Université de Sfax — A.U. 2016-2017

IPEIS — PB&G1

Algèbre / E.S.N°2

N.B. S.V.P. : Les structures d'espaces vectoriels sont relativement aux lois « + » et « . » usuelles (pour simplifier l'écriture e.v. désigne espace vectoriel et IR-e.v. désigne espace vectoriel sur IR, dit aussi IR-espace vectoriel).

Exercice 1 : Chacun des énoncés suivants est-il vrai ou faux (réponse réduite par Vrai ou Faux) ?

1) L'ensemble $\{ (x, y) \in IR^2 \mid 4x - y = 0 \}$ est un sous-e. v. du IR-e. v. IR^2.
2) L'ensemble $\{ (x, y) \in IR^2 \mid x - y = 3 \}$ est un sous-e. v. du IR-e. v. IR^2.
3) L'ensemble $\{ x \in IR \mid -6 \leq x \leq 6 \}$ est un sous-e.v. du IR-e.v. IR.
4) L'ensemble $\{ x \in IR \mid x \geq 0 \}$ est un sous-e.v. du IR-e.v. IR.
5) Soit un système de vecteur (v_1, v_2) qui est *libre*, où v_1 et v_2 sont deux vecteurs de IR^3 (IR^3 muni de la structure usuelle de IR-e.v.), alors on peut dire pour tous a, b, c, d $\in$IR,

$$si \;\; av_1 + bv_2 = cv_1 + dv_2 \quad alors \quad a = c \;\; et \;\; b = d$$

6) Soit u_1, u_2, u_3 des vecteurs de IR^4 (IR^4 muni de la structure usuelle de IR-e.v.), alors le système de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est générateur du sous-e. v. $Vect(\{u_1, u_2, u_3\})$ de l'espace IR^4.

   [On rappelle que $Vect(\{u_1, u_2, u_3\}) = \{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR \}$].
7) Soit w_1, w_2, w_3 des vecteurs de IR^4. *Si* (w_1, w_2, w_3) est *libre* alors ce système (w_1, w_2, w_3) est une *base* du sous-e. v. $Vect(\{w_1, w_2, w_3\})$ du IR-e.v. IR^4.
8) On peut trouver un système de vecteurs (u_1, u_2, u_3) libre *est générateur* du IR-e.v. IR^4.
9) Soit f une application linéaire de IR^3 vers IR^3 (IR^3 muni de la structure usuelle de IR-e.v.), alors on peut dire que *si* $Ker(f) = \{ (0, 0, 0) \}$ *alors f est injective.*
10) Soit g une application linéaire de IR^3 vers IR^3, alors on peut dire que *si* $Im(g) = IR^3$ *alors g est surjective.*

Exercice 2 : Soit les trois vecteurs U_1, U_2 et U_3 du IR-e.v. IR^3 donnés par,

$$U_1 = (1, 6, 0) \quad , \quad U_2 = (3, 4, 1) \quad , \quad U_3 = (2, -2, 1)$$

1. Déterminez rg (U_1, U_2, U_3) (dit le rang du système de vecteurs (U_1, U_2, U_3)).

   [Ind. : Par transformations élémentaires].

2. a. Que signifie qu'un système de vecteurs (V_1, V_2, V_3) est libre dans le IR-e.v. IR^3 ?

   b. Le système de vecteurs (U_1, U_2, U_3) est-il libre ? (on peut le déduire de 1.).

3. i. Que signifie qu'un système de vecteurs (V_1, V_2, V_3) est générateur du le IR-e.v. IR^3 ?

ii. Le système (U_1, U_2, U_3) est-il générateur du IR-e.v. IR^3 (par déduction) ?

4. Dans le cas où (U_1, U_2, U_3) n'est pas libre, déterminez trois réels c_1, c_2 et c_3 dont un au moins parmi eux est $\neq 0$ tels que $c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3 = (0, 0, 0)$ (on ne demande pas tous ces réels c_1, c_2 et c_3 possibles mais uniquement trois parmi eux).

[Ind. : On peut le faire par déduction de 1.].

5. Donnez une base de Vect ({ U_1, U_2, U_3 }).

[Ind. : On peut le faire par déduction de ce qui précède].

Exercice 3 : Soit l'application h de IR^3 vers IR^3 définie par,

$$h(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x + 3y + 4z,\ 4x - 3z)$$

(IR^3 étant muni de la structure usuelle de IR-espace vectoriel).

1. Déterminez le noyau *Ker(h)*.

2. Déduire que h est *injective*.

3. Justifiez que h est *surjective*, et donc que h est *bijective*.

4. Déduire rg(h) (dit le rang de h, on rappelle que rg(h) = $\dim_{IR}$ Im(h)).

5. Soit a, b, c $\in$ IR. D'après ce qui précède, *existe-t-il des réels x, y et z de IR* tels que,

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ 4x - 3z = c \end{cases}$$

6. Dans le cas d'existence, ces solutions x, y et z *sont-elles uniques* dans IR (pour a, b, c fixés) ?

7. a) Soit $B_0 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, la base naturelle (base canonique) du IR-espace vectoriel IR^3. Déterminez *la matrice* $M(h, B_0)$.

b) Retrouvez le rang de h (rg(h) est égal aussi au rang de cette matrice de h).

8. Cette matrice est-elle *inversible* (dans $M_3(IR)$) ?

9. Déterminez $M(h^{-1}, B_0)$.

[Ind. : $M(h^{-1}, B_0)$ est égale à l'inverse de la matrice $M(h, B_0)$].

10. Déduire les réels x, y et z vérifiant (S) en fonction des réels a, b et c.

Bon Travail