

**Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session 2016**

Concours Biologie et Géologie

Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

1. (a) $f(u) = Ju = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ y + 4z \\ y + z \end{pmatrix}$
- (b) $\text{Ker}(f) = \{u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $\text{Im}(f) = \{f(u) / u \in \mathbb{R}^3\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2y + z \\ y + 4z \\ y + z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- (c) f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ car $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$
2. (a) $P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda + 1)(3 - \lambda)$
- (b) Les valeurs propres de J sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$ ces vp sont simples.
- (c) J est diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres simples autant que le degré de $\mathbb{R}^3$.
- (d) $Ju = 0 \Leftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $V_1 = \langle e_1 \rangle$
 $Ju = -u \Leftrightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $Ju = 3u \Leftrightarrow V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- (e) En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{com} P = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -12 & -4 & 28 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
3. (a) $M_a = aI + J$
- (b) $M_a = aI + J = aI + PDP^{-1} = P(aI + D)P^{-1}$ donc $D_a = aI + D$ et c'est une matrice diagonale.
- (c) M_a est inversible si et seulement si D_a est inversible si et seulement si $a(a - 1)(3 + a) \neq 0$ si et seulement si $a \notin \{0, 1, -3\}$

$$4. (a) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = y_n + 3z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

(b) donc $T_{n+1} = M_2 T_n$

(c) On montre par récurrence que $T_n = P D_2^n P^{-1} T_0$

$$(d) T_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(e) \text{ On montre que } \begin{cases} x_n = 16 \times 2^n + 5^{n+1} - 9 \\ y_n = 6(1 + 5^n) \\ z_n = 3(5^n - 1) \end{cases}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$$

Exercice 2

$$1. \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{2e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1$$

$$2. (a) f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(b) \forall x > 0; f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Puisque $f_{Y|X=x}$ dépend de la variable x alors X et Y ne sont pas indépendantes.

$$3. (a) \text{ Pour } t > 0; F_Z(t) = \mathbb{P}(\{Z \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X^2 \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X \leq \sqrt{t}\}) = F_X(\sqrt{t}).$$

(b) Si $t \leq 0$; $f_Z(t) = 0$ car Z est une v.a.r positive.

$$\text{Pour } t > 0; f_Z(t) = F'_Z(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F'_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f_X(\sqrt{t}) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$(c) f_{(Y,Z)}(y,z) = f_Z(z) \times f_{Y|Z=z}(y) = f_Z(z) \times f_{Y|X=\sqrt{z}}(y) = \begin{cases} \frac{e^{-z}}{z\sqrt{\pi}} & \text{si } 0 < y < \sqrt{z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème

Partie I

$$1. (a) \text{ Soit } a_n = C_n^r \text{ On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ donc } R = 1.$$

$$\text{Pour tout réel } x \in]-1, 1[, \text{ on pose : } f_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^n.$$

(b) Pour tout réel x de $] -1; 1[$, l'égalité : $(1-x)f_r(x) = (1-x) \sum_{k=r}^{+\infty} C_k^r x^k = \sum_{k=r}^{+\infty} C_k^r x^k -$
 $\sum_{k=r}^{+\infty} C_k^r x^{k+1} = \sum_{k=r}^{+\infty} C_k^r x^k - \sum_{k=r+1}^{+\infty} C_{k-1}^r x^k C_r^r x^r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} [C_k^r - C_{k-1}^r] x^k = x^r + \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} x^k =$
 $xx^{r-1} + \sum_{k=r}^{+\infty} C_k^{r-1} x^{k+1} = x \sum_{k=r-1}^{+\infty} C_k^{r-1} x^k = xf_{r-1}(x).$

2. $f_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$f_1(x) = \frac{x}{1-x} f_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

3. Pour $r = 0$ le resultat est vrai

Soit $r \geq 0$; supposons que $\forall x \in] -1, 1[, f_r(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$. alors

$\forall x \in] -1, 1[, f_{r+1}(x) = \frac{x}{1+x} \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}.$

4. Posons $b_n = \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ donc $R' = 1$.

5. (a) h_r est la somme d'une série entière donc elle est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. et on a

$\forall x \in] -1, 1[, h'_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} n \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^{n-1} = f_{r-1}(x).$

(b) $h_r(0) = 0$ donc $h_r(x) = \int_0^x h'_r(t) dt = \int_0^x \frac{t^{r-1}}{(1-t)^r} dt.$

(c) $t = 0 \iff y = 0$ et $t = x \iff y = x/1-x$,

$y = \frac{t}{1-t} \iff (1-t)y = t \iff t = \frac{y}{1+y}$ et $dt = \frac{1}{(1+y)^2} dy$

donc

$h_r(x) = \int_0^{x/1-x} \frac{t^r}{(1-t)^r} t^{-1} dt = \int_0^{x/1-x} y^r \frac{1+y}{y} \frac{1}{(1+y)^2} dy = \int_0^{x/1-x} \frac{y^{n-1}}{1+y} dy.$

(d) Par intégration par parties, avec $u(y) = \frac{1}{1+y} : u'(y) = \frac{-1}{(1+y)^2}$ et $v'(y) = y^{n-1} : v(y) =$

$\frac{1}{n} y^n$ on a :

$h_r(x) = \left[\frac{1}{1+y} \frac{1}{n} y^n \right]_0^{x/1-x} - \int_0^{x/1-x} \frac{-1}{(1+y)^2} \frac{1}{n} y^n dy = \frac{x^r}{r(1-x)^{r-1}} + \frac{1}{r} \int_0^{x/(1-x)} \frac{y^r}{(1+y)^2} dy$

Partie II

1. $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}.$

2. $g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p q^{k-1} = p t \sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k = \frac{pt}{1-qt}; \forall t \in] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[.$

$$3. \quad (a) \quad E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{n}{p}$$

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{nq}{p^2}.$$

(b)

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; g_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n g_{X_k}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n = \frac{p^n}{q^{n-1}} t f_{n-1}(qt).$$

(c)

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; g_{S_n}(t) = \frac{p^n}{q^{n-1}} t f_{n-1}(qt) = \frac{p^n}{q^{n-1}} t \sum_{k=n-1}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} q^k t^k = \sum_{k=n}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k.$$

(d) On a $g_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) t^k$. Par unicité de développement en série entière on en déduit

que la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n est donnée, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$ par :

- si $k < n$, $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$
- si $k \geq n$, $\mathbb{P}(S_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$.

4. (a)

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{n}{k}\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \\ &= n \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} C_{k-1}^{n-1} q^k \\ &= n \left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(Y_n) - p &= n \left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q) - p \\ &= n \left(\frac{p}{q}\right)^n \left[\frac{q^n}{n p^{n-1}} + \frac{1}{n} \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \right] - p \\ &= p + \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy - p \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \end{aligned}$$

(c) Pour tout $y \in [0, q/p]$ on a $(1+y)^2 > 1$ donc $\frac{1}{(1+y)^2} \leq 1$ et $0 \leq \frac{y^n}{(1+y)^2} \leq y^n$ et comme

les bornes $0 \leq p/q$ on a alors

$$0 \leq \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \leq \int_0^{q/p} y^n dy = \frac{1}{n+1} \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \text{ et donc}$$

$$0 \leq \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \leq \frac{1}{n+1} \frac{q}{p}$$

(d) $0 \leq E(Y_n) - p \leq \frac{1}{n+1} \frac{q}{p} \rightarrow 0$ et par encadrement $E(Y_n) - p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = p$