

EXERCICE

- ① 1) f est linéaire et $\det A = 6 \neq 0$ donc f est un automorphisme.

2) * $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ -11 & -5 & -7 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 34 & 19 & 26 \\ 26 & 27 & 26 \\ -33 & -19 & -25 \end{pmatrix}$

③

1) d'où $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$

* A est inversible $\Rightarrow A^{-1}(A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3) = 0$

1) d'où $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)$

②

1) $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$



3) $V_1 = e_1 + e_2 - 2e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $AV_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) $AV_1 = V_1 \Rightarrow f(V_1) = V_1$

②

1) $\lambda = 1$ est une valeur propre de A et V_1 est un vecteur propre associé à $\lambda = 1$

4). $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ -3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

⑤

3 $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

5). On a d'après 3, $\lambda = 1$ est une valeur propre donc

1 $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

et par suite: $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

③

1 Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

1 $\lambda_3 = 3$,
ces valeurs propres sont distinctes donc A est diagonalisable.

les vecteurs propres.

1 $\lambda = 1$ $V_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$

1 $\lambda = 2$ $V_2 = e_1 - e_2$

1 $\lambda = 3$ $V_3 = e_1 + e_2 - e_3$

④

la matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1 et A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et $A = P D P^{-1}$

Problème I

Partie I

1.)

$$I(R) = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

$$1 \quad x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta.$$

(*)

$$1 \text{ ligne } I = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R$$

$$2 \quad = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2} \right) = \pi(1 - e^{-R^2})$$

$$2) \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\pi - \frac{e^{-R^2}}{2} \cdot \pi \right) = \pi$$

(2)

$$\therefore \text{donc } \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

$$3) e^{-(x^2+y^2)} > 0 \quad \forall x, y$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \pi$$

(*)

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Partie II

$$1) \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(\alpha x^2 + \beta y^2)} dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\alpha} x)^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\beta} y)^2} dy \right)$$

③

2

$$\text{dnc } \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} = 1 \Rightarrow \pi = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$\alpha \beta = \pi^2$$

④

2) Calcul de $E(XY)$.

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xy e^{-\alpha x^2 - \beta y^2} dx dy$$

1

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} y e^{-\beta y^2} dy \right)$$

2

$$= 0. \quad \text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

③

3) densités marginales:

$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \cdot e^{-\beta y^2} dy = e^{-\alpha x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta y^2} dy$$

1

②

$$= \frac{e^{-\alpha x^2} \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}$$

1

de même

①

$$f_y(y) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{-\beta y^2}}{\sqrt{\alpha}}$$

4)

①

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

①

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_y(y) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} y e^{-\beta y^2} dy = 0$$

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

calcul de $E(x^2)$.

$$E(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot x e^{-\alpha x^2} dx$$

par parties :

$$u = x \longrightarrow u' = 1$$

$$V' = x e^{-\alpha x^2} \longrightarrow V = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}$$

$$E(x^2) = \underbrace{+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \left[\frac{-x}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha} \quad \text{car } \sqrt{\alpha\beta} = \pi$$

$$V(x) = \frac{1}{2\alpha}$$

① de même $V(y) = \frac{1}{2\beta}$

x et y sont indépendants car.

① ~~$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y) = 0$~~

Partie III

1) $\alpha = \beta$, comme $\alpha\beta = \pi^2$

① on a $\alpha = \beta = \pi$

2°)

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{n} E(X) = 0 \text{ car } E(X) = 0$$

$$V(Z_n) = E(Z_n^2) - E^2(Z_n) = E(Z_n^2)$$

$$Z_n^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i,j} X_i X_j \right)$$

$$E(Z_n^2) = \frac{1}{n^2} \cdot n E(X^2) + 2 \sum_{i,j} E(X_i X_j)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi n}$$

$$3^\circ) \quad a) \quad P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \text{ avec } \sigma^2 = V(Z_n)$$

$$2 \swarrow \quad P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2 2\pi n}$$

$$\text{on en deduit que } A(n) = \frac{1}{a^2 2\pi n}$$

$$2 \swarrow \quad \text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = 0$$

$$b) \text{ m a. } P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) \leq A(n)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) = 0$$

2

$$n \rightarrow +\infty$$

Problème II

Partie I

1) Un existe bien car:

1 : c'est

1

$$1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2 = (\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x > 0; \quad 0 < \lambda < 1$$

