

Corrigé

Exercice 1

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et préciser son rayon de convergence.

En dérivant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ on obtient :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n; R=1$$

2. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- (a) Montrer que $a_n = \frac{1}{n+2}; \forall n \in \mathbb{N}$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Donc

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= 2a_0 + 2a_1 x + 4a_1 x \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (2 + 4n + n(n-1)) x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (n^2 + 3n + 2) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+1)(n+2) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \end{aligned}$$

$$\text{or } x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Par unicité de développement en série entière on obtient : $a_n(n+1)(n+2) = (n+1) \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{n+2} \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ donc } R = 1$$

- (c) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $|x| = R$.

Pour $x = 1$; $a_n \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Pour $x = -1$ Il s'agit d'une série alternée vérifiant le C.S.S.A, elle donc convergente.

3. On pose $S(x) = x^2 y(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

- (a) Calculer $S'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\text{ et on a } S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}; \forall x \in]-1, 1[.$$

(b) En déduire $S(x)$ puis $y(x)$ en fonction de x

Comme $S(0) = 0$, alors

$$S(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = -\int_0^x dt + \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -x - \ln(1-x) \forall x \in]-1, 1[.$$

pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$; $y(x) = \frac{S(x)}{x^2} = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}$ et $y(0) = 0$

(c) Montrer alors que la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une fonction de classe C^∞ .

on a $f(x) = -y(x)$ donc f est une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$, elle est donc de classe C^∞ .

Exercice 2

A-

Soit M la matrice réelle carée d'ordre 3, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de M .

Les valeurs propres des M sont les racines de son polynôme caractéristique P_M

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-X \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = X^2(2-X) - (2-X) \\ &= (2-X)(X-1)(X+1). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de M sont $-1, 1$ et 2 .

(b) En déduire que M est elle diagonalisable.

M est une matrice d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distincts donc elle est diagonalisable.

2. Déterminer les espaces propres de M .

$$E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ x + 2y + z = -y \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc

$$E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{De même } E_1(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ et } E_2(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. Déterminer la matrice P inversible de coefficients $(0, 1, 1)$ sur la troisième ligne, vérifiant :
 $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer P^{-1} .

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Pour $n \geq 1$, calculer M^n .

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

B-Dans une galerie d'arts, un visiteur a le choix entre trois salles d'exposition numérotées 1, 2 et 3.

- Si à l'instant n , il est à la salle 1 ou 3, il choisit aléatoirement l'une des deux autres salles à l'instant $n+1$.
- Si à l'instant n , il est à la salle 2, il y reste à l'instant $n+1$.

A l'instant $n=1$, le visiteur se trouve à la salle n°1.

On pose X_n le numéro de la salle visitée à l'instant n , et on pose $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}MU_n, \forall n \geq 1$$

La famille $\{(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\}$ est un système complet d'événement, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 3)\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 3)\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) &= \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 3)\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 3)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 3)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1)$$

$$\text{Et par suite } U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n = \frac{1}{2}MU_n.$$

- (b) En déduire que $U_n = (\frac{1}{2})^{n-1}M^{n-1}U_1, \forall n \geq 1$.
 Par récurrence sur n .

(c) Déterminer la loi de X_n .

A l'instant $n = 1$, le visiteur se trouve à la salle n°1, donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Et par suite } U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^{n-1}-1} & 0 & \frac{1-(-1)^{n-1}}{2^{n-1}-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} & 0 & \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^{n-1}-1} \\ 2^{n-1} \\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} \end{pmatrix},$$

$\forall n \geq 1$.

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}, \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}; \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2^n}$$

2. Soit T la variable aléatoire réelle désignant le premier instant où le visiteur entre à la salle n°2.

(a) Montrer que : $T \leq n$ si et seulement si $X_n = 2$.

Si $X_n = 2$, à l'instant n le visiteur est à la salle n°2 donc $T \leq n$

Réciproquement si $T \leq n$ donc le visiteur a entré dans la salle n°2 avant l'instant n , il y reste dans les instants antérieurs en particulier à l'instant n .

