Institut Préparatoire
aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année Universitaire 2022-2023
Section: PC 2- PT 2

Devoir de Contrôle d'Analyse n. 1

Durée: 1 heure 30 minutes

Exercice (8 points)

On désigne par Φ_x la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$\Phi_x(t) = \frac{t^x}{1+t}.$$

1) Déterminer l'ensemble D des réels x, pour les quels Φ_x est intégrable sur $]0,1]$.

2) Soit $x \in D$.

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (-1)^n t^{n+x}\, dt$ converge.

(b) Justifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^1 (-1)^k t^{k+x}\, dt\Big) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\, dt.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\, dt\Big) = 0$$

(d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt.$$

3) Montrer que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \mathrm{Log}2.$

4) A l'aide d'un encadrement de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\Big) = 0$$

Problème (12 points)

Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par: $$U_n(\alpha) = \frac{n^\alpha\, n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}.$$

1) Vérifier que pour tout $n \geq 2$,

$$\mathrm{Log}U_{n-1} - \mathrm{Log}U_n = \alpha\mathrm{Log}(1-\frac{1}{n}) + \mathrm{Log}(1+\frac{\alpha}{n})$$

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 2}\Big(\mathrm{Log}U_{n-1} - \mathrm{Log}U_n\Big)$ est convergente.

3) En déduire que la suite $(U_n(\alpha))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\Gamma(\alpha)$ **strictement positif**.

4) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $U_n(1) = \dfrac{n}{n+1}$. Déduire la valeur de $\Gamma(1)$.

5) Soit $\alpha > 0$.

(a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $U_n(\alpha+1) = \dfrac{\alpha\cdot n}{\alpha+n+1}U_n(\alpha)$.

(b) En déduire que,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha).$$

6) On pose pour $n \geq 1$, $\gamma_n = \Big(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\Big) - \mathrm{Log}n.$

(a) Montrer que la suite (γ_n) converge vers un réel γ (On pourra étudier $\sum_{n\geq 2}(\gamma_n - \gamma_{n-1})$)

(b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\alpha e^{\alpha\gamma_n}\prod_{k=1}^{n}[(1+\frac{\alpha}{k})e^{-\frac{\alpha}{k}}] = \frac{\alpha}{n^\alpha}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k}) \quad \text{et que} \quad \frac{\alpha}{n^\alpha}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k}) = \frac{1}{U_n(\alpha)}$$

(c) En déduire la formule de Weirstrass

$$\alpha e^{\gamma\alpha}\lim_{n\to+\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}[(1+\frac{\alpha}{k})e^{-\frac{\alpha}{k}}]\Big) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

7) Soit $\alpha > 0$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{\alpha}{n} - \mathrm{Log}(1+\frac{\alpha}{n})\Big)$ est convergente.

(b) Utiliser la formule de Weirstrass (question 6) c)) pour établir que:

$$\mathrm{Log}\Gamma(\alpha) = -\gamma\cdot\alpha - \mathrm{Log}\alpha + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{\alpha}{n} - \mathrm{Log}(1+\frac{\alpha}{n})\Big).$$

(c) Déduire du question 4) que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \mathrm{Log}(1+\frac{1}{n})\Big) \quad \text{et que par la suite} \quad \gamma > 0.$$