



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Date : Jeudi 26 Mai 2016 Heure : 8 H Durée : 3 heures Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte deux exercices et un problème totalement indépendants.

EXERCICE 1

Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

- (a) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(u)$.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f .
(c) f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? justifier la réponse.
- (a) Calculer le polynôme caractéristique de J .
(b) Dédire les valeurs propres de J ainsi que leurs ordres de multiplicités.
(c) J est-elle diagonalisable? justifier la réponse.
(d) Déterminer les vecteurs propres de J .
(e) Montrer que $J = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et P une matrice inversible à déterminer ainsi que son inverse P^{-1} .

3. Pour tout réel a , on considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & 4 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

(a) Exprimer M_a en fonction de J .

(b) Dédire de la question 2.(e) qu'il existe une matrice diagonale $D_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M_a = PD_aP^{-1}.$$

(c) Pour quelles valeurs de a , M_a est inversible?

4. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ trois suites réelles vérifiant $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = y_n + 3z_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $T_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$

(a) Écrire T_{n+1} en fonction de T_n et M_2 .

(b) En déduire l'expression de T_n en fonction de n .

(c) Déterminer les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .

EXERCICE 2

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité f .

(a) Déterminer une densité de la variable X .

(b) Pour $x > 0$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Justifier la réponse.

3. Soit Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = X^2$.

- Montrer que $\forall x \geq 0, F_Z(x) = F_X(\sqrt{x})$ où F_X (respectivement F_Z) désigne la fonction de répartition de X (respectivement Z).
- En déduire une densité de la variable aléatoire Z .
- Donner alors une densité du couple (Z, Y) .

PROBLEME

Partie I

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tels que $1 \leq r < n$, on rappelle la formule du "triangle de Pascal": $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$.

1. Soit r un entier naturel. On considère la série entière $\sum_{n \geq r} C_n^r x^n$.

- Montrer que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on pose: $f_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^n$.

- Montrer que, $\forall x \in]-1, 1[$ et $r \geq 1$, on a

$$(1-x)f_r(x) = xf_{r-1}(x).$$

2. Soit x un réel fixé de $] -1, 1[$. Déterminer f_0 puis f_1 en fonction de x .

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, f_r(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

4. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq r} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$ vaut 1.

5. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $h_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$.

- Montrer que h_r est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et que pour tout réel x de $] -1, 1[$, on a: $h_r'(x) = f_{r-1}(x)$.

- En déduire que, pour tout x de $] -1, 1[$, on a: $h_r(x) = \int_0^x \frac{t^{r-1}}{(1-t)^r} dt$.

- À l'aide du changement de variable $y = \frac{t}{1-t}$, montrer que :

$$h_r(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^{r-1}}{1+y} dy, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

- En déduire, en utilisant une intégration par parties, que l'on peut écrire :

$$h_r(x) = \frac{x^r}{r(1-x)^{r-1}} + \frac{1}{r} \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^r}{(1+y)^2} dy, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Partie II

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire entière X est définie pour tout réel t où la série $\sum t^k \mathbb{P}(X = k)$ converge absolument par :

$$g_X(t) := E(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \mathbb{P}(X = k).$$

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui suit la loi géométrique de paramètre p . On rappelle que pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$.

1. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
2. Montrer que la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X est donnée par

$$g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}; \quad \forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n .
- (b) Montrer que la fonction génératrice des moments de la variable S_n est donnée par:

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; \quad g_{S_n}(t) = \frac{p^n}{q^{n-1}} t f_{n-1}(qt).$$

- (c) En déduire que

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; \quad g_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{C}_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k.$$

- (d) En déduire que la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < k < n \\ \mathbf{C}_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{n}{S_n}$.

- (a) Montrer que $E(Y_n) = n \left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q)$.
- (b) Montrer que $E(Y_n) - p = \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{\frac{q}{p}} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy$.
- (c) Montrer que $0 \leq E(Y_n) - p \leq \frac{q}{p(n+1)}$.
- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n)$.