Université de Sfax
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Matière : Analyse **Section** : PB **A. U** : 2016 – 2017
Devoir de contrôle du 2^{nd} **Semestre** **Durée :** $1^H, 30,$

(Documents non autorisés)

Une grande importance sera accordée à la rédaction et à la clarté du raisonnement, il convient de noter avec précision les numéros des différentes questions

---

Exercice 1

1. Enoncé le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. On considère la fonction φ définie par
$$\varphi(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x) - 2$$
a) Montrer que φ vérifie les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, \frac{1}{2}]$.
b) En déduire qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$.

1. Montrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(\frac{x}{3^n})$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{3^n}$.
3. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. *a*) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a :
$$0 \leq \tan(x) - x \leq x\tan^2(x)$$
b) En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2}.$$
2. Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$ est prolongeable par continuité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
3. La fonction f est-elle paire ou impaire ? justifier votre reponse
4. Montrer que f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
5. Calculer $f'(0)$.
6. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
7. Donner le tableau de variation de f puis sa représentation graphique.
8. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.