



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 10 Juin 2019 Heure: 8H Durée : 3H Nbre de pages : 3

Barème : Exercice 1 : 8 points Exercice 2 : 8 points Exercice 3 : 4 points

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices non programmables est autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3, \\ f(e_2) = e_2, \\ f(e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3. \end{cases}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Vérifier que f est une projection.
3. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ où les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont donnés par :

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad u_3 = e_1 - e_3.$$

- (a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1} .
 - (c) Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
4. (a) Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f . Donner les valeurs propres associées.
 - (b) Dédire, de la question précédente, la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
5. (a) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}\{e_1 - e_3\}$.
 - (b) Donner une base de l'image de f et en déduire une équation cartésienne de $\text{Im } f$.
 - (c) Montrer que $\text{Ker } f$ est orthogonal à $\text{Im } f$.

6. (a) Montrer que f est une projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x - z = 0$.
 (b) Soit le vecteur $v = e_1 + 2e_2 + 4e_3$. Déterminer le vecteur $u_0 \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\|v - u_0\| = \min_{u \in \mathcal{P}} \|v - u\|.$$

7. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$h(x, y) = (x + y - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - 4)^2.$$

- (a) Soit w le vecteur, de $\mathbb{R}^3$, donné par $w = (x + y, y, x + y)$. Vérifier que $h(x, y) = \|u - v\|^2$, où v est le vecteur défini dans la question 6-(b).
 (b) Vérifier que $w \in \text{Im} f$.
 (c) Déterminer le seul point critique $a_0 = (x_0, y_0)$ de la fonction h et vérifier que a_0 est un minimum global de h . Retrouver le résultat de la question 6-(b).

Exercice 2

1. Soit a un réel strictement positif. On considère U une variable aléatoire réelle de densité :

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in]0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Déterminer la fonction de répartition F_U de U . En déduire la loi de U .
 (b) Donner l'espérance $E(U)$ et la variance $V(U)$.

2. On considère la variable aléatoire réelle $X = a \sqrt{-\ln \frac{U}{a}}$.

- (a) Vérifier que X est bien définie.
 (b) Montrer que la densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (c) Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a$.

- (d) En déduire que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a$.

3. On considère la variable aléatoire réelle $Y = \frac{X^2}{a}$.

- (a) Montrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.
 (b) Donner la valeur de l'espérance de Y , puis déduire $E(X^2)$.
 (c) Calculer $V(X)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X .

On note S_n la variable définie par : $S_n = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a .
 (b) Calculer $V(S_n)$.
 (c) On dit que l'estimateur est convergent, si le risque $r_a(S_n) = V(S_n) + (E(S_n) - a)^2$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Vérifier que S_n est un estimateur convergent de a .
5. On suppose que $a < 1$.

- (a) Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable S_n , et en déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|S_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

- (b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}]$ est un intervalle de confiance pour a , avec un niveau de confiance au moins à 95%.

Exercice 3

1. Soit $p \in]0, 1[$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est définie par : pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$P(X = n \cap Y = k) = \begin{cases} C_n^k p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}, & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p .
 (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p}, \\ P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}, \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$, pour $|x| < 1$.

- (c) Vérifier que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
 (d) Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y-1))$ et déduire $V(Y)$.
2. Soient $\lambda \in]0, 1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ , indépendante de U . On note par $Z = UV$.
- (a) Sans calculer la loi, déterminer l'espérance de Z .
 (b) Calculer $P(Z = 0)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(Z = k)$.
 (c) Trouver un réel $\lambda \in]0, 1[$ en fonction de p tel que Z suit la même loi que Y .

Fin de l'énoncé