(b) Dédurre la loi de G .

$$G(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\mathbb{P}(G \leq n) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \text{ donc } \mathbb{P}(G = n) = \mathbb{P}(G \leq n) - \mathbb{P}(G \leq n-1) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(c) Soit $G = T - 1$

i. Montrer que G suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. Comme $G = T - 1$ alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(G = n + 1) = \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).$$

ii. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire G .

$$\mathbb{E}(G) = 2. \text{ et } \mathbb{V}(G) = 2.$$

iii. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire T .

$$T = G + 1 \text{ donc } \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(G) + 1 = 3 \text{ et } \mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(G) = 2.$$

Problème II

Partie I :

On considère la fonction

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}.$$

1. Etudier les variations de F et dresser son tableau de variation.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. donc F est strictement

croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0.$$

2. En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité X .

F est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0$. donc F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

3. Montrer qu'une densité de X est $f_X(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

$$f_X(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

4. Soit $Y = \ln(1+e^X)$.

(a) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si $t \leq 0$; $F_Y(t) = 0$ car Y est à valeur strictement positives

$$\text{si } t > 0, F_Y(t) = P\{Y \leq t\} = P\{\ln(1+e^X) \leq t\} = P\{1+e^X \leq e^t\} = P\{e^X \leq e^t - 1\} = P\{X \leq \ln(e^t - 1)\} = F(\ln(e^t - 1)) = \frac{e^t - 1}{e^t} = 1 - e^{-t}.$$

(b) En déduire une densité de Y puis reconnaître sa loi.

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc Y est une variable aléatoire à densité.

Une densité de Y est donnée par :

$$f_Y(t) = \begin{cases} F'_Y(t) & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ \text{quelconque positive} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

(c) Donner l'espérance et la variance de Y .

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ et } Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 1.$$

Partie II :

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que Y .

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k = Y_1 + \dots + Y_n$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n .

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = n.$$

$$Var(S_n) = \sum_{k=1}^n Var(Y_k) = n. \text{ car les } Y_i \text{ sont indépendantes}$$

(b) Dédurre, pour $n \geq 2$, que S_n ne suit pas une loi exponentielle.

Pour la loi exponentielle la variance est le carré de l'espérance. ce qui n'est pas le cas pour la variable S_n pour $n \geq 2$.

2. On se propose dans cette question de déterminer la loi de S_n .

On rappelle que la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités f et g , suit une loi de densité :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

(a) Montrer qu'une densité de S_2 est donnée par :

$$f_{S_2}(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que S_2 est à valeurs positives, donc $f_{S_2}(x) = 0$ si $x \leq 0$.
Pour $x > 0$;

$$f_{X_1}(t)f_{X_2}(x-t) = \begin{cases} e^{-t}e^{t-x} & \text{si } t > 0 \text{ et } x-t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 < t < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{d'où } f_{S_2}(x) = \int_0^x e^{-x} dt = xe^{-x}.$$

- (b) En remarquant que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, montrer par récurrence qu'une densité de S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour $n = 1, S_n = X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Soit $n \geq 1$, supposant que

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et montrons que

$$f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

S_{n+1} étant une var à valeurs positives donc $f_{S_{n+1}}(x) = 0$ si $x \leq 0$
De plus $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes donc

$$f_{S_{n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(t)f_{X_{n+1}}(x-t)dt$$

D'autre part, pour $x \geq 0$; et en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t)f_{X_{n+1}}(x-t) &= \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}e^{t-x} & \text{si } t > 0 \text{ et } x-t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} & \text{si } 0 < t < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{donc } f_{S_{n+1}}(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-x} dt = e^{-x} \left[\frac{t^n}{n!} \right]_0^x = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

- (c) Calculer alors la valeur de $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$; $\forall n \geq 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x) dx = 1 \text{ donc } \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!.$$

3. (a) Montrer que S_n^* converge en loi vers une variable aléatoire réelle dont on précisera la loi.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant pour espérance $m = 1$ et pour variance $\sigma^2 = 1$ donc d'après le théorème de la limite centrale on :

$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\text{or } \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - n}{\sigma\sqrt{n}} = S_n^*$$

- (b) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$.

Par définition de convergence en loi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\{S_n^* \leq 0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \frac{1}{2}$

$$\text{or } \mathbb{P}\{S_n^* \leq 0\} = \mathbb{P}\{S_n \leq n\} = \int_0^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx$$

Partie III :

1. Pour tout réel strictement positif α , on pose $Z_\alpha = \exp\left(\frac{Y}{\alpha}\right)$.

Calculer la fonction de répartition de Z_α

Z_α prend ses valeurs dans $]1, +\infty[$ donc $F_\alpha(t) := \mathbb{P}\{Z_\alpha \leq t\} = 0$ si $t \leq 1$.

