INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEUR
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

PC 2 - PT 2
Décembre 2017

# DEVOIR DE SYNTHÈSE $N^o$ 1

## ALGÈBRE

Durée : 2 heures

**Exercice : (8 points)**

On désigne par $n$ un entier supérieur ou égal à 2, et par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

On note $f$ l'application suivante:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X) \end{array}$$

où $P'(X)$ est le polynôme dérivé de $P(X)$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par $f$.
   On note, $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. (a) Déterminer la matrice $M$ de $\widetilde{f}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Déterminer toutes les valeurs propres de $\widetilde{f}$. En déduire que $\widetilde{f}$ est diagonalisable.
4. Déterminer le sous espace propre de $\widetilde{f}$ associé à la valeur propre 1.
5. Soient $k$ un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$ et $P_k$ un élément non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $f(P_k) = \dfrac{n-k}{n} P_k$.
   (a) Vérifier que 1 est une racine de $P$.
   (b) Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en fonction de $k$.
6. Déterminer tous les sous espaces propres de $\widetilde{f}$.

## Problème : (12 points)

**Définition:** On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est cyclique d'ordre $p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$; s'il existe $a \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes:

- $f^p(a) = a$,
- La famille $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est génératrice de $E$,
- La famille $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

Dans ce cas la famille $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est appelée un cycle de $f$.

1. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{K}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

   (a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de $E$.

   (b) Calculer $f^3(e_1)$. Ecrire la matrice de $f$ selon $\mathcal{B}'$.

   (c) En déduire que $f^4 = id$. (On ne demande pas de calculer $A^4$).

   (d) En déduire que $f$ est cyclique d'ordre 4 est que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de $f$.

2. On considère dans cette question un endomorphisme $f$ de $E$ cyclique d'ordre $p$ et soit $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ un cycle de $f$.

   (a) Montrer que $p \geq n$.

   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.

   (c) En déduire que $f^p = id_E$ et que $f$ est bijectif.

   (d) On note $m$ le plus grand des entiers naturels $k$ tel que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ est libre. On note $E_m = vect((a, f(a), ..., f^{m-1}(a)))$.

      i. Montrer que $f^m(a) \in E_m$.

      ii. Montrer que, pour tout $k \geq m$, $f^k(a) \in E_m$.

      iii. En déduire que $(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a))$ est une base de $E$ est que $m = n$.

      iv. Justifier que la famille $(id, f, \ldots, f^{m-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

3. On note $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ les $n$ scalaires tels que $f^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(a)$.

   On note $g$ l'endomorphisme: $g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k$.

   (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $g(f^m(a)) = f^{n+m}(a)$.

   (b) En déduire que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k$.

   (c) Ecrire la matrice de $f$ selon la base $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$.