Concours Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 03 Juin 2010	Heure : 8 H00	Durée : 4 H	Nbre pages : 6
Barème :	Problème 1 : 15 pts ;		Problème 2 : 5 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé
L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

INSTITUT P... BIBLIOTHEQUE AUX ETUDES D'INGENIEURS

Formulaire :
L'espace est rapporté à un système d'axes (Ox, Oy, Oz) auquel est associée la base orthonormée directe ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).
En coordonnées cylindriques (r,θ,z), l'opérateur rotationnel pour un champ vectoriel $\vec{G} = G_r\,\vec{e}_r + G_\theta\,\vec{e}_\theta + G_z\,\vec{e}_z$, est donné par :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rG_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z .$$

Problème 1 : LES CONDENSATEURS

Ce problème comprend trois parties indépendantes liées aux condensateurs. Dans la première partie on s'intéresse à l'étude des conducteurs à l'équilibre électrostatique ainsi qu'à l'énergie manquante dans un circuit comportant deux condensateurs. En tenant compte des résistances électriques des fils, on peut retrouver cette énergie. Dans la deuxième partie, on aborde l'étude d'un condensateur en régime variable. Enfin, on analyse le fonctionnement d'un montage à deux amplificateurs opérationnels et on montrera que l'ensemble, inséré dans un circuit, se comporte comme un dipôle équivalent à un condensateur.

Dans tout ce problème, on notera $\vec{E}(M)$, V(M), ρ(M) et σ(M) respectivement ; le champ électrique, le potentiel électrique et les densités totales, volumique et surfacique, de charges électriques en tout point M de l'espace.

Données numériques :

Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ F.m^{-1}

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H.m^{-1}

PARTIE 1 : Condensateurs en régimes statique et variable

1.1.a. Enoncer le théorème de Gauss sous ses formes intégrale et locale.
1.1.b. Définir l'équilibre électrostatique d'un conducteur.
1.1.c. Que vaut le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique ?
Que peut-on dire du potentiel électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique ?
Décrire la distribution des charges électriques dans ce conducteur. Justifier clairement la réponse.

1.1.d. En utilisant le théorème de Coulomb, donner l'expression du champ extérieur $\vec{E}_{ext}$ au voisinage immédiat de la surface externe d'un conducteur en équilibre électrostatique.

1.2. On considère un conducteur métallique creux (A) en équilibre électrostatique, de surface extérieure (S_{ext}), dans lequel une cavité vide, de surface (S_c), ne contenant pas de charges (Figure 1).
1.2.a. Montrer que le potentiel électrostatique à l'intérieur de la cavité ne peut être que constant.
1.2.b. En déduire la densité surfacique de charges sur (S_c).

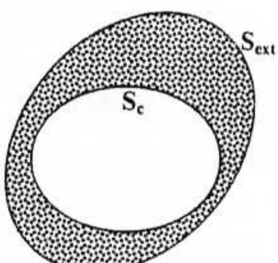

Figure 1

1.3. On place à l'intérieur de la cavité du conducteur (A) un conducteur (B), lié au potentiel $V_B>0$ et porte sur sa surface extérieure la charge Q_B (Figure 2). Le conducteur (A) est lié au potentiel $V_A< V_B$ et porte sur sa surface intérieure la charge Q_{Ai} et sur sa surface extérieure la charge Q_{Ae}. Les deux conducteurs (A) et (B) sont en équilibre électrostatique.
1.3.a. Etablir la relation entre les charges Q_B et Q_{Ai} .
1.3.b. Définir la charge Q du condensateur constitué par les deux conducteurs (A) et (B). En déduire sa capacité C en fonction de Q et des potentiels V_A et V_B.

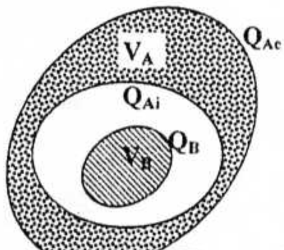

Figure 2

1.4. Dans la suite, on supposera que le condensateur décrit dans la question précédente a une géométrie sphérique. Il est ainsi constitué de deux armatures sphériques concentriques de rayons ; interne R_1 et externe R_2 (Figure 3). L'armature interne porte une charge Q_1.

