UNIVERSITÉ DE SFAX — Février 2019

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Etudes D'ingénieurs de Sfax

Devoir de Contrôle d'Algèbre N°2

Section : MP1	Durée : 01 Heure	N. de pages : 02

Exercice 1 (06 pts)

(1) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction rationnelle suivante : $F(X) = \dfrac{X}{(X+2)^2(X+1)}$

(2) En déduire que :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2(t+1)}dt = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+2)^2(k+1)} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$

(On donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 2 (14 pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$. Pour tout polynôme P de E, on pose :

$$f(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P' - nXP$$

(1) (a) Montrer que si $P \in E$, alors $f(P) \in E$.

(b) Montrer que f définit un endomorphisme de E.

(2) Soit λ un nombre réel.

(a) Montrer que si P est un vecteur non nul de $\ker(f - \lambda id_E)$, alors P vérifie :

$$\frac{P'}{P} = 2\frac{nX+\lambda}{X^2-1}$$

où id_E désigne l'application identité de E.

(b) Trouver deux réels $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ tels que :

$$2\frac{nX+\lambda}{X^2-1} = \frac{\alpha(\lambda)}{X-1} + \frac{\beta(\lambda)}{X+1}$$

(c) (i) Pour quelles valeurs de λ, l'expression $(X-1)^{\alpha(\lambda)}(X+1)^{\beta(\lambda)}$ est-elle un vecteur de E.

(ii) Combien y a t-il de telles valeurs de λ ? Comparer ce nombre de valeurs avec la dimension de E.

(iii) Pour ces valeurs de λ, donner une base et la dimension de $\ker(f - \lambda id_E)$.

(iv) Calculer $\mathrm{rg} f$ et donner un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à $f(\mathbb{R}_{2n}[X])$.