INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

PC2-PT 2
Décembre 2017
Durée : 2h

Devoir de synthèse $N^\circ 1$

Problème I:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les suites de fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad \text{et} \quad g_n(x) = nxe^{-2nx}.$$

1. (a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note S_α sa somme définie sur $\mathbb{R}_+$ par $S_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

   (b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

   (c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha < 0$. (Indication: on pourra calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |u_n(x)|$).

On suppose dans la suite que $\alpha \geqslant 0$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

   (a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $R_n(x) \geqslant g_n(x)$.

   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) Montrer que pour $x > 0$, $S_\alpha(x) \geqslant \dfrac{x}{e^x - 1}$.

   (b) En déduire que S_α n'est pas continue en 0.

Problème II:

L'objectif de ce problème est de déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions suivante: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\, dt$.

Soit la suite numérique $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\, dt$.

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0.
3. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer I_n en fonction de n.
6. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
7. On pose $v_n = \sqrt{n}\, I_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \log \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Étudier la convergence de la suite $(\log v_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt{n}}$.
   (c) Déterminer la nature des séries numériques suivantes $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{I_n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n I_n$.
8. (a) Montrer que l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0, 1[$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t}}$. (Ind: utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$).
9. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t}} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)\sqrt{1-t}}\, dt$.
10. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$.
11. Trouver le domaine de définition de l'application $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.