1.4.a. Déterminer le champ électrostatique entre les armatures $\vec{E}$.
1.4.b En déduire la capacité C_s du condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.
1.4.c Examiner le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e << R_1$.
1.4.d Déduire l'expression de la capacité C_p d'un condensateur plan, supposé idéal, en fonction de l'écartement des armatures parallèles e, ε_0 et l'aire S des armatures en regard.

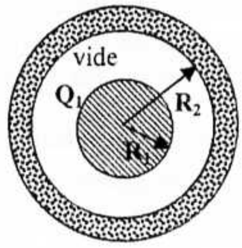

Figure 3

1.5. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique W emmagasinée dans un condensateur chargé, en fonction de sa charge Q et de sa capacité C.

1.6. Un condensateur de capacité C_1 est chargé sous une différence de potentiel U_{10}, puis il est isolé.

1.6.a. Quelle est l'expression de l'énergie électrique W_i emmagasinée dans ce condensateur ?

1.6.b. Le condensateur de capacité C_1 est relié par ses deux bornes, à un deuxième condensateur de capacité C_2 initialement non chargé.

Quelle est la tension U_f d'équilibre aux bornes du condensateur de capacité C_1?

Quelle est l'énergie W_f emmagasinée maintenant dans le circuit ?

Exprimer $W_f - W_i$ en fonction de C_1, C_2 et U_{10}.

En tenant compte de la valeur non nulle de la résistance du circuit, cette perte d'énergie peut être expliquée dans la question **1-7.**

1.7. Considérons le circuit ouvert, comprenant, en série, une résistance R et deux condensateurs de capacités respectives C_1 et C_2. Le premier condensateur porte une charge q_{10}. Le second n'est pas chargé.

1.7.a. Quelle est l'expression de l'énergie électrique W_i' emmagasinée dans ce circuit ?

1.7.b. On ferme le circuit.

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_1(t)$ pendant la décharge du condensateur de capacité C_1?

1.7.c. En déduire l'expression du courant i(t) circulant dans le circuit puis celle de l'énergie W_R dissipée dans la résistance. Cette énergie dépend-elle de R ?

1.7.d. Donner la constante de temps du circuit ?

1.8. L'approximation des régimes quasi-stationnaires est-elle valide pour la question 1-6 ?

PARTIE 2 : Champ électromagnétique dans un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe (z' z), séparées d'une hauteur h (Figure 4). Ce condensateur est soumis à une tension sinusoïdale $U = U_0 \cos(\omega t)$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ électrique $\vec{E}(t)$. On admet que les variations dans le temps sont suffisamment lentes pour que le champ électrique reste uniforme et donné par :

$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$ où E_0 est une constante

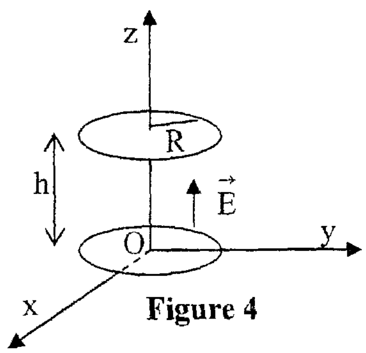

Figure 4

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). On notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base correspondante.

2.1. On admet que les variations dans le temps du champ électrique créent un champ magnétique $\vec{B}(r,t)$ de la forme : $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e}_\theta$. Déterminer ce champ magnétique en un point M entre les armatures.

2.2.a. Calculer les densités volumiques instantanées des énergies : électrique $u_e(t)$ et magnétique $u_m(t)$, emmagasinées dans le condensateur.

2.2.b. On note $\langle u_e(t)\rangle$ et $\langle u_m(t)\rangle$ les moyennes temporelles correspondantes à u_e et u_m.

On pose $X = \dfrac{\omega r}{2c}$ (où c est la célérité de la lumière dans le vide).

Exprimer en fonction de X le rapport $\dfrac{\langle u_m(t)\rangle}{\langle u_e(t)\rangle}$.

