UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2019/2020**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de contrôle d'Algèbre - Semestre N°2

Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 1h **Date : 24 Juillet 2020** **Nombre de pages : 1**

Exercice 1/

1. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.
2. En déduire que $(2,-2)$ et $(-2,2)$ sont des minimums locaux de f.

Exercice 2/

Soient $\Omega = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi : (u,v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. **a)** Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur Ω.

   b) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, expliciter ϕ^{-1} et justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telleque :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

   On pose $F = f \circ \phi$.

   a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

   b) En déduire la forme de l'expression de F puis celle de f.

3. Dans cette question on suppose que f vérifie l'equation aux dérivées partielles suivantes :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ax + by$$

   où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Soit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Montrer que g est linéaire si est seulement s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \alpha x + \beta y$.

   b) Trouver une fonction linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ \ x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = ax + by$$

   c) En déduire qu'il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) = h(xy) + ax - by.$$