Université De Sfax
INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEUR
****

A.U : 2018/2019
Section : MP1

Devoir surveillé n°2 en Analyse Mathématique

Durée : 1H

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
f est dite absolument monotone (en abrégé **AM**) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

PARTIE I

1. Soient f et g deux fonctions AM sur I. Montrer que $f+g$ et fg sont AM sur I.
2. Soit P un polynôme à coefficients réels, montrer que P est AM sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si ses coefficients sont dans $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Soit f une fonction AM sur I, à l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que e^f l'est aussi.
   (b) Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{-\ln(1-x^2)}{2}$.
      i. Montrer que f est AM sur $]0,1[$.
      ii. Que peut-on dire alors de la fonction g définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?
4. Dans cette question on considère f une fonction AM sur $]a,b[$ où $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$.
   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en a (à droite) et que $\lim\limits_{a^+} f \geq 0$. On notera toujours f le prolongement obtenu.
   (b) Avec un raisonnement par récurrence, montrer que f est de classe C^∞ sur $[a,b[$ et qu' elle est AM sur $[a,b[$.
   (c) Le même phénomène se produit-il en b ?

PARTIE II

Soient $0 < b \leq +\infty$ et f une fonction **AM** sur $[0,b[$ et : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

1. Soit $x \in [0,b[$ fixé. En étudiant la monotonie de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'elle converge vers une limite $g(x)$ telle que $g(x) \leq f(x)$.
2. On admet que $g = f$ sur $[0,b[$.
   (a) i. Montrer que si f s'annulle en un point $x_0 \in]0,b[$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(0) = 0$.
      ii. Montrer alors que : si f s'annulle en un point de $]0,b[$ alors elle est nulle sur tout $[0,b[$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$, déteminer l'ensemble des fonctions f AM sur $[0,b[$ tel que $f^{(p)}$ s'annulle en un point de $]0,b[$.