Comparer $\langle u_e(t)\rangle$ et $\langle u_m(t)\rangle$ dans le cas où $R = 10^{-2}$ m et $\omega = 100\,\pi$ rad.s^{-1}.
Commenter le résultat.

2.3.a Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en un point M entre les armatures.

2.3.b. En déduire le flux Φ du vecteur $\vec{\Pi}$ à travers la surface cylindrique fermée ayant pour bases les armatures du condensateur.

2.3.c. Exprimer Φ en fonction de la capacité du condensateur C et la tension U.
Interpréter le résultat.

2.4. Dans le cas où la pulsation ω est telle que l'approximation du régime quasi-stationnaire (ARQS) n'est plus valable, que peut-on dire des expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ calculées dans cette partie ?

PARTIE 3 : Dipôle équivalent à un condensateur

On considère le montage schématisé sur la figure 5 comportant deux amplificateurs opérationnels idéaux, deux résistors de résistances R_1 et R_2 et un condensateur de capacité C_0. Ce circuit, soumis à une tension d'entrée v_e, se comporte comme un dipôle placé entre les bornes A et M et parcouru par un courant d'intensité i.

3.1. Justifier le fonctionnement linéaire des deux amplificateurs opérationnels dans ce montage.

3.2. Exprimer la relation entre le courant i et la charge q de l'armature gauche du condensateur de capacité C_0.

3.3. Exprimer v_{s1} en fonction de v_e. Préciser à quoi sert le premier amplificateur opérationnel.

3.4.a. Quel est le potentiel du point E ?

3.4.b. En déduire le courant i_1 traversant la résistance R_1.

3.5.a. Exprimer v_{s2} en fonction de v_e et des résistances R_1 et R_2.

3.5.b. Exprimer v_{s2} en fonction de v_e , q et C_0.

3.5.c. Justifier que le montage se comporte comme un condensateur de capacité $C = C_0\dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$.

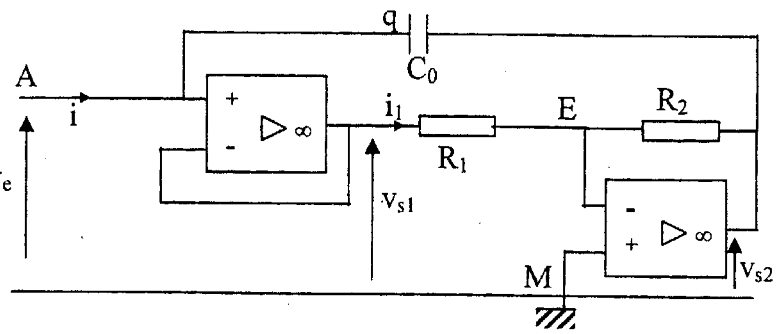

Figure 5

Problème 2 : *BILANS THERMIQUES POUR LE FILAMENT D'UNE LAMPE A INCANDESCENCE*

La caractéristique courant-tension d'une lampe électrique à incandescence dépend étroitement des phénomènes thermiques se produisant au niveau du filament. Ce filament est constitué de tungstène pur et modélisé par un cylindre droit, d'axe (Ox), de rayon $r = 0{,}03\,\text{mm}$ et de longueur $L = 4\,\text{cm}$. On note μ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique et c sa capacité thermique massique.

1. Conduction thermique dans le filament

Dans un premier temps, on considère uniquement les transferts thermiques par conduction dans le filament et on ne tient pas compte des pertes thermiques sur les parois latérales.
La longueur L est suffisamment grande pour que l'on adopte une modélisation unidimensionnelle des transferts thermiques (Figure 6). On note T(x,t) la température le long du filament à l'instant t et $\vec{j}$ le vecteur densité du flux thermique donné par la loi de Fourier :

