REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2010

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2010

Concours Technologique
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 31 Mai 2010	**Heure: 8 H**	**Durée: 4 H**	**Nbre pages: 5**
Barème : Exercice: 4 pts,	**Problème: Partie I:** 9 pts,	**Partie II:** 7 pts.	

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels positifs, $\mathbb{R}^*$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels différents de 0 et $\mathbb{R}_+^*$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels strictement positifs.

Exercice

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction g par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \varphi(x^2+y^2). \end{array}$$

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

   (b) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de φ'.

   (c) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.

2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$tz''(t) + z'(t) = 2t. \tag{1}$$

3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction g vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 8(x^2+y^2), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \tag{2}$$

   (a) Montrer que si la fonction g vérifie (2) alors la fonction φ vérifie l'équation différentielle (1), et donner l'expression de φ.

   (b) En déduire l'expression de g.

   (c) Déterminer la fonction g solution (2) et vérifiant $g(1,0) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 0$.

Problème

Soit la fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = {x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2 + \frac{{x_3}^2}{2} - x_3, \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Partie I

1. Vérifier qu'on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >, \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ de f pour $i = 1, 2, 3$.

3. Soit le système défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 0. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Montrer que ce système peut se mettre sous la forme $Ax = b$.

4. Trouver les valeurs propres de la matrice A et les vecteurs propres associés.

5. La matrice A est -elle diagonalisable?

6. Montrer que la matrice A est inversible.

7. En déduire le système $Ax = b$ admet une solution unique x^*.

8. Calculer Ab. Que remarque-t-on?

9. Vérifier $< Ax, y > = < x, Ay >$ pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$.

10. Montrer que $f(b) = -\frac{1}{2} < Ab, b >$.

11. Montrer que

$$< A(x-b), x-b >= (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}(x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_3-1)^2$$

12. Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, $f(x) - f(b) = \frac{1}{2} < Ax - b, x - b >$.

13. En déduire que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, on a $f(x) \geq f(b)$.

14. Que représente le vecteur b pour la fonction f?

Partie II

Dans cette partie, (X_1, X_2) désigne un couple de variables aléatoires réelles de densité conjointe f_{X_1,X_2} définie, pour tout couple (x_1, x_2) de réels, par :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \alpha e^{-\frac{2}{3}f(x)} = \alpha e^{-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et b un réel. En utilisant les propriétés des lois normales, montrer que

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2} dx = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}$.

2. Déterminer α pour que f_{X_1,X_2} soit une densité de probabilité.
   (Indication: On pourra pour cela remarquer l'identité:

   $$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2$$

   et utiliser la question précédente).

3. Déterminer les densités marginales de X_1 et de X_2.

4. Reconnaître les lois de X_1 et de X_2.

5. Calculer $P(X_1 > 0)$ et $P(X_2 < 0)$.

6. Calculer $E(2X_1 + 3X_2)$.

7. Calculer $Var(2X_1)$ et $Var(-3X_2)$.

8. Calculer $E((X_1 + X_2)^2)$.

9. Déduire $Cov(X_1, X_2)$ puis $Var(X_1 + X_2)$.

10. X_1 et X_2 sont-elle indépendantes?

Partie III

Soient les variables aléatoires Z_1 et Z_2 indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\aleph(0,1)$. On rappelle que la densité d'une v.a. normale Z centrée et réduite est donnée par

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2}), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

On considère les variables aléatoires T, U, V et W définies par

$$\begin{cases} U = Z_1, \\ V = Z_1 + Z_2, \\ T = Z_1^2, \\ W = \sqrt{T}. \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de W en fonction de celle de T.
2. Déterminer la densité f_T de T.
3. Calculer $E(T)$, $E(W)$, $Var(T)$ et $Var(W)$.
4. Calculer $E(V)$, $E(V^2)$ et $Cov(U,V)$.
5. Déterminer la loi du couple (Z_1, Z_2) ainsi que sa densitée f_{Z_1,Z_2} définie sur $\mathbb{R}^2$.
6. On considère la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (u, v) \end{array}$$

   telle que

$$\begin{cases} u &= x_1, \\ v &= x_1 + x_2. \end{cases}$$

   (a) Exprimer x_1 et x_2 en fonction de u et v.

   (b) Calculer la matrice Jacobienne de Φ.

   (c) En déduire que la loi du couple (U,V) admet la densité $f_{U,V}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + (v-u)^2)\right\}.$$

7. Déterminer la densité marginale de V: f_V.
8. U et V sont-elles indépendantes?

Fin de l'épreuve

Concours Toutes Options
Epreuve d'Anglais

Date : Lundi 31 Mai 2010	**Heure : 15 H**	**Durée : 2 H**	**Nbre pages : 08**
Barème : Part I :30, Part II: 30, Part III: 20			

IMPORTANT:

1. L'épreuve d'anglais comporte deux séries de feuilles :

- ***Les énoncés s'étalant sur 4 pages que les candidats sont appelés à garder ;***
- ***Les feuilles réservées aux réponses (Answer sheets) s'étalant sur 4 pages, lesquelles doivent être rendues à la fin de l'épreuve aux professeurs surveillants***

2. Il sera tenu compte de la présentation, (l'écriture au crayon n'étant pas permise)

1. Liquid Wood better known by the trade name Arboform is the ecofriendly replacement to Plastic. With environmental issues such as pollution, increased CO_2 levels causing global warming and depletion of oil reserves, scientists have chosen to look for eco-friendly alternatives. <u>One such alternative</u> is liquid wood. Arboform is the trade name coined for liquid wood.

2. For decades plastics have reigned the commodity and durable goods market because of their utility and durability. In the 20th Century the introduction of plastics found uncontested utility in every home, industry or machinery. However today, in an eco-friendly and environmentally conscious decade, a soupy expanse of plastic covering approximately 1 million square miles of the Pacific ocean is a cause of serious concern and raises alarm.

3. Plastics are neither recyclable nor are they renewable. Since plastics are derived from oil reserves, the future of plastics rests on the natural oil reserves of the world <u>which</u> are exponentially depleted as technology advances. Off late, pthalate softeners and heavy metals used in plastics are found to be toxins both, for the environment as well as for health. Norbert Eisenreich's group at the Fraunhofer Institute of Chemical Technology began researching a natural alternative to a material as utilitarian as plastic but more eco-friendly, since the 1900s.

4. Through <u>their</u> research and scientific pursuit they invented liquid wood. Liquid wood is a strong thermoplastic formulated from lignin, natural fibers and wax. It is non-toxic, bio-degradable and does not depend on a non-eternal resource such as petroleum. Prior to the introduction of liquid wood, bioplastics were experimented on but their manufacturing processes were found unsuited to domestic use as they had high sulfur content.

5. After Eisenreich's team developed liquid wood and christened with the trade name Arboform, it was further processed by Tecnaro a German company which molded and produced it in pellet form. A finished product of Arboform can take the looks of plastic or even an object of polished wood.

6. Arboform is not made from felling of trees but it is manufactured from the waste products of the paper industry. The paper industry separates out the three components of wood-lignin, cellulose and hemicellulose. Lignin is not used in the manufacture of paper as it gives paper a brownish hue. Often it is used in low quality newsprint but more often than not it is separated out with a sulfite or sulfate based pulping process