Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax	IPEIS	*19 Octobre 2022* *2ème année PC* *AU : 2022 / 2023*

Devoir de contrôle de Physique N° 01
(Durée : 2 H)

Partie I : Mécanique des fluides

Dans cette partie, l'atmosphère terrestre est supposée isotherme et que les molécules d'air sont toutes identiques et obéissent au modèle des gaz parfaits. L'air, de masse volumique ρ, sera toujours considéré en équilibre thermodynamique local.

1. Établir l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$P+\rho gz=C^{te}.$$

2. En déduire les positions des plans isobares.

3. Soit $n(z)$ le nombre de particules par unité de volume à l'altitude z et $n_0=n(z=0)$ celui au niveau du sol.

On désignera par $P(z)$ la pression à l'altitude z (Figure 1).

3.1 Écrire l'équilibre mécanique d'une tranche d'épaisseur dz de surface S comprise entre les altitudes z et $z+dz$.

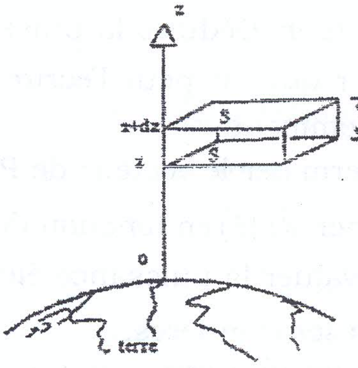


Figure 1

En déduire que $P(z)$ peut s'écrire : $P(z)=P_0\,exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT}\right)$.

Avec : $P_0=P(z=0)$, M est la masse molaire des molécules d'air de l'atmosphère, g la constante de pesanteur, R la constante des gaz parfaits et T la température.

3.2 Établir l'expression de la masse volumique $\rho(z)$ en fonction de z, g, T, de la constante de Boltzmann k_B et la masse m d'une particule. Donner l'interprétation énergétique de cette expression en déduire le facteur de Boltzmann.

3.3 En déduire l'expression de $n(z)$.

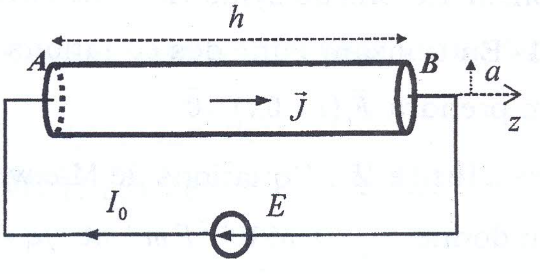
3.4 Représenter l'allure de l'évolution de $n(z)$ pour deux températures T_1 et T_2 avec $T_2>T_1$. Interpréter les courbes obtenues.

Partie II : Electromagnétisme

<u>Problème 1</u> : Bilan énergétique dans un câble

Un câble métallique en cuivre, cylindrique d'axe (Oz), de longueur h, de rayon a et de conductivité γ est traversé par un courant d'intensité I_0 constante, imposé par un générateur de tension continue.

La densité volumique de courant associée $\vec{J}=J_0\vec{u}_z$ est uniforme. La longueur du câble est supposée assez grande par rapport à son rayon pour qu'on puisse négliger les effets de bord $(h>>a)$.



1- Expliquer l'appellation « les effets de bord sont négligeables ».

2- Exprimer l'intensité I_0 traversant le câble en fonction de la densité J_0 et le rayon a.

3-1- Donner l'expression de la loi d'Ohm locale reliant le vecteur $\vec{J}$ au champ électrique $\vec{E}$ qui doit apparaitre dans le conducteur. Expliquer l'origine de ce champ électrique.

3-2- Déterminer l'expression de la différence de potentiel U_{AB} qui apparait entre les extrémités du câble.

3-3- En déduire l'expression de la résistance électrique R de ce câble en cuivre.

<u>A.N</u> : Calculer la valeur de la résistance par unité de longueur $R_{linéique}$ du câble, de section $S = \pi a^2 = 2{,}5\, mm^2$ et de conductivité $\gamma = 6\,10^7\, S\, m^{-1}$.

4- Le câble conducteur, parcouru par le courant de densité volumique $\vec{J}$, crée en un point $M(r,\theta,z)$ un champ magnétique $\vec{B}(M)$. En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression de $\vec{B}(M)$ à l'intérieur du conducteur.

5- Déterminer la puissance volumique p_J dissipée par effet Joule dans le câble conducteur. Déduire la puissance totale $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le conducteur. Montrer que on peut l'écrire sous la forme : $\mathcal{P}_J = R\, I_0^2$; R est la résistance déterminer précédemment.

6- Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}(M)$ en tout point M à l'intérieur du conducteur. Exprimer $\vec{R}(M)$ en fonction de I_0, r, γ et $S = \pi a^2$.

7-1- Evaluer la puissance électromagnétique $\mathcal{P}_{échangée}$ transférée par le câble cylindrique à travers ses frontières.

7-2- Retrouver ce résultat en effectuant un bilan énergétique global.

Le générateur de tension est remplacé maintenant par un générateur de tension basses fréquences. Il s'impose dans le câble conducteur un courant électrique $i(t)$ sinusoïdal de pulsation ω qui suit la loi : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. La densité de courant associée est supposée uniforme sur une section du câble.

8- Rappeler la condition de l'application de l'A.R.Q.S. en introduisant une relation liant a, c et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; c est la célérité du champ électromagnétique dans le vide. Ecrire les équations de Maxwell, valables dans le milieu conducteur, dans le cadre de l'A.R.Q.S.

