UNIVERSITÉ DE SFAX ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2019/2020

Devoir de Contrôle de Mathématiques

On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ et $\|\ .\ \|$ la norme associée. Par ailleurs, on désigne par $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $w = (1, -1, 1)$. On pose, pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $f(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. (a) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(w)$. Déduire que f n'est pas un automorphisme.
   (b) Préciser le rang de f. Déterminer alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ s'écrit sous la forme

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) i. Vérifier que $A^2 = A$.
   ii. Que représente alors l'endomorphisme f?
   iii. Donner A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Sans calculer le polynôme caractéristique P_A de A, déterminer les valeurs propres de la matrice A.
6. Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. Trouver alors une représentation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.
7. On pose $a = \frac{1}{\sqrt{3}}\, u$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $c = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$.

   Montrer que $\mathcal{B} = (a, b, c)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f.
8. Déduire une matrice inversible P telle que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Montrer que f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.
10. Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $d(u, \mathrm{Im}(f))$.