UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

IPEIS

Année universitaire : 2022/2023

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

PC2-PT2

# Devoir de contrôle d'Algèbre n° 2

**Durée : 1h30 min** **Date : 21 février 2023** **Nombre de pages : 3**

## Exercice : (7 pts)

Pour $n \geq 1$, on note par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels et $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre $n$.
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme associée notée $\|\ \|$.
Une matrice symétrique réelle $S$ est dite **positive** si et seulement si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\quad \langle X, SX\rangle \geq 0$$

et $S$ est dite **définie positive** si et seulement si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\quad \langle X, SX\rangle > 0.$$

1. Soit $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$, vérifier que ${}^tXSY = \langle X, SY\rangle = \langle SX, Y\rangle$.
2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $S$ et $X$ un vecteur propre de $S$ associé à $\lambda$, prouver que ${}^tXSX = \lambda\|X\|^2$.
   (b) On suppose que $S$ vérifie : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX = 0$.
   Montrer que toute valeur propre de $S$ est nulle puis déduire que $S = 0$.
   (c) Montrer que $S$ est positive, si et seulement si, ses valeurs propres sont positives.
3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $S$ est définie positive.
   (b) Toutes les valeurs propres de $S$ sont strictement positives.
4. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Déduire que $S$ est définie positive, si et seulement si, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tPP$.
5. Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et déduire que la matrice $S$ est symétrique définie positive.

**Problème : (13 pts)**

Dans tout le problème, soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ son sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, $(n \in \mathbb{N})$.

## $1^{\text{ère}}$ Partie :

1. Montrer que $\forall P, Q \in E$, l'application $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ par
$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx.$$
Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
3. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $E$ par récurence :
$$\begin{cases} P_0 & = 1 \\ P_n & = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k \ , \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$
   (a) Vérifier que $deg(P_n) = n$, pour tout $n \geq 0$.
   (b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $E$.
   (c) Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de $E_n$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(Q) = q < n$, déduire que $\langle P_n, Q \rangle = 0$.

## $2^{\text{ème}}$ Partie :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n e^{-x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) montrer qu'il existe $T_n \in E$ tel que $f_n^{(n)}(x) = e^{-x}T_n(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) On pose $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$, établir que $L_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k X^k$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E$.
      i. Prouver que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n^{(n)}(x)P(x)dx = (-1)^k \int_0^{+\infty} f_n^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)dx$
      ii. En déduire que $\langle P, L_n \rangle = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n P^{(n)}(x)e^{-x}dx$.
   (b) Montrer que la famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthogonale de $E_n$.
   (c) i. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :
$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx.$$
      ii. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!$, pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$.
   (d) En déduire que la famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthonormée de $E_n$.

3. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) = XP'' + (1-X)P'. \end{array}$$

(a) Montrer que $E_n$ est stable par $\varphi$.

(b) Soit $\varphi_n$ l'endomorphisme de $E_n$ induit par $\varphi$.

i. Montrer que $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \big\{ -k, \ \ \forall k \in \{0, \ldots, n\}\big\}$.

ii. Déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on a $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi_n + k\ \mathrm{id}_{E_n})\big) = 1$ et montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_n + k\ \mathrm{id}_{E_n}) = vect\{L_k\}$, *(<u>ind :</u> on pourra utiliser 1.b).*