



Concours Biologie et Géologie

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

1. On a $u_1 \neq \alpha u_2$ donc $\dim(E) = 2$. $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$, donc (u_1, u_2) est une base orthogonale de E .

2. (a) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha u + v) &= \alpha u + v - \frac{\langle \alpha u + v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \alpha u + v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \alpha u + v - \frac{\alpha \langle u, u_1 \rangle + \langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\alpha \langle u, u_2 \rangle + \langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \alpha \left(u - \frac{\langle u, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle u, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \right) + v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \alpha \varphi(u) + \varphi(v)\end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

(b) on a

$$\begin{aligned}u \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2\end{aligned}$$

donc $v \in E$ si $v \in E$ alors $v = \alpha u_1 + \beta u_2$ et $\langle v, u_1 \rangle = \alpha \|u_1\|^2$, $\langle v, u_2 \rangle = \beta \|u_2\|^2$.
D'où $v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = 0$, donc $v \in \ker(\varphi)$, par conséquent $\ker(\varphi) = E$.

(c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, On a

$$\begin{aligned}\langle \varphi(v), u_1 \rangle &= \langle v, u_1 \rangle - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \langle u_1, u_1 \rangle = 0 \\ \langle \varphi(v), u_2 \rangle &= \langle v, u_2 \rangle - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \langle u_2, u_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

donc pour $u \in E$, $u = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\langle \varphi(v), u \rangle = \alpha \langle \varphi(v), u_1 \rangle + \beta \langle \varphi(v), u_2 \rangle = 0.$$

Donc $\varphi(v)$ est orthogonale à tout vecteur de E .

(d) si on pose $\varphi(v) = (x, y, z)$ on a

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = x - z = 0 \quad \text{et} \quad \langle \varphi(v), u_2 \rangle = x - 2y + z = 0$$

donc $\varphi(v) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$ d'où

$$\text{Im}(\varphi) = \text{vect}\{(1, 1, 1)\} = \{(x, y, z) / x = y = z\}.$$

3. (a) $\langle u'_1, u'_2 \rangle = \langle u'_1, u'_3 \rangle = \langle u'_2, u'_3 \rangle = 0$ et $\|u'_1\| = \|u'_2\| = \|u'_3\| = 1$
Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

$$(b) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$(c) P^{-1} = {}^t P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ car } \mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3.$$

4. (a) p est la projection orthogonale sur E .

$$p(u'_1) = u'_1 \quad \text{car} \quad u'_1 \in E$$

$$p(u'_2) = u'_2 \quad \text{car} \quad u'_2 \in E$$

$$p(u'_3) = 0 \quad \text{car} \quad u'_3 \perp E$$

$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 M = PA^tP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$ et donc $M^n = PA^{nt}P = PA^tP = M$.

5. (a) C est symétrique donc elle est diagonalisable.

(b) $Cu'_3 = -u'_3$ donc u'_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha = -1$. D'où $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de vecteurs propres de C .

(c) $Cu_1 = 2u_1$ et $Cu_2 = 2u_2$. Comme $E = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ donc E est le sous espace propre associé à la valeur propre 2.

$$(d) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) $C = PD^tP = aPA^tP + bI = P(aA + bI)^tP$ donc $D = aA + bI$. D'où $\begin{cases} a+b = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ et

$$a = 3, \quad b = -1.$$

(f) On a $C = 3M - I$ et $MI = IM = M$ donc

$$\begin{aligned} C^n &= (3M - I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3M)^k (-I)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} M^k = (-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} M \\ &= 2^n M - (-1)^n (M - I). \end{aligned}$$

Exercice 2

$$f(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) On a, $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_U(t) = P(U \leq t) = P(\ln(X) \leq t)$,
 Si $t \leq 0$, $F_U(t) = 0$ car $X > 1$
 Si $t > 0$, $F_U(t) = P(X \leq e^t) = F_X(e^t)$
 d'où

$$f_U(t) = \frac{dF_U}{dt}(t) = e^t f(e^t) = \begin{cases} ae^{-at}, & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

U suit une loi exponentielle de paramètre a .

- (b) On a,

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_0^{+\infty} ae^{-ax} f_Y(t-x) dx$$

on pose $y = t - x$ on obtient

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{t-a} ae^{-a(t-y)} f_Y(y) dy$$

Si $t < 0$, alors $f_{U+V}(t) = 0$

Si $t \geq 0$, alors $f_{U+V}(t) = \int_0^t ae^{-a(t-y)} ae^{-ay} dy = a^2 e^{-at} \int_0^t dy = a^2 t e^{-at}$.

$$f_{U+V}(t) = \begin{cases} a^2 t e^{-at}, & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (c) On a $XY = e^{U+V}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_{XY}(t) = P(XY \leq t) = P(e^{U+V} \leq t)$
 Si $t \leq 1$, alors $F_{XY}(t) = 0$, car $U + V > 0$.

