REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2010

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2010

Corrigé du Concours Technologie
Epreuve de Physique

Problème 1 : LES CONDENSATEURS

Partie 1

1.1.a.	Théorème de Gauss : *Forme intégrale* : Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal au rapport de la charge à l'intérieur de cette surface par la permittivité du vide : $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ *Forme locale* : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	1 1
1.1.b.	Pas de mouvement macroscopique des charges libres.	1
1.1.c.	$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ (si le champ intérieur n'est pas nul, une force mettrait les charges libres en mouvement). $\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V_{int} \Rightarrow V_{int} = cste$ $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho_{int} = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Si le conducteur est chargé, toutes les charges non compensées (excédentaires) se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.	1 1 1 1 1
1.1.d.	*Théorème de Coulomb* : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut : $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.	1
1.2.a	La circulation du champ $\vec{E}_c$ entre deux points quelconques M et N de Sc est nulle (Le volume du conducteur est équipotentiel) : $\int_M^N \vec{E}_c\cdot\vec{dl} = 0 \;\; \forall\; \vec{dl}$ dans la cavité $\Rightarrow \vec{E}_c = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Potentiel de la cavité Constant	1 1
1.2.b.	$\vec{E}_c = \vec{0} \Rightarrow$ En appliquant le théorème de Coulomb, au voisinage de S_c, on aura : $\sigma_c = 0$. Autre démonstration : Comme le flux du champ électrique à travers une surface quelconque S intérieur au conducteur et englobant la cavité est nul ($\vec{E}_{int} = \vec{0}$), la charge totale de la cavité est nulle.	1

1.3.a.	$Q_B = - Q_{Ai}$ *Dem 1* : En appliquant le théorème de Gauss (le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque S intérieur au conducteur A et englobant le conducteur B est nul). *Dem 2* : Influence totale	**1** **1**
1.3.b.	$Q = \|Q_B\| = \|Q_{Ai}\|$ (ou $Q = Q_B$) $C = Q/(V_B - V_A)$	**1** **1**
1.4.a.	Entre les armatures, $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r$ (symétrie sphérique). Si on applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique concentrique, de rayon r compris entre R1 et R2, on obtient : $\vec{E} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$	**1** **1**
1.4.b.	$C_s = \dfrac{Q_1}{\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl}} = \dfrac{Q_1}{\int_{R1}^{R2} E\cdot dr} = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$	**1** **1**
1.4.c.	Dans le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e << R_1$ $C_s \approx 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1^2}{e} \approx \varepsilon_0 \dfrac{S_1}{e}$ (ou $\varepsilon_0 \dfrac{S_2}{e}$)	**1**
1.4.d.	Lorsque $e << R_1$ et R_2 ; les armatures sont à une distance e suffisamment faible devant les rayons de courbures pour que l'on puisse les assimiler localement à des plans $\Rightarrow$ $C_P \approx \varepsilon_0 \dfrac{S}{e}$	**1** **1**
1.5.	$W = \dfrac{Q^2}{2C}$	**1**
1.6.a.	$W_i = \dfrac{Q_{10}^2}{2C_1} = \dfrac{1}{2}C_1U_{10}^2$	**1**
1.6.b.	A l'équilibre, les tensions aux bornes des deux condensateurs sont identiques, on a donc : $U_f = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_2}$ La conservation de la charge impose : $Q_{10}=Q_1+Q_2$ On a donc $\dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_{10} - Q_1}{C_2} \Rightarrow Q_1 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}Q_{10}$ et $Q_2 = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}Q_{10}$ Soit $U_f = \dfrac{Q_{10}}{C_1 + C_2} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}U_{10}$ $W_f = \dfrac{1}{2}C_1U_f^2 + \dfrac{1}{2}C_2U_f^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1^2}{(C_1 + C_2)}U_{10}^2$ $W_f - W_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1^2}{(C_1 + C_2)}U_{10}^2 - \dfrac{1}{2}C_1U_{10}^2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)}U_{10}^2 = -\dfrac{C_2Q_{10}^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$	**1** **1** **1**
1.7.a.	$W'_i = \dfrac{q_{10}^2}{2C_1}$	**1**
1.7.b.	D'après la loi des mailles $\dfrac{q_1}{C_1} - Ri - \dfrac{q_2}{C_2} = 0$ avec $i = -\dfrac{dq_1}{dt}$ (ou $\dfrac{q_1}{C_1} + Ri - \dfrac{q_2}{C_2} = 0$ avec $i = \dfrac{dq_1}{dt}$)	