Pour $t > 1$; $F_\alpha(t) = \mathbb{P}\{Z_\alpha \leq t\} = \mathbb{P}\left\{\exp\left(\frac{Y}{\alpha}\right) \leq t\right\} = \mathbb{P}\{Y \leq \alpha \ln(t)\}$
 $= F_Y(\alpha \ln(t)) = 1 - \exp(-\alpha \ln(t)) = 1 - \frac{1}{t^\alpha}$.

2. En déduire que Z_α est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de Z_α est donnée par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

F_α est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc Z_α est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de Z_α est donnée par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} F'_\alpha(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \text{quelconque positive} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la variable Z_α admet-elle une espérance ?

Z_α admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\alpha(x) dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$ converge absolument $\Leftrightarrow \alpha > 1$. (intégrale de Riemann.)

- (b) Dans le cas d'existence, calculez l'espérance de Z_α .

Pour $\alpha > 1$; $\mathbb{E}(Z_\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

4. Le temps de réaction (exprimé en secondes) d'un détecteur de mouvement est une variable aléatoire réelle de densité f_3 .

- (a) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins de 2 secondes ?

$$\mathbb{P}\{\text{"le détecteur réagisse en moins de 2 secondes"}\} = \mathbb{P}\{Z_3 \leq 2\} = \int_1^2 \frac{3}{x^4} dx = \left[\frac{-1}{x^3} \right]_1^2 = \frac{7}{8}$$

- (b) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins d'une demi-seconde ?

$$\mathbb{P}\{\text{"le détecteur réagisse en moins d'une demi-seconde"}\} = \mathbb{P}\{Z_3 \leq \frac{1}{2}\} = 0.$$

- (c) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse entre la deuxième et la troisième seconde ?

$$\mathbb{P}\{\text{"le détecteur réagisse la deuxième et la troisième seconde"}\} = \mathbb{P}\{2 \leq Z_3 \leq 3\} = \int_2^3 \frac{3}{x^4} dx = \left[\frac{-1}{x^3} \right]_2^3 = \frac{19}{216}$$

- (d) Au bout de combien de temps y aura-t'il 99% de chance que le détecteur ai réagi ?

On cherche t tel que $\mathbb{P}\{Z_3 \leq t\} = 0.99 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t^3} = 0.99 \Rightarrow t \approx 4,64$ secondes.

- (e) Quel est le temps moyen de réaction du détecteur ?

$$\mathbb{E}(Z_3) = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ seconde.}$$

5. Une alarme est munie de deux détecteurs dont les temps de réaction T_1 et T_2 sont des variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_{α_1} et f_{α_2} . Dans un premier cas de figure, l'alarme se déclenche dès que les des deux détecteurs ont réagi. Notons U le temps de réaction de l'alarme.

- (a) Exprimez U en fonction de T_1 et T_2 .

$$U = \max(T_1, T_2)$$

- (b) En déduire la fonction de répartition de T .

$F_U(t) = \mathbb{P}\{\max(T_1, T_2) \leq t\} = \mathbb{P}\{T_1 \leq t \cap T_2 \leq t\} = \mathbb{P}\{T_1 \leq t\} \mathbb{P}\{T_2 \leq t\}$ car les variables T_1 et T_2 sont indépendantes. Ainsi $F_U(t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) = F_{\alpha_1}(t)F_{\alpha_2}(t) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}})(1 - \frac{1}{t^{\alpha_2}}) & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$F_U(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} - \frac{1}{t^{\alpha_2}} + \frac{1}{t^{\alpha_1 + \alpha_2}} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (c) En déduire que la densité de U vérifie $f_U = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} - f_{\alpha_1 + \alpha_2}$.

En dérivant F_U on obtient :

$$f_U(t) = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{t^{\alpha_1+1}} + \frac{\alpha_2}{t^{\alpha_2+1}} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{t^{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} - f_{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

- (d) Quelle est l'espérance de U ?

Lorsque $\alpha_1 > 1$ et $\alpha_2 > 1$

$$\mathbb{E}(U) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Sinon on a $U \geq T_1$ et $U \geq T_2$ donc la variable U n'a pas d'espérance.