Université De Sfax
INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEUR
****

A.U : 2018/2019
Section : MP1

Examen n°2 en Analyse Mathématique

Durée : 2H

Problème :

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{où} \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Partie I

On admet que F possède une limite finie en $+\infty$. L'objectif principal de cette partie et de déterminer cette limite.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on pourra écrire tout simplement
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$
2. Avec le même raisonnement que la question 1., on définit pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt.$$
   (a) En utilisant la formule trigonométrique $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\big(\frac{a+b}{2}\big)\sin\big(\frac{a-b}{2}\big)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = 0$.

   (b) Déterminer alors la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\sin(nt)dt = 0$.

   (b) Soit $h : t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

   i. Déterminer des équivalents simples de h et de h' en 0^+.

   ii. Déduire que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ce prolongement sera toujours noté h.

iii. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

4. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt=F\Big(\frac{\pi}{2}+n\pi\Big).$$

5. Déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que pour y tend vers $+\infty$ on a :

$$F(y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos(y)}{y}-\frac{\sin(y)}{y^2}+O(\frac{1}{y^2}).$$

Soit $x\geq y$ où y est un réel strictement positif fixé.

1. En effectuant deux intégrations par parties successives, montrer que

$$\int_y^x\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\cos(y)}{y}+\frac{\sin(y)}{y^2}-\Big(\frac{\cos(x)}{x}+\frac{\sin(x)}{x^2}\Big)-2\int_y^x\frac{\sin(t)}{t^3}dt.$$

2. Justifier que $2\int_y^x\frac{\sin(t)}{t^3}dt$ admet une limite finie lorsque $x\to+\infty$.

3. Montrer que $\left|2\int_y^x\frac{\sin(t)}{t^3}dt\right|\leq\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}$.

4. Déduire que $F(y)\underset{y\to+\infty}{=}\frac{\pi}{2}-\frac{\cos(y)}{y}-\frac{\sin(y)}{y^2}+O(\frac{1}{y^2})$. (Ind. : On fait tendre x vers $+\infty$ dans le résultat de la question 1.)

Partie III

Le but de cette partie est de déterminer la nature d'une série dont le terme général U_n est strictement positif et vérifie, à partir d'un certain rang, la relation suivante :

$$2F(2n\pi)U_n-\pi U_{n+1}=0.$$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a>0$ et $b>1$ tels que :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=1-\frac{a}{n}+O\Big(\frac{1}{n^b}\Big).$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $W_n=n^aV_n$. Démontrer que :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n}=1+O\Big(\frac{1}{n^c}\Big)$$

où $c=\min(2,b)$.

2. En déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ converge.

3. En déduire que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif.

4. (a) Montrer que si $a > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ converge.

   (b) Montrer que si $a \leq 1$ alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ diverge.

5. **Application** : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant à partir d'un certain rang la relation :

$$2F(2n\pi)U_n - \pi U_{n+1} = 0.$$

   (a) Montrer que pour n assez grand on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{1}{\pi^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   (Ind. : utiliser le résultat de la question 4. de la partie II)

   (b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Bon Travail