



Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Date: Jeudi 31 mai 2018 Heure: 8H Durée : 3H Nbre de pages : 4
Barème : Exercice 1 : 5 points Exercice 2 : 8 points Exercice 3 : 7 points

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1

On note par I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on donne A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A .
2. Donner les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :
(i-) P est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
(ii-) $D = (d_{ij})$ est diagonale avec $d_{1,1} = 2$.
(iii-) $D = P^{-1}AP$.
4. Donner l'expression de la matrice P^{-1} .
5. A tout couple (a, b) de réels, on associe la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $M = aI_3 + bA$ et prouver que la matrice $\Delta = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

6. Montrer que M est inversible si et seulement si Δ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que M soit inversible.
7. Prouver que $M^2 = I_3$ si et seulement si $\Delta^2 = I_3$.
En déduire l'existence de quatre matrices M que l'on déterminera, vérifiant $M^2 = I_3$.

Exercice 2

On rappelle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
- $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I

1. Soient $p \in]0, 1[$, $\lambda > 0$, U et V deux variables aléatoires indépendantes telles que U suit une loi de Poisson de paramètre λp et V suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.
 - a) Donner la loi de $U + V$.
 - b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de U , sachant $(U + V = n)$, est une loi binomiale de paramètres n et p .
2. On considère deux variables aléatoires T et S indépendantes, discrètes et définies sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant :
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T + S = n) \neq 0$.
 - Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(T = k / T + S = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_n = \frac{n! P(T = n)}{p^n}, \quad v_n = \frac{n! P(S = n)}{(1-p)^n}, \quad w_n = n! P(T + S = n).$$

- a) Montrer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, tels que $k \leq n$, on a : $u_k v_{n-k} = w_n$.
- b) Justifier que $v_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 0$.
- c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives : $\lambda_1 = \frac{v_1}{v_0}$ et $\lambda_2 = \frac{u_1}{u_0}$.
- d) Déterminer w_1 en fonction de u_0 et v_1 , puis en fonction de u_1 et v_0 , en déduire que $\lambda_1 = \lambda_2$.
- e) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(T = k) = u_0 \frac{(\alpha p)^k}{k!}, \quad P(S = k) = v_0 \frac{(\alpha(1-p))^k}{k!},$$

où $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$.

- f) Trouver les valeurs de u_0 et v_0 et en déduire que T suit une loi de Poisson de paramètre αp et que S suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha(1-p)$.

Partie II

Dans cette partie, λ et p désignent deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$. On considère le couple (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi définie par :

$$P((X=n) \cap (Y=k)) = \begin{cases} \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\mathcal{P}).$$

1. Vérifier que la relation $(\mathcal{P})$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la loi de la variable X , puis celle de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$.
4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z .
5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes?
6. **Application :** Pour une certaine race de mammifères, à chaque portée, le nombre X de petits suit une loi de Poisson de paramètre 5. La probabilité pour qu'un petit soit une femelle est 0,6. On note Y le nombre de femelles par portée.
 - a) Quelle est la loi de Y conditionnellement à $X = n$? En déduire la loi de (X, Y) .
 - b) Sachant qu'une portée est constituée de 7 petits, quelle est la probabilité qu'il y ait 4 mâles et 3 femelles?
 - c) Quelle est la probabilité pour qu'une mère donne naissance dans une même portée à 3 mâles exactement?

Exercice 3

On rappelle l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire X ayant une espérance donnée par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ et $b > 0$, on considère l'équation différentielle donnée par :

$$y'' + \frac{1}{b}y' = 0, \quad (E)$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F possède les propriétés suivantes :

- (i) F est continue.
- (ii) F est nulle pour $x \leq a$.
- (iii) F est solution de l'équation (E) pour $x > a$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X .
2. En déduire que la densité de X s'écrit :

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}, & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même loi que X . On pose $T_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
- Sachant que pour tout réel x , $(T_n \geq x) = (X_1 \geq x) \cap (X_2 \geq x) \cap \dots \cap (X_n \geq x)$.
Déterminer la fonction de répartition de T_n .
 - En déduire que T_n suit une loi de densité $f_{a, \frac{b}{n}}$.
 - Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.
 - En utilisant l'inégalité de Markov pour la variable $(T_n - a)$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - a| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

5. Soit la variable aléatoire $Y = X - a$.

- Montrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.
- Donner son espérance et sa variance.
- On modélise le temps d'attente de pannes de machines par des variables aléatoires sans mémoire c-à-d,

$$P(X > t + s / X > t) = P(X > s), \quad t \geq 0, s \geq 0.$$

Montrer que les lois exponentielles sont sans mémoire.

6. On considère $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que Y . On définit la variable aléatoire M_n par $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.
- Montrer que M_n est un estimateur sans biais de b .
 - En utilisant le Théorème central limite, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|M_n - b| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ vérifiant $\phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, et ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{M_n \sqrt{n}}{\sqrt{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}} < b < \frac{M_n \sqrt{n}}{\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha.$

- Donner un intervalle de confiance de b au seuil de risque α .

7. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{400})$ de 400 variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$. On a observé la moyenne empirique

$$\bar{y} = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} y_i = 0.25.$$

Au seuil de 1%, cette observation est-elle compatible avec la valeur de $b = 0,26$? justifier la réponse. (On donne $\phi(2,575) = 0,995$).

Fin de l'énoncé