3 copies

Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2015-2016
MP1

Devoir de synthèse N°2

Durée: 2h — Epreuve: Analyse — Date: 16-05-2016

Exercice :

On dispose de deux urnes : une urne A contenant deux boules numérotées 0 et une urne B contenant deux boules numérotées 1.

On tire **simultanément** une boule de chaque urne qu'on remet dans l'autre urne.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros sur les boules de l'urne A après n échanges.

1. Déterminer la loi de X_1. (*Justifier brièvement vos réponses.*)
2. (a) Lorsque $X_n = 0$, quelle est la probabilité que $X_{n+1} = 1$? (*Justifier brièvement vos réponses.*)
   (b) Lorsque $X_n = 2$, quelle est la probabilité que $X_{n+1} = 1$? (*Justifier brièvement vos réponses.*)
3. Lorsque $X_n = 1$, déterminer la probabilité que $X_{n+1} = k$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. (*Justifier brièvement vos réponses.*)
4. Etablir une relation entre la loi de X_{n+1} et la loi de X_n.
5. Ecrire alors $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
6. (a) Montrer que $P(X_n = 1) = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Déduire la loi de X_n.

Problème

Dans ce problème, α désigne un réel strictement supérieur à 1.

Partie I

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = \dfrac{n\alpha - 1}{n\alpha} u_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
2. On considère la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{n\alpha - 1}{n\alpha}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est divergente et donner sa limite.

(b) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\ln u_n = \ln u_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right)$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Partie II

1. On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

   (b) En déduire que, $\forall n \geqslant 2$, $S_n = nu_1 \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) = u_1 \dfrac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k\alpha - 1)}{(n-1)!\alpha^{n-1}}$.

2. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente de somme totale égale à ℓ.

   (a) Montrer que $\ell > 0$.

   (b) Montrer que $u_n \sim \dfrac{\ell(\alpha - 1)}{n\alpha}$.

3. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

4. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $w_n = \dfrac{u_n}{n}$.

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est convergente.

   (b) En remarquant que $n\alpha(u_n - u_{n+1}) = u_n$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} w_k$ en fonction de u_1.

Partie III

1. Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs, telle que la série $\sum a_n$ converge.

   On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$.

   (a) Montrer que $R_n - R_{2n} \geqslant na_{2n}$.

   (b) Déduire que $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Retrouver alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.