



Concours Biologie et Géologie Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

1. la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Pour que f soit une projection il faut que $A^2 = A$.

3. (a)

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants et $\text{card}\mathcal{B}' = 3$, d'où $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (b) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ la matrice de passage de } \mathcal{B}' \text{ à } \mathcal{B}.$$

(c) On a

$$P^{-1}Au = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z \\ x - 2y + z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\frac{1}{6}(2x + 2y + 2z, x - 2y + z, 0)$ les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}'$.

4. (a) On a :

$f(u_1) = Au_1 = u_1$, d'où u_1 est le vecteur propre de f , associé à la valeur propre 1.

$f(u_2) = Au_2 = u_2$, d'où u_2 est le vecteur propre de f , associé à la valeur propre 1.

$f(u_3) = Au_3 = 0$, d'où u_3 est le vecteur propre de f , associé à la valeur propre 0.

(b) La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est donnée par :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) 0 est la valeur propre associée au vecteur propre u_3 donc $\text{Ker } f = \text{vect}\{e_1 - e_3\}$.

(b) On a $\dim(\text{Im } f) = 2$, $\text{Im } f = \{v' \in \mathbb{R}^3 / \exists v, f(v) = v'\}$; c.à.d

$$Av = v' \Rightarrow x' = z' \quad \text{et} \quad y' \in \mathbb{R}$$

$$v' = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\text{Im } f = \text{vect}\{e_1 + e_3, e_2\}$. Les vecteurs $e_1 + e_3$ et e_2 sont indépendants, forment une base de $\text{Im } f$ d'équation : $x - z = 0$.

(c) on a :

$$\langle e_1 - e_3, e_1 + e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$\langle e_1 - e_3, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Le $\text{Ker } f$ est orthogonal à $\text{Im } f$.

6. (a) f est projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. $\text{Im}(f)$ est le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x - z = 0$.
- (b) $f(v)$ est caractérisé comme étant l'unique vecteur de $\mathcal{P}$ minimisant la distance de v à $\mathcal{P}$

$$\|v - f(v)\| = \min_{u \in \mathcal{P}} \|v - u\|$$

$$f(v) = \frac{1}{2}(5e_1 + 4e_2 + 5e_3) = u_0.$$

7. On considère la fonction suivante : $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$h(x, y) = (x + y - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - 4)^2.$$

- (a) $h(x, y) = (x + y - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - 4)^2 = \|w - v\|^2$.
- (b) On a : $w = (x + y)e_1 + ye_2 + (x + y)e_3 = (x + y)(e_1 + e_3) + ye_2$, d'où $w \in \text{Im } f$.
- (c) Les points critiques de la fonction h sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= 4x + 4y - 10 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= 4x + 6y - 14 = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne $x = \frac{1}{2}$ et $y = 2$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 4, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 6, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = 4,$$

d'où $s^2 - rt = 16 - 24 = -8 < 0$ et $r = 4 > 0$, donc le point $a_0 = (\frac{1}{2}, 2)$ est un minimum et $u_0 = \frac{1}{2}(5e_1 + 4e_2 + 5e_3)$.

Exercice 2

1. (a) La fonction de répartition de U est donnée par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a, \\ \frac{x}{a} & \text{si } x \in]0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, a]$,

(b) Par définition on a : $E(U) = a$ et $V(U) = \frac{a^2}{12}$.

2. (a) On a : $U \in]0, a] \Rightarrow \frac{U}{a} \in]0, 1] \Rightarrow \ln\left(\frac{U}{a}\right) \in]-\infty, 0]$, d'où

$X = a \sqrt{-\ln\left(\frac{U}{a}\right)} \in [0, +\infty[$ est bien définie.

(b) On considère une variable aléatoire $\frac{U}{a}$ suivant la loi uniforme sur l'intervalle, $]0; 1]$.

Soit F_X la fonction de répartition de $X = a \sqrt{-\ln\left(\frac{U}{a}\right)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- Si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$.

- Si $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(\sqrt{-\ln\left(\frac{U}{a}\right)} \leq \frac{x}{a}\right) \text{ car } a > 0 \\ &= P\left(-\ln\left(\frac{U}{a}\right) \leq \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ &= P\left(\ln\left(\frac{U}{a}\right) \geq -\frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= P\left(U \geq a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right) \\ &= 1 - F_U\left(a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme U est à densité, F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; a\}$ donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ là où $a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \neq 0$ et $\neq a$ i.e. en $x \neq 0$.

Donc X est à densité :

$$f_X(x) = a \frac{2x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) F'_U\left(a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right) = a \frac{2x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) f_U\left(a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right)$$

et comme $a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \in]0; a]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(c) Par le changement de variables $x = at$, $dx = a dt$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = a \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$(d) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Par intégration par parties avec $u(x) = x$: $u'(x) = 1$,

$v'(x) = \frac{2x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} : v(x) = -e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ et u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; t]$.

