Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2019-2020
PC2

Examen N°2

Durée: 2H **Epreuve: Analyse** **Date: 24-07-2020**

Exercice :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un réel de $]0,1[$.
On considère une urne contenant des boules blanches et noires avec la probabilité p de tirer une boule blanche et la probabilité $q = 1-p$ de tirer une boule noire.
On effectue une succession de tirages d'une boule, **avec remise** et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la deuxième boule blanche.
Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements B_k respectivement N_k, ≪Obtenir une boule blanche≫ respectivement ≪Obtenir une boule noire≫ au $k^{\text{ème}}$ tirage.

1. (a) Décrire les événements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$ en fonction des B_k et N_k, puis calculer leurs probabilités.
   (b) Soit A l'événement ≪Obtenir une seule boule blanche parmi $(n+1)$ tirages≫. Calculer $P(A)$.
   (c) En déduire que $P(X=n) = (n+1)p^2q^n$.
2. On considère Y une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$ telle que :
$$P(Y=k/X=n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Montrer que $U = Y+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (c) Déduire l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y.
3. Soit la variable aléatoire $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable Z.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de Z sachant $(X=n)$.
   (c) En déduire que Z suit la même loi que Y.
   (d) Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes.
   (e) Calculer la covariance $Cov(Y,Z)$ du couple (Y,Z) et déduire la covariance $Cov(X,Y)$ du couple (X,Y).

Problème :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n : x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}.$$

Partie I

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$,
$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x+1).$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^n$ est intégrable sur $]0, 1]$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$I_n(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} I_n(x+1).$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = I_n(x)$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. On pose alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt.$$

(b) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer Γ' et Γ'' à l'aide des intégrales.

(c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(d) En déduire un équivalent de Γ à droite en 0.

(e) i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

ii. Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ telque $\Gamma'(\alpha) = 0$.

iii. Montrer que Γ est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

iv. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

4. Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi_n : t \in]0, +\infty[\longmapsto \begin{cases} t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n & \text{si } t \in [0, n], \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite de fonctions (φ_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction

$$\varphi : t \in]0, +\infty[\longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

(b) En appliquant le théorème de la convergence dominée à (φ_n), montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt = \Gamma(x).$$

Indication : utiliser le fait que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt = n^x f_n(x).$$

(b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\quad f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$.

Partie II

1. Soit $x \in]1, +\infty[$. En appliquant le théorème d'intégration terme à terme sur $]0, +\infty[$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

2. (a) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]1,+\infty[$.

(c) En déduire que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]1,+\infty[$.

3. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$,

$$\ln(f_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k).$$

(b) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$|f_n'(x)| \leqslant f_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right).$$

Indication : utiliser le fait que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x})$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]1,+\infty[$.

(d) En déduire que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de calsse $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

⋆⋆⋆***Bon Travail***⋆⋆⋆