UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2022/2023

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

**Examen d'Algèbre - Semestre N°1**
**Sections : P.C.2 et P.T.2**

**Durée : 2h** — **Date : 02 Janvier 2023** — **Nombre de pages : 3**

## Exercice 1/ (4 pts)

On pose $E = \mathbb{R}^n$, $B_c = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}, \forall k \in \{1, ..., n\}$.

1. Ecrire $M$ la matrice de $f$ relativement à la base $B_c$.
2. (a) Pour tout entier $k \in [1, \frac{n+1}{2}]$ et tout réel $\alpha$, calculer $f(e_k + \alpha e_{n-k+1})$.

   (b) Montrer que pour tout entier $k \in [1, \frac{n+1}{2}[$, $\exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$, avec $a_k \neq b_k$ que l'on calculera telle que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres à déterminer.
3. Dans cette question on suppose que $n$ est pair et on pose $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, dans ce cas l'entier $k \in [1, \frac{n+1}{2}[= [1, p]$. Montrer que $f$ est diagonalisable.

## Exercice 2/ (6 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $B_c = (e_1, e_2, ..., e_{2n+1})$. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :
Pour tout $i \in \{1, ..., 2n+1\}$;

$$\begin{cases} \varphi(e_i) = e_1, & \text{si } i \neq n+1 \\ \varphi(e_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i & . \end{cases}$$

1. (a) Déterminer la matrice $A$ associée à l'endomorphisme $\varphi$ relativement à la base $B_c$.

   (b) Déterminer $rg(\varphi)$ ; le rang de $\varphi$.

   (c) En déduire que 0 est une valeur propre de $\varphi$.

   (d) Donner une base du sous espace propre de $\varphi$ associé à la valeur propre 0.
2. Montrer que : $Im(\varphi \circ \varphi) \subset Im(\varphi)$.

3. (a) Montrer $B = (e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i)$ est une base de $Im(\varphi)$

   (b) Soit $\widetilde{\varphi}$ l'endomorphisme induit par $\varphi$ à $Im(\varphi)$ défini par : $\forall x \in Im(\varphi); \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

   Ecrire la matrice $A'$ associée à $\widetilde{\varphi}$ dans la base $B$.

4. Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de $\varphi$ et $x$ un vecteur propre de $\varphi$ associé à $\lambda$.

   (a) Montrer que $x \in Im(\varphi)$.

   (b) En déduire toutes les valeurs propres de $\varphi$.

   (c) L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

**Problème/ (10 pts)**

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de E.
On dit que $u$ est nilpotent d'indice $p \geq 2$ si $u^{p-1} \neq 0$ *et* $u^p = 0$.
On définit les matrices suivantes :

$$J_1 = (0) \textit{ et pour } n \geq 2,\ J_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

**Partie 1 :**

On suppose que $n = 2$. Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$.

1. (a) Montrer qu'il existe $x_0$ de E tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   (b) Montrer que la famille $\{x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\}$ est libre.

   (c) En déduire que $p = 2$

2. Montrer que $Im(u) = Ker(u)$

3. Construire une base de E dans laquelle la matrice de $u$ est égale à $J_2$.

4. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $tr(M) = det(M) = 0$

**Partie 2 :**

On suppose que $n \geq 3$. Soit $u$ un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang $r$.

1. Montrer que $Im(u) \subset Ker(u)$ et que $2r \leq n$.

2. On suppose dans cette question que $Im(u) = Ker(u)$.

   On pose $H$ un sous espace vectoriel de E tel que $E = H \oplus Ker(u)$ et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $H$.

   Montrer que $B = \Big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\Big)$ est une base de $E$.

3. Donner la matrice de $u$ dans la base $B$. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

<u>**Partie 3 :**</u>

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $A$.

1. Calculer le rang de $A$. Sans faire de calcul, déduire le polynôme caractéristique de $A$.
2. Montrer que $A$ est nilpotente et trouver son indice de nilpotence.
3. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(A) \oplus \mathbb{R}.e_1$
   (b) En déduire que $A$ est semblable à la matrice $diag(J_2, J_1)$. Donner une matrice $P$ inversible telle que $A = P.diag(J_2, J_1).P^{-1}$.
4. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R$ de $M_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A$. On dit dans ce cas que la matrice $R$ est une racine carrée de $A$. On note $\psi$ l'endomorphisme canoniquement associé à $R$.
   (a) Montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par $\psi$ et que $\psi$ est nilpotent.
   (b) En déduire l'ensemble des racines carrées de $A$.
   (<u>Indication</u> : On pourra considérer $R' = P^{-1}RP$ )