INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP1

Devoir de contrôle d'Algèbre MP1

Durée : 1 h 30 mn Date : 23-02-2016 Nb pages : 2

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Exercice 1 :

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = (X^2-1)P'' - XP'(X) + P(X).$$

1. *Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base.*
2. *Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*
3. (a) *Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^k)$, $\forall k \in \{2, ..., n\}$.*

   (b) *Donner une base de $Im(\varphi)$ et déduire que $rg(\varphi) = n$.*
4. *Montrer que $dim_{\mathbb{R}} \ker(\varphi) = 1$, puis déduire que $\ker(\varphi) = Vect(X)$.*
5. *Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \ker(\varphi) \oplus Im(\varphi)$.*

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On définit par récurrence les puissances d'un endomorphisme f de E en posant :

$$f^0 = id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = \widetilde{0}$.

1. *Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent.*

   Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^k = \widetilde{0}\}$ admet un plus petit élément. En déduire qu'il existe un entier p vérifiant $f^p = \widetilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \widetilde{0}$. L'entier p est appelé l'indice de nilpotence de f.

2. *Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice p.*

   (a) *Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.*

   (b) *Montrer que la famille $B = \{x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\}$ est libre dans E.*

   (c) *Déduire que $p \leq n$, puis $f^n = \widetilde{0}$.*

   (d) *Calculer $(id_E - f) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k$. Déduire que $id_E - f$ est un automorphisme de E et donner son inverse.*

3. *Dans toute la suite on suppose que f est nilpotent d'indice n.*

   (a) *Justifier que la famille $B = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.*

   (b) *Soit g un endomorphisme de E vérifiant $g \circ f = f \circ g$.*

      (i) *Montrer que $g^k \circ f = f \circ g^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

      (ii) *Justifier l'existence et l'unicité d'un vecteur $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)$. On note $h = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$ un endomorphisme de E.*

      (iii) *Montrer que $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

      (iv) *Déduire que $g = h$.*

   (c) *Soit g un endomorphisme de E.*

   Montrer que $g \circ f = f \circ g$ si, et seulement si, il existe $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$.