	La conservation de la charge $\Rightarrow$ $q_{10} = q_1 + q_2$ D'où l'équation différentielle : $\frac{dq_1}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} q_1 = \frac{q_{10}}{RC_2}$ La solution de cette équation est : $q_1(t) = \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}$ où α est une constante d'intégration et $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$. On a $q_1(0)=q_{10}$ d'où $\alpha = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_{10}$ Et par suite $q_1(t) = \frac{C_2 q_{10}}{C_1 + C_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}$.	1 1 1
1.7.c.	Le courant i(t) est donné par : $i = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{q_{10}}{RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ L'énergie dissipée dans la résistance est l'énergie dissipée par effet Joule, on a donc : $W_R = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)dt = \frac{q_{10}^2}{RC_1^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)dt = \frac{q_{10}^2}{RC_1^2} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]_0^{+\infty}$ On trouve donc : $W_R = \frac{q_{10}^2}{RC_1^2} \frac{\tau}{2} = \frac{C_2 q_{10}^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$ Cette énergie ne dépend pas de R	1 1 1
1.7.d.	$\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$	1
1.8.	L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaire est valable dans le cas où la durée caractéristique de l'évolution (τ dans ce cas) est très grande devant la durée de propagation ($\frac{L}{c}$ avec L est la dimension du circuit). Dans la question 1-6, $\tau = 0$ (R = 0) on est donc hors de l'ARQS.	1 1

Partie 2: CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDENSATEUR PLAN

2.1.	$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rB)}{\partial r} = -\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \vec{B} = -\frac{r\omega}{2}\mu_0\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta$ (ou $\vec{B} = -\frac{\omega r}{2c^2} E_0 \sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta$).	1
2.2.a	$u_e(t) = ½\, \varepsilon_0 E^2 = ½\, \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$ $u_m(t) = B^2/(2\mu_0) = \frac{r^2\omega^2}{8}\mu_0\varepsilon_0^2 E_0^2 \sin^2(\omega t)$	1 1
2.2.b.	$\frac{\langle u_m(t)\rangle}{\langle u_e(t)\rangle} = \frac{r^2\omega^2}{4}\mu_0\varepsilon_0 = X^2$ dans le cas $R = 10^{-2}$ m et $\omega = 100\,\pi$ rd.s^{-1} $X_{max} = (\pi/6)\, 10^{-8}$ $\Rightarrow$ l'énergie magnétique est négligeable devant l'énergie électrique dans le condensateur.	1 1 1
2.3.a.	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\omega r}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\vec{e}_r$ (ou $\frac{X}{\mu_0 c} E_0^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\vec{e}_r$ ou	1

	$\frac{\omega r}{4\mu_0 c^2} E_0{}^2 \sin(2\omega t)\, \vec{e}_r)$	
2.3.b.	$\Phi = \underset{\text{surfcylindrique}}{\oiint} \vec{\Pi}.\vec{ds} = \underset{\text{surface latérale}}{\iint} \vec{\Pi}.Rdzd\theta\, \vec{e}_r = \pi R^2 h\omega\varepsilon_0 E_0^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)$	**1**
2.3.c.	$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e} = \varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{h}$ et $U_0 = h\,E_0$	**1**
	$\Phi = C\omega h^2 E_0^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t) = -CU\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)$	**1**
	La puissance électromagnétique (ou électrique dans ce cas) du condensateur est échangée au niveau de la surface latérale.	**1**
2.4.	Le champ magnétique B crée un champ électrique E_1, lequel engendre un champ magnétique B_1, qui crée à son tour un champ électrique E_2, qui engendre un champ magnétique B_2, etc.	**1**
PARTIE 3 : Dipôle équivalent à un condensateur		
3.1.	Les deux amplificateurs opérationnels idéaux fonctionnent-ils en régime linéaire car les sorties sont bouclées sur les entrées inverseuses « - »	**1**
3.2.	Les deux amplificateurs opérationnels sont idéaux ⇒ les courants vers les entrées + et – sont nuls $i_+ = i_- = 0 \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$	**1**
3.3.	Les deux amplificateurs opérationnels sont idéaux ⇒ les courants vers les entrées + et – sont nuls $v_+ = v_- \Rightarrow v_{s1} = v_e$	**1**
	Le premier amplificateur opérationnel fonctionne en « suiveur ».	**1**
	Le suiveur est un montage à gain = 1, il ne réalise pas d'amplification, son utilisation se justifie pour bénéficier des avantages de résistance d'entrée très élevée et de résistance de sortie nulle des ampli op. A l'entrée, le montage ne consomme pas de puissance, mais transmet le signal d'entrée vers le montage suivant.	
3.4.a.	$v_E = v_+ = v_- = v_M = 0$	**1**
3.4.b.	$v_{s1} - v_E = R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{v_{s1}}{R_1} = \frac{v_e}{R_1}$	**1**
3.5.a	$v_{s2} - v_E = -R_2 i_1 \Rightarrow v_{s2} = -\frac{R_2 v_{s1}}{R_1} = -\frac{R_2 v_e}{R_1}$	**1**
3.5.b	$v_{s2} - v_e = -\frac{q}{C_0} \Rightarrow v_{s2} = v_e - \frac{q}{C_0}$	**1**
3.5.b	$v_{s2} = -\frac{R_2 v_e}{R_1}$ et $v_{s2} = v_e - \frac{q}{C_0} \Rightarrow v_e(1+\frac{R_2}{R_1}) = \frac{q}{C_0} \Rightarrow v_e = \frac{q}{C_0}(\frac{R_1}{R_1+R_2}) = \frac{q}{C}$	**1**
	Avec $C = C_0 \frac{R_1+R_2}{R_1}$	**1**
Problème 2 : *Bilans thermiques pour le filament d'une lampe à incandescence*		
1. Conduction thermique dans le filament		
1.1.	L'unité de λ est $W.m^{-1}.K^{-1}$.	**1**
1.2.	Le bilan d'énergie sur un système élémentaire contenu entre les abscisses x et x+dx du filament (conservation de l'énergie) : (énergie qui entre en x) – (énergie qui sort en x + dx) = (variation de l'enthalpie de la tranche du système pendant dt).	**1**
	$\Rightarrow (j_x\, S\, dt) - (j_{x+dx}\, S\, dt) = \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt \Rightarrow -\frac{\partial j}{\partial x} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$	**1**