On suppose que le milieu demeure neutre en régime lentement variable.

9- Donner l'expression du champ électrique primaire $\vec{E}_0(t)$ qui règne dans le conducteur et déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en un point M à l'intérieur du câble.

10- Montrer qu'il se produit un champ électrique induit $\vec{E}_i(M,t)$. A l'aide des considérations de symétrie et des invariances, déterminer la structure de $\vec{E}_i(M,t)$.

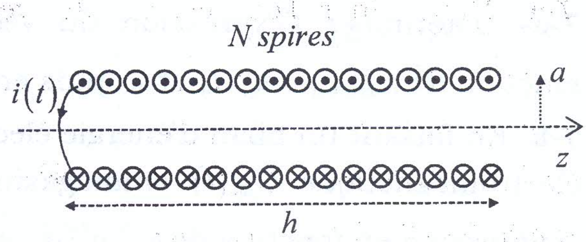
11- En utilisant l'une des équations de Maxwell, déterminer l'expression de $\vec{E}_i(M,t)$. On prendra $\vec{E}_i(r=0,t) = \vec{0}$.

<u>**Problème 2**</u> : Equations de Maxwell et l'ARQS magnétique

On donne : $\varepsilon_0 = 8{,}85\,10^{-12}\, F\, m^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\, H\, m^{-1}$

On considère un solénoïde d'axe (Oz) de rayon a et de hauteur $h >> a$. Ce solénoïde comportant n spires par unité de longueurs, est parcouru par un courant variable $i(t)$.

On suppose dans une première approximation que la variation d'intensité du courant $i(t)$ soit suffisamment lente pour admettre que le champ magnétique dans tout le solénoïde s'écrit comme dans le cadre de la statique : $\vec{B}_0(M,t) = \vec{B}_0(t) = \mu_0\, n\, i(t)\, \vec{u}_z$.



1- Expliquer l'hypothèse présentée $h >> a$.

2- Rappeler les équations de Maxwell et montrer qu'il doit exister un champ électrique induit $\vec{E}_1(M,t)$ crée par les variations temporelles de $\vec{B}_0(M,t)$ en un point $M(r,\theta,z)$ situé à l'intérieur du solénoïde.

3- En faisant une analyse de la symétrie de la distribution de courant, montrer que le champ électrique induit s'écrit sous la forme : $\vec{E}_1(M,t) = E_1(r,t)\,\vec{u}_\theta$.

Montrer qu'on a : $\vec{E}_1(r,t) = -\dfrac{1}{2}\mu_0\, n\, r\, \dfrac{di(t)}{dt}\, \vec{u}_\theta$.

4-a- Montrer que les variations temporelles de $\vec{E}_1(r,t)$ sont à l'origine de création d'un nouveau champ magnétique secondaire $\vec{B}_2(M,t)$ qui s'ajoute à $\vec{B}_0(M,t)$ tel que :

$\vec{B}_{tot}(M,t) = \vec{B}_0(M,t) + \vec{B}_2(M,t)$.

En répétant ce raisonnement on peut écrire

$\vec{B}_{tot}(M,t) = \vec{B}_0(M,t) + \vec{B}_2(M,t) + \vec{B}_4(M,t) + \cdots$.

Cette méthode de détermination du champ magnétique total s'appelle méthode des approximations successives.

4-b- Montrer que : $\vec{B}_2(M,t) = \left(\dfrac{r}{2c}\right)^2 \dfrac{1}{i(t)} \dfrac{d^2 i(t)}{dt^2}\, \vec{B}_0(t)$. On prendra $\vec{B}_2(r=0,t) = \vec{0}$.

5- Pour évaluer l'effet du champ $\vec{B}_2(M,t)$ sur le champ magnétique total $\vec{B}_{tot}(M,t)$ dans le solénoïde, on fera le calcul pour un courant $i(t)$ sinusoïdal : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

Montrer que le champ magnétique $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_0 + \vec{B}_2$ peut être confondue à $\vec{B}_0(t)$ si le rayon a du solénoïde est très inférieure à une valeur a_0 que l'on exprimera en fonction de c et ω, où c est la vitesse de propagation du champ électromagnétique dans le vide. Commenter.

6- On rappelle que pour une fonction périodique, on a :

$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \dfrac{1}{2}$ et $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \dfrac{1}{2}$ de même $\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t) \rangle = 0$.

6-a- Donner l'expression de la densité volumique de l'énergie électromagnétique $u_{em}(r,t) = u_e(r,t) + u_m(r,t)$.

6-b- Evaluer le rapport $\dfrac{\langle u_e(r,t) \rangle}{\langle u_m(r,t) \rangle}$. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em}(r,t)$ dans le cadre de l'ARQS magnétique.

6-c- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}(r,t)$ et évaluer sa valeur moyenne $\langle \vec{R}(r,t) \rangle$.

6-d- Réaliser un bilan local d'énergie électromagnétique et commenter.

7-a- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}(r,t)$ pour $r=a$ d'abord en fonction de : μ_0, n, a, I_0 et ω puis en fonction de μ_0, n, a, $i(t)$.

7-b- En faisant un bilan d'énergie électromagnétique, déterminer l'expression de l'énergie électromagnétique $U_{em}(t)$ emmagasinée à l'instant t dans le solénoïde. On explicitera l'expression en fonction de μ_0, n, a, h et $i(t)$.

7-c- En déduire l'expression de l'inductance propre L du solénoïde en fonction de μ_0, N, a, h. Conclure.

On donne :

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$.