INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

PT2-PC2
Janvier 2023
Durée: 2H

Devoir de Synthèse d'Analyse

Problème

Partie I

On pose pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ convergence simplement sur $\mathbb{R}_+$.

   Dans la suite, on notera F sa somme: $\quad F(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.
4. Montrer que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.

Partie II

On considère pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h définie par:

$$\forall\ t \geqslant 2, \qquad h(t) = \frac{xe^{-tx}}{\ln(t)}\ .$$

1. Vérifier que h est intégrable sur $[2, +\infty[$.
2. Montrer que: $\forall x > 0, \quad \forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant h(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} h(t)dt.$
3. En déduire que: $\forall x > 0$,
$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)} + \int_2^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{\ln(t)}dt.$$
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour $x > 0$,
$$\int_2^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{\ln(t)}dt = \frac{e^{-2x}}{\ln(2)} - \int_2^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t(\ln(t))^2}dt.$$

5. (a) Justifier que l'application $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et calculer la valeur de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi(t)dt$.

   (b) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{t(\ln(t))^2} dt = \frac{1}{\ln(2)} .$$

   (c) Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t(\ln(t))^2} dt$.

      i. Montrer que si $0 < x \leqslant y$ alors $g(x) \geqslant g(y)$.

      ii. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{\ln(2)}$.

6. Déduire de ce qui précède que F est continue en 0.

Partie III

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On s'intéresse, dans cette question, à la dérivabilité de F à l'origine.

   (a) Vérifier que l'application: $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que pour tout $N \geqslant 3$ et $x > 0$: $\displaystyle\frac{F(x)}{x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-Nx}}{\ln(n)}$.

   (c) En déduire que pour tout $N \geqslant 3$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)}$.

   (d) Que peut-on conclure ?

3. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$:

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-n)^{p-1}}{\ln(n)} e^{-nx}(p - nx).$$

   (b) Montrer que F et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie IV

1. Etudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

2. Montrer que: $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.