UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2017/2018**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de Contrôle d'Analyse
P.T.2- P.C.2

Durée : 1 heure 30 mn **Date : 24 Octobre 2017**

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ par : $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1}$.

Partie A :

Pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\| = \max\{|a_i|; 0 \leq i \leq N\}$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)P(t)dt. \end{array}$$

1. Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Justifier que T est bien définie.
3. Montrer que T est une forme linéaire.
4. (a) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], |T(P)| \leq 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt\right)\|P\|.$$

   (b) En déduire que T est lipschitzienne de $(\mathbb{R}[X], \| \ \|)$ vers $(\mathbb{R}, | \ |)$.

   (c) Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ fixé, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{H} := \{P \in \mathbb{R}[X]; \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)(P(t) - P_0(t))dt \leq 0\}.$$

   Montrer que $\mathcal{H}$ est un fermé de $(\mathbb{R}[X], \| \ \|)$.

Partie B :

On définit la fonction L par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ L(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, on note encore f le prolongement ainsi obtenu.

2. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\exp(x)-1}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\exp(x)-1}dx$.
4. (a) Montrer que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que la fonction L est prolongeable par continuité en 0.
   (c) Prouver que $\forall a \geq e$, $\displaystyle\int_e^a \frac{\ln(t)}{t-1}dt \geq \int_e^a \frac{1}{t-1}dt$.
   (d) Déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$.
   (e) Prouver alors que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\exp(-kx)dx$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\exp(-kx)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que : $\forall k \geq 1, I_k = \dfrac{1}{k^2}$.
6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{x\exp(-nx)}{\exp(x)-1}dx$$

7. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $0 \leq \dfrac{x}{\exp(x)-1} \leq 1$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\dfrac{1}{n} \leq L(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 0$.
8. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}$.
9. Pour $x \in]0,1[$, on pose $H(x) = L(x) + L(1-x) - \ln(x)\ln(1-x)$.
   (a) Vérifier que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et calculer H'.
   (b) En déduire que

$$\forall x \in]0,1[, L(x) + L(1-x) - \ln(x)\ln(1-x) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

   (c) Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$.