$$\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T(x,t).$$

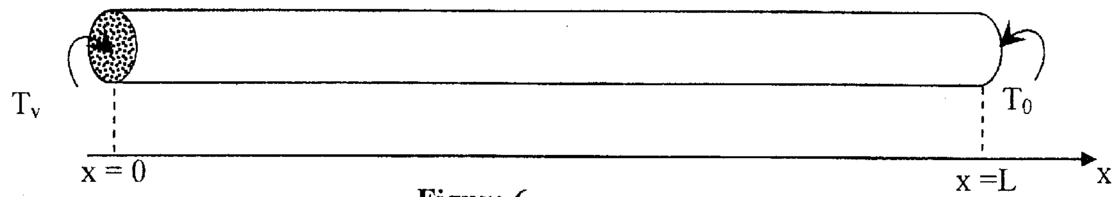

Figure 6

1.1. Déterminer l'unité de λ.
1.2. Effectuer un bilan d'énergie sur un système élémentaire situé entre les abscisses x et $x + dx$ du filament et en déduire une relation entre $\frac{\partial j}{\partial x}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$.
1.3. Montrer que la température satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Déterminer l'expression de D et son unité.
1.4. On se place en <u>régime permanent</u>. L'extrémité du filament en $x = 0$ est maintenue à une température constante T_v. L'autre extrémité en $x = L$ est maintenue à une température constante T_0 (Figure 6).
1.4.a. Déterminer l'expression de T(x).
1.4.b. Donner, en fonction de λ , L , S, T_v et T_0, l'expression du flux thermique Φ à travers une section droite du filament de surface S et de vecteur normale $\vec{e}_x$.

2. Transferts thermiques par Conduction et par rayonnement

Dans la suite, on néglige toujours les échanges thermiques par convection mais on tient compte des transferts par rayonnement sur les parois latérales, en plus du phénomène de conduction thermique le long du filament.

On se place en régime permanent et on suppose que :

- la température est uniforme sur une section droite du filament
- le filament rayonne comme un corps noir en équilibre thermique.

2.1. Rappeler la loi de Stefan pour un corps noir en précisant la définition et l'unité de chacun des termes utilisés.

2.2. Lorsque le filament est parcouru par un courant électrique d'intensité I, la puissance thermique reçue par une portion de longueur dx, autre que celui par conduction thermique, est donnée par : $\rho\, I^2\, dx$. Définir ρ et donner son unité.

2.3. On suppose que le filament est maintenu toujours à son extrémité $x = 0$ à la température T_v = 420 K ; alors que pour x suffisamment grand, la température du filament atteint la température d'équilibre T_0 = 2600 K (Figure 7). Le filament est parcouru par un courant électrique d'intensité I.

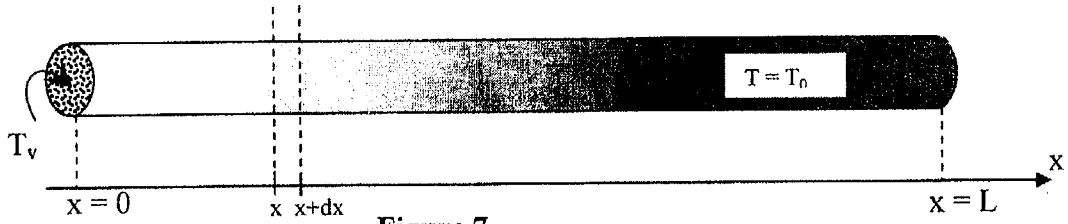

Figure 7

2.3.a. En effectuant un bilan énergétique pour une portion du filament comprise entre x et $x + dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par T(x).

2.3.b. Que devient cette équation au voisinage de l'extrémité $x = L$?

2.3.c. Mettre l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0 \quad , \text{ où } \delta \text{ est homogène à une distance.}$$

Donner l'expression de δ en fonction de T_0, r, λ et la constante de Stefan σ.

2.4. Une expression approchée de la pente en $x = 0$ est donnée par :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \gamma \frac{T_0}{\delta} \ , \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \ .$$

On note P_c la puissance thermique cédée par le filament en $x = 0$ et P_r la puissance rayonnée par tout le filament supposé à la température T_0.

Exprimer le rapport $\frac{P_c}{P_r}$ en fonction de γ, δ , et L.

Fin de l'épreuve