Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax	IPEIS	03 Janvier 2023 $2^{ème}$ année PC AU : 2022 / 2023

Devoir de Physique du Fin du 1er Semestre
(Durée : 4 H)

Instructions générales :
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

PARTIE A : Mécanique des fluides

On donne : $\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,z) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$.

Afin de mettre en évidence l'effet du vent sur une passerelle nous proposons d'utiliser un modèle simplifié d'écoulement permanent et irrotationnel d'un fluide incompressible autour d'un cylindre de longueur infinie, de rayon R et d'axe Oz. Loin du cylindre l'écoulement est uniforme à la vitesse $\vec{V}(M) = V_o\vec{u}_x$ et à la pression du fluide est P_0. ρ étant la masse volumique du fluide et les forces de pesanteur sont supposées négligeables.

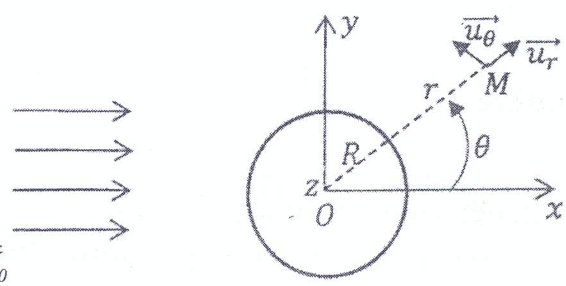

Figure 1

A.1- Écoulement autour d'un cylindre fixe

Dans cette partie, on considère que le cylindre est fixe dans le référentiel $\Re(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ supposé galiléen. On repère un point M du fluide par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) de pôle O et d'axe polaire Ox.

A.1.1- Montrer que le champ des vitesses de cet écoulement dérive d'un potentiel scalaire ϕ. En déduire l'équation aux dérivées partielles à la quelle obéit ϕ.

A.1.2- Déterminer les conditions aux limites vérifiées par le champ des vitesses $\vec{V}$.

A.1.3- On définit le potentiel ϕ des vitesses associé à l'écoulement par :

$$\phi(r,\theta) = (V_0\, r + \frac{k}{2\pi r})\, cos\theta \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

a- Donner les expressions des composantes du champ de vitesses V_r et V_θ.

b- A partir des conditions aux limites vérifiées par ce champ de vitesses, exprimer k en fonction de R et V_0.

c- Tracer l'allure des lignes de courant et indiquer les positions des points d'arrêt.

A.1.4- Appliquer la relation de Bernoulli entre un point loin du cylindre et un point à la surface du celui-ci. En déduire le champ de pression $P(R,\theta)$ à la surface du cylindre en fonction de ρ, V_0, θ et P_0.

A.1.5- Montrer à l'aide d'arguments de symétrie, que la résultante $\vec{F}_p$ des forces de pression est nulle. Pourquoi ce modèle ne permet pas d'expliquer la portance exercée sur le cylindre.

A.2- Écoulement autour d'un cylindre en rotation

On considère maintenant que le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_z$ autour de son axe Oz. On admet que le potentiel des vitesses est désormais donné par : $\phi(r,\theta) = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)cos\theta + R^2\,\Omega\,\theta$.

A.2.1- Déterminer la nouvelle expression du champ de vitesses.

A.2.2- l'écoulement présente maintenant deux points d'arrêt à la surface du cylindre de coordonnées $(R,\ \theta)$, telles que $|sin\theta| = \frac{1}{2}$. Montrer que $|\Omega| = \frac{V_0}{R}$.

A.2.3- En déduire le champ de pression $P(R,\ \theta)$ à la surface du cylindre en fonction de $\rho, R, \Omega, V_0, \theta$ et P_0.

A.2.4- Montrer à l'aide d'arguments de symétrie, que la résultante $\vec{F}_p$ des forces de pression s'exerçant sur le cylindre est dirigée selon la direction $\vec{u}_y$.

A.2.5- Déterminer la force de pression $\vec{F}_p$ exercée par le fluide sur une portion du cylindre de longueur L en fonction de ρ, R, Ω, V_0 et L. On donne : $\int_0^{2\pi} sin^3\theta d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} sin^2\theta\ d\theta = \pi$.

