INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS DE SFAX

Département de la Préparation Mathématiques Physique Section MP1

Devoir de Synthèse d'Algèbre MP1 N°2

Durée : 2h Date : 28/05/2019 Nb pages : 03

Problème :

Dans tout le problème, on désigne par :

- $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-e.v des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_n est la matrice unité d'ordre n.
- $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Partie 1 : matrices semblables et rang

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

1. On définit, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A\,\mathcal{R}\,B \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables à I_n.
3. Montrer que deux matrices semblables ont même rang.
4. Les deux matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie 2 : matrices semblables et trace

1. Montrer que l'application :

$$tr \ : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \longmapsto tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K});\ tr(A) = 0\}$
   (a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Déduire la dimension de H.
   (c) Donner une base de H.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.
   (b) En déduire que, si A et B sont semblables, alors $tr(A) = tr(B)$.
   (c) La réciproque est-elle vraie ?
   (d) Les deux matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie 3 : Matrices d'un produit scalaire

Dans toute cette partie, $(E, <,>)$ est un espace euclidien muni d'une base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Définition 1 : On appelle **matrice du produit scalaire $<,>$ dans la base** B, la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2;\ a_{ij} = < e_i, e_j > .$$

On note, dans ce cas, $A = \text{Mat}_B(<,>)$.

1. **Exemple** : On suppose que $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire suivant :

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Déterminer la matrice $A = \text{Mat}_B(<,>)$ où $B = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Dans la suite, on suppose que $A = \mathbf{Mat}_B(<,>) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

2. (a) Montrer que A est une matrice symétrique.

   (b) On suppose que B est une base orthonormée de E. Déterminer A ?

3. Soient x et y deux vecteurs quelconques de E.

   Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $X = \mathrm{Mat}_B(x) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathrm{Mat}_B(y) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $< x, y >= {}^tXAY$.

   (b) Soient $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ une autre base de E et $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(< .,. >)$.

   Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y'_i e'_i$, $X' = \mathrm{Mat}_{B'}(x) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $Y' = \mathrm{Mat}_{B'}(y) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

   Vérifier qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $X = PX'$ et $Y = PY'$.

   (c) En déduire que $A' = {}^tPAP$.

4. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQAQ = I_n$.

5. En déduire que A est inversible et $\det(A) > 0$.

6. **Application : Matrices congruentes**

   Définition 2 : Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **congruentes**, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M' = {}^tPMP$.

   (a) Montrer que si $A = \mathrm{Mat}_B(<,>)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(<,>)$, alors A et A' sont congruentes et ont même rang.

   (b) Montrer que les deux matrices suivantes :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   sont équivalentes, non semblables et non congruentes ?