Université de Sfax
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Matière : Analyse **Section** : PB **A. U** : 2016 – 2017
Examen du 2^{nd} **Semestre** **Durée** : 2^H

(Documents non autorisés)

Une grande importance sera accordée à la rédaction et à la clarté du raisonnement, il convient de noter avec précision les numéros des différentes questions

---

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. (*a*) Montrer que le développement limité de f à l'ordre 3 au voisignage de 0 est donné par
$$f(x) = 4x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$
   (*b*) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en $+\infty$.
   (*c*) Donner l'équation de de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ à l'origine.
   (*d*) Donner l'équation de l'asymptote Δ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction f vérifie les conditions suivantes
$$(i)\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = 4 - \big(f(x)\big)^2;$$
$$(ii)\quad f(0) = 0.$$
3. Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
4. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ à l'origine.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes.

Exercice 2

1. Trouver les réels a et b tel que $\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx$.
3. Justifier la convergence de la suite de terme général $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k+n}{k^2-nk-6n^2}$ et calculer sa limite.

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ et H la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t)dt$
   (*a*) Justifier que f et H sont bien définies sur $[1;+\infty[$.
   (*b*) Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.
   (*a*) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x-1} = x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.
   (*b*) En utilisant une intégration par parties, déduire que
$$\int_1^3 f(x)dx = 3\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-\frac{1}{e}) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx.$$
   (*c*) Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln(1-\frac{1}{e}) \leqslant \ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln(1-\frac{1}{e^3})$.
   (*d*) En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx$.
   (*e*) Montrer que
$$\ln\Big(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\Big) \leqslant \int_1^3 f(x)dx \leqslant 3\ln\Big(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\Big).$$