A.2.6- Mettre la force $\vec{F}_p$, dite force de Magnus sous la forme $\vec{F}_p = \Gamma\,\vec{V}_0 \wedge \vec{\Omega}$ en exprimant la constante Γ en fonction des données de l'écoulement.

A.2.7- Commenter le sens de la force $\vec{F}_p$ selon le sens choisi pour le vecteur $\vec{\Omega}$ et tracer l'allure des lignes de courant.

A.2.8- Donner une valeur approchée du module de la force $\vec{F}_p$ pour les valeurs numériques suivantes : $L = 70\ m, R = 1\ m, V_0 = 15\ m.s^{-1}$ et $\rho = 1{,}3\ kg.m^{-3}$.

PARTIE B : Physique des Ondes

On donne : $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\,\vec{B}\right)\vec{C}$ et $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

I- Onde Electromagnétique

a- Polarisation de la lumière

Préliminaire

1 – Rappeler la définition générale d'une onde.

2 – Définir la polarisation d'une onde électromagnétique. Préciser les notions suivantes : polarisation rectiligne, polarisation circulaire droite, lumière non polarisée, polarisation partielle.

3 – Justifier l'absence de polarisation de la lumière émise par le Soleil. Décrire un processus permettant d'obtenir, à partir de celle-ci, une lumière de polarisation rectiligne.

Onde électromagnétique polarisée dans le vide

On étudie les ondes électromagnétiques dans le cas particulier où la propagation est faite dans le vide.

4 – Exprimer les équations de Maxwell dans un domaine vide dépourvu de charges et de courants et associer à chacune d'elles une signification physique.

5 – Établir l'équation de propagation d'onde dans le vide associée au champ électrique, puis la nommer en précisant sa solution générale.

On considère une onde électromagnétique monochromatique, de pulsation ω, décrite par le champ électrique : $\vec{E}_1(z,t) = E_0\,cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_0\,sin(\omega t - kz)\vec{u}_y$,

où E_0 et k sont des constantes réelles strictement positives.

6 – Préciser la direction et le sens de propagation de l'onde décrite par le champ électrique $\vec{E}_1(z,t)$.

Indiquer, avec justification, si cette onde est progressive et/ou plane et/ou transverse électrique.

7 – Déterminer la condition, portant sur k et ω, pour laquelle le champ $\vec{E}_1(z,t)$ est physiquement acceptable dans le vide. Rappeler le nom usuel d'une telle condition.

8 – Définir la vitesse v de propagation de cette onde dans le vide. Commenter le résultat.

9 – Déterminer l'état de polarisation de cette onde. En pratique, comment peut-on mettre en évidence ce type de polarisation?

10 – On considère une deuxième onde électromagnétique dont le champ électrique $\vec{E}_2(z,t)$ est de la forme : $\vec{E}_2(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x - E_0 \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y$.

Caractériser l'état de polarisation de cette onde.

11- Déduire la nature de polarisation de l'onde résultante dont le champ électrique est : $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(z,t) + \vec{E}_2(z,t)$.

Réalisation pratique : Modification de la polarisation d'une onde lumineuse

La figure 2 montre un banc optique avec les éléments suivants:

- une lampe de lumière blanche (S), source d'une lumière naturelle,
- un polariseur (P_1), dont l'axe de passage est suivant la direction (Oy),
- une lame quart-onde $(\lambda/4)$ dont les axes neutres de la lame (x',y') sont à 45° par rapport à l'axe (Ox),
- un polariseur (P_2), est orienté dans la même direction que le polariseur (P_1),
- un écran (E).

Une vue de face des éléments, (P_1), (P_2) et la lame $(\lambda/4)$ est présentée à la figure 2.

