



Concours Technologique Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

- (a) Comme g est la composée de deux fonctions qui sont de classe C^2 donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x\varphi'(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y\varphi'(x^2 + y^2)$.

(c) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2\varphi''(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 + y^2)$.
- les solutions sur \mathbb{R}_+^* sont $z(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 \ln(t) + c_2$
- (a) $\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 \ln(t) + c_2$.

(b) $g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + c_1 \ln(x^2 + y^2) + c_2$.

(c) $g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}$.



Problème

Partie I

- $PQ\omega_\alpha = O(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de l'infini et $PQ\omega_\alpha = O(\frac{1}{t^{1-\alpha}})$ au voisinage de zéro d'où l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$.
- Φ_α définit bien un produit scalaire sur E .
- (a) Les coefficients de la solution développable en série entière (\mathcal{L}_λ) vérifient la relation:

$$a_{k+1} = -\frac{\lambda - k}{(k+1)(\alpha + k)} a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) D'après la question précédente on a $a_p = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (k - \lambda)}{p! \prod_{k=0}^{p-1} (k + \alpha)}$ pour tout $p \geq 1$ et donc

$$y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(c) Pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$, on remarque de l'expression de a_p que $a_p = 0$, pour tout $p \geq n + 1$, et par suite y_λ est un polynôme de degré n .

(d) $L_0 = 1$, $L_1 = x - \alpha$ et $L_2 = x^2 - 2(1 + \alpha)x + \alpha(1 + \alpha)$.

(e) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale $L_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{n!(\alpha)_n(-n)_p}{p!(\alpha)_p(-n)_n} x^p$ où $(\rho)_k = \rho(\rho+1)\dots(\rho+k-1)$ avec la convention $(\rho)_0 = 1$.

4. (a) Soit y la solution de (\mathcal{L}_n) . Comme $e^x f(x) = x^\alpha y'(x)$ donc par dérivation on obtient $f'(x) + n\omega_\alpha(x)y(x) = 0$.
- (b) L'égalité $\Phi_{\alpha+1}(P, Q) = \Phi_\alpha(xP, Q) = \Phi_\alpha(P, xQ)$ est évidente.
- (c) Par intégration par partie et en exploitant la relation établit en (4.a) on obtient l'égalité à droite. Par inversion des rôles de m et n on aura l'autre égalité.
- (d) D'après la relation $n\Phi_\alpha(L_n, L_m) = m\Phi_\alpha(L_n, L_m)$, On déduit que la famille $(L_k)_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ est une base orthogonale de E_n .
5. (a) Comme $xL_n(x) \in E_{n+1}$ et la famille $(L_k)_{k \in \{0,1,\dots,n+1\}}$ est une base de E_{n+1} donc il existe une unique famille de coefficients réels $(\beta_{n,k})_{0 \leq k \leq n+1}$ telle que:

$$xL_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_{n,k} L_k(x).$$

(b) Pour $n \geq 2$, en remarquant que $\Phi_\alpha(xL_n, L_p) = \Phi_\alpha(L_n, xL_p) = 0$, pour $p+1 \leq n-1$, c.a.d $p \leq n-2$ on a $\beta_{n,k} = 0$ pour tout $k \leq n-2$.

(c) Comme $xL_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{n!(\alpha)_n(-n)_p}{p!(\alpha)_p(-n)_n} x^{p+1}$ d'après la question (3.e) et par identification de la relation (5.a) on obtient

$$\begin{cases} \beta_{n,n+1} = 1, \\ \beta_{n,n} = \alpha + 2n, \\ \beta_{n,n-1} = n(\alpha + n - 1). \end{cases}$$

(d) D'après (5.a) et (5.c) on a $xL_{n+1} = L_{n+1} + (\alpha + 2n)L_n + n(\alpha + n - 1)L_{n-1}$ d'où $L_{n+1}(x) = (x - \alpha - 2n)L_n(x) - n(\alpha + n - 1)L_{n-1}(x)$, $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$

(e) On a d'une part $\Phi_\alpha(xL_n, L_{n+1}) = \beta_{n,n+1}\Phi_\alpha(L_{n+1}, L_{n+1})$, d'autre part $xL_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} \beta_{n,k} L_k(x)$. Alors $\Phi_\alpha(xL_n, L_{n+1}) = \Phi_\alpha(L_n, xL_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_\alpha(L_n, L_n)$ finalement $\beta_{n,n+1}\Phi_\alpha(L_{n+1}, L_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_\alpha(L_n, L_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) D'après la question précédente on a $\Phi_\alpha(L_n, L_n) = n!(\alpha)_n \Gamma(\alpha)$. Soit $\|L_n\| = \sqrt{n!(\alpha)_n \Gamma(\alpha)}$.

- (g) L'endomorphisme φ est bien définie car $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$. Sa matrice dans la base canonique est:

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{n} & \frac{2(\alpha+1)}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{-k}{n} & \frac{(k+1)(k+\alpha)}{n} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n+\alpha-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (h) On remarque que l'endomorphisme φ admet $n+1$ valeurs propre distinctes donc elle est diagonalisable.
- (i) Puisque $\varphi(L_k) = -\frac{k}{n}L_k$, L_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{k}{n}$ d'où la famille $(L_k)_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ est une base des vecteurs propres.

