



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Date : Lundi 8 Juin 2015 Heure : 8 H Durée : 3 heures Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte deux exercices et un problème totalement indépendants.

Exercice 1

On rappelle que le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est donnée par :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et que son rayon de convergence est égale à 1.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et préciser son rayon de convergence.

2. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) + 4xy(x) + 2y(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+2}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(c) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $|x| = R$.

3. On pose $S(x) = x^2 y(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

(a) Calculer $S'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

(b) En déduire $S(x)$ puis $y(x)$ en fonction de x .

(c) Montrer alors que la fonction définie sur $] - 1, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est une fonction indéfiniment dérivable.

Exercice 2

A - Soit M la matrice réelle carrée d'ordre 3, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de M .
(b) En déduire que M est diagonalisable.
2. Déterminer les sous espaces propres de M .
3. Déterminer la matrice P inversible de coefficients $(0, 1, 1)$ sur la troisième ligne, vérifiant : $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer P^{-1} .
5. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + (-1)^n}{2} & 0 & \frac{1 - (-1)^n}{2} \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ \frac{1 - (-1)^n}{2} & 0 & \frac{1 + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

B - Dans une galerie d'arts, un visiteur a le choix entre trois salles d'exposition numérotées 1, 2 et 3.

- Si à l'instant n , il est à la salle 1 ou 3, il choisit aléatoirement l'une des deux autres salles à l'instant $n + 1$.
- Si à l'instant n , il est à la salle 2, il y reste à l'instant $n + 1$.

A l'instant $n = 1$, le visiteur se trouve à la salle n°1.

On pose X_n le numéro de la salle visitée à l'instant n , et on pose $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} M U_n, \forall n \geq 1.$$

- (b) En déduire que $U_n = (\frac{1}{2})^{n-1} M^{n-1} U_1, \forall n \geq 1$.
- (c) Déterminer la loi de X_n .
2. Soit T la variable aléatoire réelle désignant le premier instant où le visiteur entre à la salle n°2.
- (a) Montrer que : $T \leq n$ si et seulement si $X_n = 2$.
- (b) Déduire la loi de T .
- (c) Soit $G = T - 1$
- Montrer que G suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
 - Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire réelle G .
 - En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire réelle T .

Problème

Partie I

On considère la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}. \end{aligned}$$

- Etudier les variations de F et dresser son tableau de variations.
 - En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité notée X .
 - Montrer qu'une densité de X est $f_X(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.
 - Soit la variable aléatoire réelle $Y = \ln(1 + e^X)$.
- (a) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) En déduire une densité de Y puis reconnaître sa loi.
- (c) Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie II

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que Y .

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k = Y_1 + \dots + Y_n$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n .

(b) Déduire que, pour $n \geq 2$, S_n ne suit pas une loi exponentielle.
- On se propose dans cette question de déterminer la loi de S_n .
On rappelle que la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités f et g , suit une loi de densité :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

(a) Montrer qu'une densité de S_2 est donnée par :

$$f_{S_2}(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) En remarquant que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$, montrer par récurrence qu'une densité de S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(c) Calculer alors la valeur de $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$; $\forall n \geq 1$.

3. (a) Montrer que S_n^* converge en loi vers une variable aléatoire réelle dont on précisera la loi.

(b) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$.

Partie III

1. Pour tout réel strictement positif α , on pose $Z_\alpha = \exp\left(\frac{Y}{\alpha}\right)$.
Calculer la fonction de répartition de Z_α .

2. En déduire que Z_α est une variable aléatoire réelle à densité et qu'une densité de Z_α est donnée par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la variable aléatoire réelle Z_α admet-elle une espérance?
(b) Dans le cas d'existence, calculer l'espérance de Z_α .

4. Le temps de réaction (exprimé en secondes) d'un détecteur de mouvement est une variable aléatoire réelle de densité f_3 .

(a) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins de 2 secondes ?

(b) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins d'une demi-seconde ?

(c) Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse entre la deuxième et la troisième seconde ?

(d) Au bout de combien de temps y aura-t'il 99% de chance que le détecteur ait réagi ?

(e) Quel est le temps moyen de réaction du détecteur ?

5. Une alarme est munie de deux détecteurs dont les temps de réaction T_1 et T_2 sont des variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_{α_1} et f_{α_2} . L'alarme se déclenche dès que les deux détecteurs ont réagi. Notons U le temps de réaction de l'alarme.

(a) Exprimez U en fonction de T_1 et T_2 .

(b) En déduire la fonction de répartition de U .

(c) En déduire que la densité de U vérifie $f_U = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} - f_{\alpha_1 + \alpha_2}$.

(d) Quelle est l'espérance de U ?