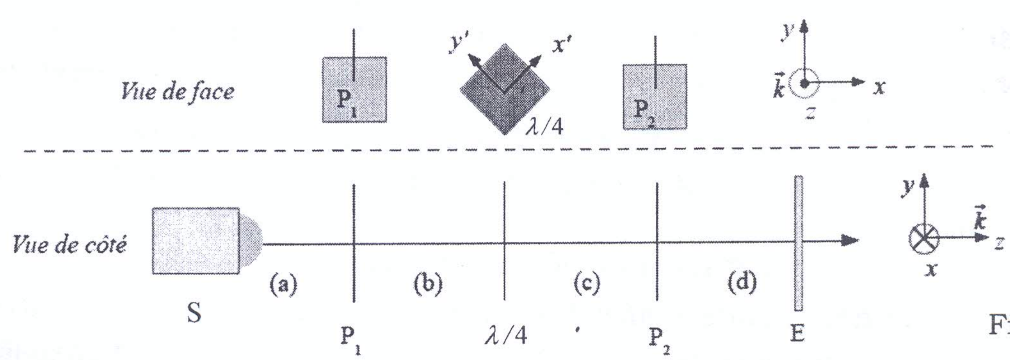

Figure 2

L'onde électromagnétique de la lumière naturelle dont le champ électrique est décrit par l'expression $\vec{E}_i(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_0 \cos(\omega t - kz - \varphi(t))\vec{u}_y$

où la phase $\varphi(t)$ varie de manière aléatoire dans le temps, mais lentement par rapport à l'amplitude de l'onde.

12- Pourquoi une lumière naturelle est non polarisée ?

13- Quel est l'effet d'une lame quart d'onde sur la polarisation d'une onde lumineuse.

14- Écrire le champ électrique dans les régions d'espace entre chaque élément optique, c-à-d les régions (a), (b), (c) et (d).

15- Recopier le schéma du banc optique et présenter la polarisation dans les régions (a), (b), (c) et (d) dans la vision de face.

b- Aspects énergétique et corpusculaire d'une onde électromagnétique

On considère une particule ponctuelle P, de charge q et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel d'étude $(\mathcal{R}_0)$. Elle est située au point M à l'instant t.

16- Rappeler l'expression de la force électromagnétique de Lorentz que subie cette particule chargée, s'il règne en M à l'instant t un champ $(\vec{E},\vec{B})$ créé par d'autres sources.

On notera ρ et $\vec{J}$ les densités volumiques de charge et de courant dans le milieu chargé.

17- Etablir, à partir des équations de Maxwell, la formulation locale de l'équation de conservation de la charge. Que signifie physiquement l'équation obtenue ?

18- Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée, dans le référentiel $(\mathcal{R}_0)$, par le champ électromagnétique au milieu chargé.

On note dans la suite $\vec{R}(M,t)$ le vecteur de Poynting et $u_{em}(M,t)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique.

19.1- Ecrire l'équation locale de la conservation de l'énergie, reliant $\vec{R}$, u_{em}, $\vec{J}$ et $\vec{E}$. Expliquer en quelques lignes ce que signifie physiquement l'équation obtenue.

19.2- Montrer que, dans le cas d'un régime harmonique, la puissance moyenne entrant par rayonnement à travers une surface fermée, fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, est intégralement transmise à la matière contenue dans le volume intérieur à cette surface.

19.3- Rappeler les expressions de $\vec{R}$ et de u_{em} en fonction des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

19.4- Vérifier que ces expressions sont compatibles avec l'équation de conservation de l'énergie établie à la question **19.1/**.

Impulsion ou quantité de mouvement du rayonnement électromagnétique

On considère l'interaction entre une onde électromagnétique plane progressive harmonique (*E.M.P.P.H*), de période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, se propageant dans le vide suivant la direction et le sens de (Oz), et une particule chargée P de charge q et de masse m, animée (sous l'action de la force de Lorentz) d'un mouvement sinusoïdal forcé dans $(\mathcal{R}_0)$, de période T, dans le plan $z=0$ au voisinage du point O. L'onde incidente n'est pas forcément polarisée rectilignement, elle peut être polarisée circulairement, elliptiquement...

20.1- Ecrire le champ électrique associé à cette onde.

20.2- Dans le cas d'une onde *E.M.P.P.H*, rappeler la relation existant entre $\vec{E}$, $\vec{B}$ et c la célérité de la lumière dans le vide, et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire orientant l'axe (Oz).