1.3.	En utilisant loi de Fourier à une dimension, il vient : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ appelée équation de la « chaleur ». Avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ l'unité de D est : $m^2.s^{-1}$.	1 1
1.4.a.	En régime permanent, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $T(x) = Ax + B$. Comme $T(0) = T_v$ et $T(L) = T_0$, on aura : $T(x) = \frac{T_0 - T_v}{L} x + T_v$.	1 1
1.4.b.	$\Phi = j\,S = -\lambda \frac{T_0 - T_v}{L} S = \lambda S \frac{T_v - T_0}{L}$	1
2. Conduction thermique avec échanges par rayonnement		
2.1.	La puissance surfacique rayonnée par la surface d'un corps noir à l'équilibre thermique est : $\Phi_r = \sigma T^4$ Φ_r s'exprime en $W.m^{-2}$; T s'exprime en K et σ est la constante de Stefan qui s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-4}$	1 1
2.2.	ρ résistance électrique par unité de longueur Unité : $\Omega.m^{-1}$.	1 1
2.3.a	Le bilan d'énergie sur un système élémentaire contenu entre les abscisses x et x+dx du filament (conservation de l'énergie) donne : $(j_x\, S\, dt) + \rho\, I^2 dx\, dt = (j_{x+dx}\, S\, dt) + 2\pi r\, dx\, \sigma\, T^4\, dt \Rightarrow -\frac{\partial j}{\partial x} S = 2\pi r \sigma T^4 - \rho I^2$ $\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2\sigma T^4}{\lambda r} - \frac{\rho I^2}{\lambda \pi r^2}$ $(S = \pi r^2)$	1 1
2.3.b	i)Au niveau de la zone terminale (proche de x = L), T ne dépend plus de x. Dans cette zone, $T = T_0$ et $\frac{dT}{dx} = 0$, l'équation différentielle donne : $\frac{2\sigma T_0^{\ 4}}{\lambda r} - \frac{\rho I^2}{\lambda \pi r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\rho I^2}{\lambda \pi r^2} = \frac{2\sigma T_0^{\ 4}}{\lambda r}$	1 1
2.3.c	ii) l'équation différentielle devient : $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2\sigma T^4}{\lambda r} - \frac{2\sigma T_0^{\ 4}}{\lambda r} \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2\sigma (T^4 - T_0^{\ 4})}{\lambda r}$ $\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0$ Avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2\sigma T_0^3}}$	1
2.4.	$P_c = S\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \pi r^2 \lambda \gamma \frac{T_0}{\delta}$ $P_r = 2\pi r\, L\, \sigma\, T_0^{\ 4}$ D'où : $\frac{P_c}{P_r} = \gamma \frac{\delta}{L}$	1 1 1