Partie II

1. (a) Les coefficients de Fourier trigonométrique de g sont donnés par

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{2x \sin(x\pi)}{\pi(x^2 - n^2)}.$$

les $b_n(g) = 0$ car g est paire.

- (b) Comme g est continue et \mathcal{C}^1 par morceau d'après Dirichlet

$$g(0) = 1 = \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} + \frac{\sin(x\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ d'où, pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \text{ on a}$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

2. (a) Comme la fonction $\frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ alors on a $u_n(x) \geq 0$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t^x)'} = -x \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \text{ d'où,}$$

$$u_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} + x \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \text{ or } \frac{1}{(n+1)^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq 0$$

car la fonction $\frac{1}{t^x}$ est décroissante alors on a $u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$ d'où $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$.

- (b) Comme $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$ et la série de terme général $\frac{x}{n^{x+1}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ donc la série des fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ de plus les fonctions u_n sont continues sur $]0, +\infty[$ et il y a convergence uniforme et même normale sur $[a, +\infty[$ car $0 \leq \sup_{x \geq a} u_n(x) \leq \frac{a}{n^{x+1}}$ donc la série de fonctions u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction continue qui sera notée U .

(c) $v_{n+1}(x) - v_n(x) = u_n(x) + \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x}$. Comme $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x}$ convergent simplement sur $]1, +\infty[$ alors la suite v_n converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction qui sera notée ζ .

(d) D'après la question précédente on a, $u_n(x) = v_{n+1}(x) - v_n(x) + \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$. Donc par sommation et passage à la limite, on obtient $U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.

(e) Soit $\gamma_n = H_n(1) - \ln(n)$. Comme $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ donc la suite numérique $H_n(1) - \ln(n)$ est convergente. On note γ sa limite.

(f) La série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée vérifiant le CSSA donc converge simplement sur $]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sont \mathcal{C}^1 . De plus la série des dérivées est une série alternées vérifiant le CSSA et donc converge uniformément sur $[a, +\infty[$ car $\sup_{x \geq a} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$.

D'où la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

On note f cette fonction.

(g) Pour tout $x > 1$, on a

$$S_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)^x} = H_{2n}(x) - 2^{1-x} H_n(x).$$

(h) Par passage à la limite, lorsque n tend vers l'infini, on obtient

$$f(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x), \quad \forall x \in]1, \infty[.$$

(i) D'après la question (2.d) on a $U(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$. De plus $U(x) = U(1) + o(1)$. Or

$U(1) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(1) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{p} - \ln(p+1) = \gamma$. Donc au voisinage de 1, la fonction ζ admet le développement suivant:

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

(j) Soit $x > 0$ et $a > -1$. Comme $\varphi_a(t) \sim \frac{1}{(a+1)t^{1-x}}$ au voisinage de zéro et $\varphi_a(t) = o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de l'infini on a l'intégrabilité de la fonction $t \rightarrow \varphi_a(t) = \frac{t^{x-1}}{a+e^t}$ sur $]0, +\infty[$.

(k) Pour $|a| < 1$ et $x > 0$, on a: $\left| t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^N (-ae^{-t})^n \right| \leq 2\varphi_a(t)$. De plus la série $t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-ae^{-t})^n$ converge simplement vers $\frac{t^{x-1}}{a+e^t}$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{a+e^t} dt = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{(n+1)^x}.$$

(1) Considérons la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{n-1}}{n^x}$ par rapport à la variable a et pour $x > 0$ fixé. C'est

une série alternée vérifiant CSSA pour $a \in [0, 1[$. Puisque $\lim_{a \rightarrow 1} (-1)^n \frac{a^{n-1}}{n^x} = \frac{(-1)^n}{n^x}$

existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge vers f , De plus

$\sup_{a \in [0, 1[} \left| R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{k-1}}{k^x} \right| \leq \sup_{a \in [0, 1[} \frac{a^n}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^x}$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[0, 1[$. D'où d'après le théorème de la double limite on a:

$\lim_{a \rightarrow 1} \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{n^x} = \Gamma(x) f(x) = \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t} dt$ par suite:

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t} dt = \Gamma(x) f(x)$, car $\left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t} dt \right| \leq (1-a) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t} dt$, et ce dernier tend vers zéro quand a tend vers 1.

(m) i. On a $\int_0^1 w_0(t) dt = \frac{1}{x}$ et pour $n \geq 1$ et

$$\int_n^1 w_n(t) dt = (-1)^n \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n-x+1} \right) = \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - (n+1)^2}$$

ii. On a $\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t} dt = \int_0^1 (t^{x-1} + t^{-x}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt =$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+x-1} + (-1)^n t^{n-x} \right) dt = \int_0^1 \left(t^{x-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n-1} (t^x - t^{-x}) \right) dt$$

Soit $K_N(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n t^{n-1} (t^x - t^{-x})$, alors $|K_N(t)| \leq 2(t^x - t^{-x})$ qui est intégrable sur $]0, 1[$. D'après le théorème CD

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 w_0(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^1 w_{n-1}(t) dt = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}.$$