20.3- En exploitant le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule chargée, déterminer la variation de l'impulsion (ou de la quantité de mouvement) $\Delta\vec{p}=\int_0^T \dfrac{d\vec{p}}{dt}\,dt$ cédée, en une période T, par le champ électromagnétique à la particule chargée (sans recourir à la notion de photon) ; on exprimera le résultat en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}_z$ de l'axe (Oz), de la célérité c de la lumière dans le vide, et de l'énergie $W_{reçue}$ fournie, dans $(\mathcal{R}_0)$, par le champ électromagnétique à la particule en une période.

<u>*Indication*</u> :

l'énergie *E.M* élémentaire reçue par une particule chargée, s'écrit : $dW_{reçue}=P_{reçue}\,dt=\vec{F}\,\vec{v}\,dt$

21.1- On rappelle que la lumière peut être décrite par un flux de photons se propageant à la vitesse de la lumière c. L'impulsion p_{ph} et l'énergie E_{ph} du photon sont données par les relations d'Einstein : $\vec{p}_{ph}=\hbar\vec{k}$ et $E_{ph}=hf$, où h est la constante de Planck et $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$.

21.2- En déduire le lien entre l'impulsion et l'énergie d'un photon.
21.3- Montrer que ce résultat est cohérent avec celui de la question **20.3/**.

Pression de radiation

On considère un faisceau lumineux, de section S, éclairant en incidence normale une paroi parfaitement réfléchissante (miroir) sur laquelle rebondissent les photons. On note $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire à l'axe (Oz) de propagation de la lumière (figure 3).

22- Lien entre pression de radiation et densité volumique énergie électromagnétique u_{em}.
22.1- On considère un seul photon. Exprimer, en fonction de h, f, c, et $\vec{u}_z$, la variation de sa quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_{ph} = \vec{p}_{ph,réflechi} - \vec{p}_{ph,incident}$ pendant le choc avec la paroi.

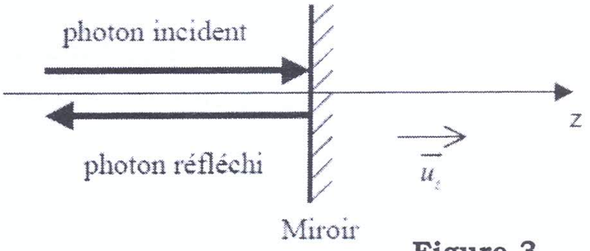

Figure 3

22.2- Que peut-on dire de la quantité de mouvement {photon + paroi} ? En déduire la variation $\Delta\vec{p}_{paroi}$ de la quantité de mouvement de la paroi lors du choc d'un photon avec la paroi (Miroir).
22.3- On considère à présent l'ensemble des photons du faisceau lumineux, tous de même énergie ($E_{ph} = hf$). Exprimer, à l'aide des questions précédentes, la quantité de mouvement élémentaire $d\vec{p}_{paroi}$ transmise à la paroi pendant la durée élémentaire dt, en fonction de S, dt, $\vec{u}_z$ et u_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique.
On pourra introduire la grandeur densité volumique n_0 des photons.
22.4- En déduire le lien entre la pression de radiation électromagnétique P_{em} exercée par les photons sur la paroi et la densité volumique u_{em} d'énergie électromagnétique.
22.5- L'expression obtenue est-elle encore vérifiée lorsque les photons ne sont pas tous de même énergie (l'incidence restant normale) ?
23- Lien entre force de pression de radiation et puissance de la source lumineuse.
23.1- On reprend la question **22.3/**, et on introduit à présent Φ le nombre de photons émis par seconde par la source (tous les photons émis par la source sont émis dans la direction $+\vec{u}_z$). Exprimer à nouveau la quantité de mouvement élémentaire $d\vec{p}_{paroi}$ transmise à la paroi pendant dt, en fonction de h, f, c, Φ, dt et $\vec{u}_z$.
23.2- En déduire la force de pression de radiation électromagnétique $\vec{F}_r$ exercée sur la paroi réfléchissante en fonction de h, f, c, Φ et $\vec{u}_z$.
23.3- Au lieu de raisonner en terme de flux de photons, on caractérise une source par sa puissance $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'énergie émise par cette source lumineuse par unité de temps. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ du faisceau incident en fonction de h, λ, c et Φ.
23.4- En déduire la force de pression de radiation $\vec{F}_r$ en fonction de $\mathcal{P}$, c, et $\vec{u}_z$.