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{2x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx &= \left[-x e^{-\frac{x^2}{a^2}} \right]_0^t + \int_0^t e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= -t e^{-\frac{t^2}{a^2}} + \int_0^t e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-t e^{-\frac{t^2}{a^2}} + \int_0^t e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

3. (a) Soit F_Y la fonction de répartition de $Y = \frac{X^2}{a}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- Si $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$.
- Si $y > 0$ on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq ay) \text{ car } a > 0 \\ &= P(X \leq \sqrt{ay}) \\ &= 1 - F_X(\sqrt{ay}). \end{aligned}$$

Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc Y est à densité :

$$f_Y(y) = \frac{a}{2\sqrt{ay}} f_X(\sqrt{ay}) = \frac{a}{2\sqrt{ay}} \frac{2\sqrt{ay}}{a^2} e^{-\frac{ay}{a^2}}$$

alors :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp(-\frac{y}{a}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

d'où Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.

(b) Par définition $E(Y) = a = E(\frac{X^2}{a})$, donc $E(X^2) = a^2$.

(c) On a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{4-\pi}{4}a^2$.

4. (a) On a $S_n = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n X_k$, donc S_n a une espérance et

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n E(X_k) \\ &= \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n a \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{2}{n\sqrt{\pi}} na \frac{\sqrt{\pi}}{2} = a. \end{aligned}$$

Donc le biais de S_n comme estimateur de a est : $b_a(S_n) = E(S_n) - a = 0$,
 S_n est un estimateur sans biais de a .

- (b) Comme les (X_k) sont indépendantes alors :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \left(\frac{2}{n\sqrt{\pi}} \right)^2 \sum_{k=1}^n V(X_k) \\ &= \left(\frac{2}{n\sqrt{\pi}} \right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{4-\pi}{4} a^2 \\ &= \frac{4}{n^2\pi} n \frac{4-\pi}{4} a^2 = \frac{4-\pi}{n\pi} a^2. \end{aligned}$$

- (c) d'où $r_a(S_n) = V(S_n) - b_a^2(S_n) = V(S_n)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_a(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = 0$.
 S_n est un estimateur convergent de a .

5. (a) L'inégalité de Bienayme-Tchebychev appliquée à S_n s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{4-\pi}{\pi} \frac{a^2}{n\varepsilon^2}.$$

Comme on suppose $a < 1$, on peut prolonger :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{4-\pi}{\pi} \frac{1}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}, \quad \text{car} \quad \frac{4-\pi}{4} < 1.$$

On en déduit : $\forall \varepsilon > 0, 1 - P(|S_n - a| < \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Ceci donne alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

- (b) Comme $(|S_n - a| < \varepsilon) \subset (|S_n - a| \leq \varepsilon)$, on obtient, par croissance de la probabilité :

$$P(|S_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2},$$

soit :

$$P(-\varepsilon \leq a - S_n \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

On a donc :

$$P\left(S_n - \varepsilon \leq a \leq S_n + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

On peut affirmer que l'intervalle $[S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour a , avec un niveau de confiance au moins égal à $1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Il suffit de choisir $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ce qui donne :

$$P\left(S_n - \frac{1}{10} \leq a \leq S_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{100}{n}.$$

Avec $n = 2000$, $1 - \frac{100}{n} = \frac{19}{20} = 95\%$ on obtient :

$\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a , avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Exercice 3

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = n \cap Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\ &= p(1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= p(1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

(b) Pour $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = 0 \cap X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^0 p (1-p)^{2n-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n} \\ &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1 - (1-p)^2} \\ &= \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

$\forall k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\
 &= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k (1-p)^{2n-2k+k-1} \\
 &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k (1-p)^{2(n-k)} \\
 &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^k (1-p)^{2n} \\
 &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \frac{1}{(1 - (1-p)^2)^{k+1}} \\
 &= \frac{p^{k+1} (1-p)^{k-1}}{(2p - p^2)^{k+1}} \\
 &= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

(c) La loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est donnée par :

Si $\forall k > n$ on a $P(Y = k/X = n) = 0$.

Si $k \leq n$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = k/X = n) &= \frac{P(Y = k \cap X = n)}{P(X = n)} \\
 &= \frac{C_n^k p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}}{p(1-p)^{n-1}} \\
 &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

(d)

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{1}{(2-p)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{2-p}\right)^2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(Y=k) \\
&= \frac{1-p}{(2-p)^3} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-2} \\
&= \frac{1-p}{(2-p)^3} \frac{2}{\left(1-\frac{1-p}{2-p}\right)^3} = 2(1-p).
\end{aligned}$$

On a donc $E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y) = 2(1-p) = E(Y^2) - E(Y)^2 = V(Y)$.

2. (a) U et V sont indépendantes alors $E(Z) = E(U)E(V) = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$
 (b) Comme $U(\omega) = \{0, 1\}$ et $V(\omega) = \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(U=0 \cap V=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(U=0)P(V=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\lambda)\lambda(1-\lambda)^{k-1} \\
&= \lambda(1-\lambda) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\lambda)^{k-1} = (1-\lambda).
\end{aligned}$$

De plus, pour $k \geq 1$, on a :

$$P(Z=k) = P(U=1 \cap V=k) = P(U=1)P(V=k) = \lambda^2(1-\lambda)^{k-1}.$$

- (c) $P(Z=0) = P(Y=0)$ alors $1-\lambda = \frac{1-p}{2-p}$ d'où $\lambda = \frac{1}{2-p}$,
 et on vérifie que :

$$P(Z=k) = \frac{1}{(2-p)^2} \left(1 - \frac{1}{2-p}\right)^{k-1} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} = P(Y=k).$$