UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2015/2016

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de Synthèse d'Algèbre - Semestre N°2
Section : M.P.1

Durée : 02 heures | **Date : 18 Mai 2016** | **Nb de pages : 02**

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.
Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème

Partie I : Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est dite valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$. On rappelle que $\ker(f - \lambda Id) = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}$.

(1) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) (a) λ est une valeur propre de f.

(1) (b) $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\}$.

(1) (c) $f - \lambda Id$ n'est pas bijective.

(2) Soit B une base de E et $M = \text{mat}(f, B)$.

Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si, $\det(M - \lambda I_m) = 0$.

Partie II :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP' \quad \text{et} \quad < P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

(1) Vérifier que φ définit un endomorphisme de E et $\forall\ P \in E$, $\varphi(P) = ((X^2 - 1)P')'$.

(2) Déterminer la matrice $A_n = \text{mat}(\varphi, C)$, où C est la base canonique de $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

(3) Montrer que les valeurs propres de φ sont $\lambda_k = k(k + 1)$, $k \in \{0, ..., 2n\}$.

(4) Soit $F = \{P \in E, P(-X) = P(X)\}$ et $G = \{P \in E, P(-X) = -P(X)\}$.

(4) (a) Vérifier que $F = \text{Vect}\ \{1, X^2, ..., X^{2n}\}$ et $G = \text{Vect}\ \{X, ..., X^{2n-1}\}$.

(4) (b) En déduire que $E = F \oplus G$.

(5) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur E.

(6) Montrer que F et G sont orthogonaux.

(7) Soit $(P, Q) \in E^2$. Montrer que $< \varphi(P), Q >=< P, \varphi(Q) >$.

Dans la suite, on admet que, pour toute valeur propre λ_k de φ,

$\underline{\dim(\ \ker(\varphi - \lambda_k \mathbf{Id})) = \mathbf{1}}$, où $\ker(\varphi - \lambda_k Id) = \{P \in E,\ \varphi(P) = \lambda_k P\}$.

(8) (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$, il existe un unique polynôme P_k non nul et <u>unitaire</u> (de coefficient dominant égal à 1) tel que $\ker(\varphi - \lambda_k Id) = \text{Vect}(P_k)$.

(8) (b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$, degré de $P_k = k$.

(8) (c) Déterminer alors P_0 et P_1.

(9) Montrer que, pour tout $(j, k) \in \{0, 1, ..., 2n\}^2$, si $j \neq k$, alors $< P_j, P_k >= 0$.

(10) En déduire que $\{P_0, P_1, ..., P_{2n}\}$ est une base orthogonale de E.

Partie III : Dans cette partie, on suppose que $n = 1$. Ainsi, $E = \mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(1) Expliciter les valeurs λ_0, λ_1, λ_2 et les polynômes unitaires P_0, P_1 et P_2 obtenus dans la question **II – (8)**.

(2) Trouver une base orthonormée de G, puis calculer la distance de $R = X + 1$ à G.

(3) On note $C(\varphi) = \{h \in \mathcal{L}(E) \ / \ h \circ \varphi = \varphi \circ h\}$.

(3) (a) Montrer que $C(\varphi)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

(3) (b) Soit $D = \text{mat}(\varphi, B)$, où $B = \{P_0, P_1, P_2\}$. Vérifier que $D = diag(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

(3) (c) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{mat}(h, B)$.

(i) Montrer que $h \in C(\varphi) \iff DM = MD$.

(ii) En déduire que $h \in C(\varphi) \iff M$ est diagonale.

(3) (d) On note $D_3(\mathbb{R}) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ M \text{ est diagonale}\}$. Soit l'application :

$$\begin{aligned} \psi : C(\varphi) &\longrightarrow D_3(\mathbb{R}) \\ h &\longrightarrow \psi(h) = M = \text{mat}(h, B) \end{aligned}$$

(i) Montrer que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(ii) En déduire la dimension de $C(\varphi)$.