II- Onde mécanique

a- Vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités

On s'intéresse dans cette partie aux vibrations libres d'une corde métallique. On supposera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera les effets de la pesanteur.

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant *t*. L'axe vertical ascendant est (Oy).

1 – *Mise en équation du mouvement transversal d'une corde sans raideur.*

1.1- Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ?

1.2- Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir deux équations liant les dérivées partielles par rapport à *t* et à *x* de la vitesse transversale d'un point de la corde $v(x,t)=\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ et de la projection sur les axes (Ox) et (Oy) de la force de tension exercée à l'abscisse *x* par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche $\vec{T}(x,t)$. On fera apparaitre la tension T_0 en la justifiant.

1.3- Montrer que la fonction $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$T_0\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}-\mu\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(I.1)}$$

Déduire l'expression la célérité *c* des ondes transversales sur la corde. Nommer cette équation ? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

1.4- On peut lire dans une documentation technique (piano) que « une corde métallique est tendue à 85 kg ».

Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension T_0 d'une corde ? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de $\Phi=1{,}1\,mm$. La masse volumique de l'acier valant $\rho=7{,}8\,10^3\,kg\,m^{-3}$, calculer la célérité *c* des ondes transversales sur la corde.

2 – *Modes propres d'une corde sans raideur, fixée aux deux extrémités.*

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x=0$ et $x=L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t)=y(L,t)=0$.

2.1- Qu'appelle-t-on onde stationnaire ? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (I.1) sont de la forme $y(x,t)=y_0\cos(\omega t-\varphi)\cos(kx-\varphi')$. Quelle est la relation entre ω et k ?

2.2- Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L. Donner l'expression de la solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode propre numéro *n*. Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

2.3- La solution générale de l'équation (I.1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t)=y(L,t)=0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit :

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Comment peut-on déterminer les constantes a_n et b_n ?

b- Application : Corde d'un piano

Lorsqu'un instrumentiste frappe une touche du clavier d'un piano, celle-ci actionne un mécanisme qui fait déplacer un marteau et frappe la corde. Celle-ci est alors en état de vibrations libres.

La corde d'un piano est donc frappée à l'instant initial par un marteau de largeur 2a (avec a faible), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On donne les conditions initiales suivantes (juste après l'attaque de la corde par le marteau) en tout point de la corde :

– la forme initiale de la corde donnée par : $y(x,t=0)=0$;

– la vitesse initiale de la corde donnée par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t=0)=\begin{cases} u_0 & \textit{pour } x\in[x_0-a,\ x_0+a] \\ 0 & \textit{en dehors de cet intervalle} \end{cases}$$

3.1- On donne le résultat du calcul :

$$y(x,t)=\frac{4u_0\,a\,x_0}{c\,L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin\left(n\dfrac{\pi a}{L}\right)}{n\dfrac{\pi a}{L}}\,\frac{sin\left(n\dfrac{\pi x_0}{L}\right)}{n\dfrac{\pi x_0}{L}}\;sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\,sin\left(n\frac{\pi c t}{L}\right).$$

Quel est l'effet de la largeur a du marteau ? Pour une corde de piano de longueur $L=65\,cm$ (« Do 4 », fréquence fondamentale $f_1=262\,Hz$), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible.

La largeur du marteau vaut $2a=2\,cm$. Commenter.

3.2- Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n?

4 – *Conséquences sur la conception des cordes d'un piano.*

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n=1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'étendent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f=28\,Hz$) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f=4,2\,10^3\,Hz$).

4.1- Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f.

4.2- On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f=262\,Hz$, on a une longueur de corde $L=65\,cm$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?