier que l'ordre d'interférence p au point M peut s'écrire :

$$p = \frac{2\alpha}{\lambda}\,[\,x + (\alpha + \theta)\,z\,].$$

11.b. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(x,z,\theta)$ au point M. On notera I_0 l'intensité de l'onde réfléchie par l'un des miroirs.

12. La source lumineuse, située toujours à l'infini, est désormais étendue. Elle envoie alors sur l'interféromètre des rayons d'inclinaison variant entre θ_0 et $-\theta_0$ (avec θ_0 faible).

12.a. Sachant que les ondes provenant de diverses inclinaisons sont incohérentes et que l'intensité incidente entre θ et $\theta+d\theta$ est proportionnelle à $d\theta$, montrer que l'intensité au point M peut se mettre sous la forme :

$$I(x,z,\theta_0) = 2I_0\left[1 + \mathrm{sin_c}\left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda}\,z\,\theta_0\right)\cos\left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda}(x+\alpha z)\right)\right] \quad ; \quad \mathrm{sin_c}(u) = \frac{\sin u}{u}$$

12.b. En identifiant le terme de visibilité, relié au caractère non ponctuel de la source, chercher l'équation du plan correspondant à un contraste indépendant de θ_0. Que vaut alors ce contraste ?

12.c. Quelle est la nature de ces franges ?

Exprimer l'interfrange i en fonction de la longueur d'onde λ et de l'angle α du coin.

12.d. Que se passe-t-il lorsqu'on s'éloigne de ce plan ? Conclure.

13. Pour observer ces franges, on dispose d'une lentille convergente de distance focale image $f = 20$ cm. Sur un écran, situé à une distance $D_0 = 1$m de la lentille, on obtient des franges rectilignes d'interfrange $i_{écran} = 2$ mm.

Calculer l'angle α entre les deux miroirs. On prendra $\lambda = 589$ nm.

Fin de l'épreuve