Si $t > 1$, alors $F_{XY}(t) = P(U + V \leq \ln t) = F_{U+V}(\ln t)$.

$$f_{XY}(t) = \frac{1}{t} f_{U+V}(\ln t) = \begin{cases} a^2 \frac{(\ln t)}{t^{a+1}}, & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[T_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x].$$

(a) La fonction de répartition de T_n est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x)$$

Si $x \leq 0$, alors $F_n(x) = 0$,

Si $x > 0$, alors $F_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{-ax})$.

$$F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})^n, & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) La fonction densité de probabilité de T_n est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{dF_n}{dx}(x) = \begin{cases} a n e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) L'espérance de la variable aléatoire T_n est donnée par :

$$E(T_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x a n e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} dx$$

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 a n e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} = 0 \Rightarrow x f_n(x) = o(\frac{1}{x^2})$ d'où $E(T_n)$ existe.

3. (a) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= -a^2(n+1)e^{-ax}(1 - e^{-ax})^n + a^2n(n+1)e^{-ax}e^{-ax}(1 - e^{-ax})^{n-1} \\ &= a(n+1) \left[-1 + e^{-ax} + n e^{-ax} \right] a e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} \\ &= a(n+1) \left[n - (n+1)(1 - e^{-ax}) \right] a e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} \end{aligned}$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{a(n+1)} f'_{n+1}(x).$$

(b) Une intégration par parties donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x \text{ et } v(x) = f_{n+1}(x) \rightarrow v'(x) = f'_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx &= \left[x f_{n+1}(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x f'_{n+1}(x) dx \\ &= a(n+1) \int_0^{+\infty} x (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} x (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{a(n+1)} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

(c) $E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{a(n+1)}$, car $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx = 1$

(d) Par itération on trouve l'égalité $E(T_n) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$

(e) L'espérance $E(T_2) = \frac{3}{2a}$

$$E(T_2^2) = \int_0^{+\infty} 2ax^2 e^{-ax} dx - \int_0^{+\infty} 2ax^2 e^{-2ax} dx = \frac{4}{a^2} - \frac{2}{4a^2} = \frac{7}{2a^2}$$

$$V(T_2) = \frac{7}{2a^2} - \frac{9}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

4. Soit $Y_1, \dots, Y_m$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T_2 .

On pose $\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$.

(a) En appliquant le théorème central limite pour m est suffisamment grand, on peut approcher $\bar{Y}_m$ par une loi normale $\mathcal{N}(\frac{3}{2a}; \frac{5}{4a^2m})$.

(b) Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

$$P(|Z| < \alpha) = P(-\alpha < Z < \alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1 = 0.95$$

$$\Phi(\alpha) = 0.975 \text{ ce qui donne } \alpha = 1.96.$$

(c) On a $\frac{\bar{Y}_m - \frac{3}{2a}}{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{ma}}}$ suit la loi normale centrée réduite d'où

$$P(-\alpha < \frac{\bar{Y}_m - \frac{3}{2a}}{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{ma}}} < \alpha) = P(\frac{3}{2a} - \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{ma}} < \bar{Y}_m < \frac{3}{2a} + \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{ma}}) = 0.95$$

$$\alpha_m = \frac{3}{2} - \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{m}} \text{ et } \alpha_m = \frac{3}{2} + \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{m}}$$

(d)

$$P\left(\frac{1}{\bar{Y}_m} \left(\frac{3}{2} - \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{m}}\right) < a < \frac{1}{\bar{Y}_m} \left(\frac{3}{2} + \alpha \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{m}}\right)\right) = 0.95$$

(b) On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geq 1$,

$$P(U = k) = P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = pq^{k-1}.$$

Donc U suit une loi géométrique de paramètre p .

(c) $E(Y) = E(U) - 1 = \frac{1-p}{p}$ et $V(Y) = V(U - 1) = V(U) = \frac{1}{p^2}$.

3. Soit la variable aléatoire $Z = X - Y$.

(a) Z prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n boules noires et deux boules blanches, auquel cas ($Z = n$) est réalisé. Ainsi,

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la loi conditionnelle de Z sachant ($X = n$) prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} P((Z = k)/(X = n)) &= P((X - Y = k)/(X = n)) \\ &= P((Y = n - k)/(X = n)) \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de $Z/(X = n)$ suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$

(c) En reprenant les calculs effectués en 2.(a), on observe que la loi de Z est la même que celle de Y . Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Z = k) = pq^k.$$

(d) Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$(Y = k, Z = l) = (Y = k, X - Y = l) = (Y = k, X = k + l).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Y = k, Z = l) &= P(Y = k, X = k + l) \\ &= P(Y = k/X = k + l) \times P(X = k + l) \\ &= \frac{1}{k + l + 1} (k + l + 1) p^2 q^{2k} \\ &= pq^k pq^k = P(Y = k)P(Z = l) \end{aligned}$$

Ainsi, Y et Z sont indépendantes.

(e) Y et Z étant indépendantes, il vient

$$\text{Cov}(Y, Z) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(Y + Z, Y) \\ &= \text{Cov}(Z, Y) + \text{Cov}(Y, Y) \\ &= 0 + V(Y) = \frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{p^2}.$$