2)

a) pour $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} &= \frac{1}{a} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{a} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_0^y = \frac{\pi}{2a} \end{aligned}$$

b) $t = \lg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\lambda^2 - 2\lambda\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{(1+t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\lambda^2) - 2\lambda(1-t^2)} \\ &= \frac{2}{(1+\lambda)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 t^2 + 1} \end{aligned}$$

d'après a) $u_0 = \frac{2}{(1+\lambda)^2} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)} = \frac{\pi}{1-\lambda^2}$

$$3) (1+\lambda^2) u_0 - 2\lambda u_1 = \int_0^\pi \frac{(1+\lambda^2) - 2\lambda \cos x}{1+\lambda^2 - 2\lambda \cos x} \cdot dx = \int_0^\pi dx = \pi$$

donc $(1+\lambda^2) u_0 - 2\lambda u_1 = \pi$

Il vient que :

$$u_n + u_{n-2} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} u_{n-1}$$

(9)

Partie II

1) $E \neq \emptyset$ car si $v_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $(v_n)_n \in E$
soit $(v_n)_n \in E$ et $(w_n)_n \in E$ et $(X_n)_n = (u_n)_n + (w_n)_n$
 $= (u_n + w_n)_n$

pour $n \geq 2$; $(u_n + w_n) + (u_{n-2} + w_{n-2}) = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} (u_{n-1} + w_{n-1})$

soit $w_n + w_{n-2} = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} w_{n-1}$

d'où $(w_n)_n \in E$

si $\mu \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_n \in E$

alors pour $n \geq 2$ $(\mu v_n) + (\mu v_{n-2}) = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} (\mu v_{n-1})$

$(\mu v_n)_n \in E$

donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace des sc.f.

2) $v_n = r^n$, $r \neq 0$

$(v_n)_n \in E \Rightarrow r^n + r^{n-2} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} r^{n-1}$ pour $n \geq 2$

donc $r^{n-2} (r^2 - (\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}) r + 1) = 0$

$r \neq 0$; $r^2 - (\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}) r + 1 = 0$ 2

$\Delta = (\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda})^2 - 4 = (\frac{1 - \lambda^2}{\lambda})^2$

$r_1 = \frac{\frac{1 + \lambda^2}{\lambda} - \frac{1 - \lambda^2}{\lambda}}{2} = \lambda \Rightarrow r_1 = \lambda$

$$r_2 = \frac{\frac{1+\lambda^2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\lambda}}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{\lambda}.$$

3) famille libre

soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(r_1^n)_n + \beta(r_2^n)_n = (0)_n$.

1 $\leftarrow \alpha r_1^n + \beta r_2^n = 0 \quad \forall n \geq 0$

donc $\alpha \lambda^n + \beta \frac{1}{\lambda^n} = 0$

$n=0$ ① $\alpha + \beta = 0$

1 $\leftarrow n=1$ ② $\alpha \lambda + \beta \left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$

① $\Rightarrow \alpha = -\beta$

② $\Rightarrow \beta(-\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ et donc $\alpha = 0$

car $-\lambda + \frac{1}{\lambda} \neq 0$, $0 < \lambda < 1$

1 $\leftarrow$ donc $(\lambda^n)_n$ et $(\frac{1}{\lambda^n})_n$ forment une famille libre de E .

4) $(\lambda^n)_n ; (\frac{1}{\lambda^n})_n$ forment une base de E .

a) $(u_n)_n \in E$, car d'après 3) partie II

pour $n \geq 2$ $u_n + u_{n-2} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} u_{n-1} \Rightarrow (u_n)_n \in E$.

2) donc $(u_n)_n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(r_1^n)_n$ et de $(r_2^n)_n$.

il existe k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_n = k_1 (r_1^n)_n + k_2 (r_2^n)_n$

et donc $u_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$ pour tout $n \geq 0$

b) on a : $u_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$ pour $n \geq 0$

(5)

(2)

1 (1) - (2) $\Rightarrow$ (1)
car $p_{mold} <$
 $k_1 = \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}$

d'in
donc $p_m n \in \mathbb{N}$;

$$U_n = \frac{\pi \sqrt{2}^n}{1-\sqrt{2}}$$

$$U_n = \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{1-\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}^n$$

$$= \frac{\pi}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{(\sqrt{2}-1)^2}$$