



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Session 2020	Date : 16/07/2020	Heure : 8H	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices non programmables est autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 (7,5 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2 où

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (1, -2, 1).$$

- Vérifier que la famille (u_1, u_2) est une base orthogonale de E .
- On définit l'application φ par :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \end{aligned}$$

- Montrer que φ est une application linéaire.
 - Justifier que $\ker(\varphi) = E$.
 - Prouver que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$, $\varphi(v)$ est orthogonale à tout vecteur de E .
 - En déduire une représentation cartésienne et une base du sous espace vectoriel $\text{Im}(\varphi)$.
3. On considère, dans la suite de l'exercice, la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ avec

$$u'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad u'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \quad \text{et} \quad u'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

- Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
 - Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
 - Déterminer P^{-1} .
4. On considère p la projection orthogonale sur E .
- Déterminer la matrice A de p dans la base $\mathcal{B}'$.
 - En déduire la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n et en déduire que $M^n = M$.

5. On considère la matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Justifier que C est diagonalisable.
- Vérifier que u'_3 est un vecteur propre de C , qu'on déterminera la valeur propre associée.
- Démontrer que E est le sous espace propre associé à la valeur propre 2 de la matrice C .
- Donner une matrice diagonale D telle que : $C = PD^tP$ où P est la matrice définie dans (3-b) et tP désigne la matrice transposée de P .
- Trouver les réels a et b tels que : $C = aM + bI_3$ où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M est la matrice définie dans (4-b).
- Calculer C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (7,5 points)

On admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V , alors la variable aléatoire $U + V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x)f_V(t-x)dx.$$

Soient a un réel strictement positif, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Montrer que la variable aléatoire $U = \ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre a .
 - Déterminer la loi de $U + V$, où $V = \ln(Y)$.
 - En déduire la loi de XY .
- On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre a . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(T_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x).$$

- Déterminer la fonction de répartition de T_n .

(b) En déduire que la fonction densité de probabilité de T_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} a n e^{-ax} (1 - e^{-ax})^{n-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Étudier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire T_n .

3. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{a(n+1)} f'_{n+1}(x).$$

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{a(n+1)} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

(c) Déduire une relation de récurrence entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$.

(d) Justifier alors l'égalité $E(T_n) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Déterminer l'espérance $E(T_2)$ et la variance $V(T_2)$ de la variable aléatoire T_2 .

4. Soit $Y_1, \dots, Y_m$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T_2 .

On pose $\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$, $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) En supposant que m est suffisamment grand, montrer que $\bar{Y}_m$ peut être approchée par une loi normale dont on déterminera les paramètres.

(b) Soit Z une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Trouver la valeur du réel positif α tel que

$$P(|Z| < \alpha) = 0.95$$

Indication : On donne $\Phi(1.96) = 0.975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(c) En déduire qu'il existe deux suites réelles positives $(\alpha_m)_m$ et $(\beta_m)_m$ telles que :

$$P\left(\frac{\alpha_m}{a} < \bar{Y}_m < \frac{\beta_m}{a}\right) = 0.95$$

(d) Donner un intervalle de confiance pour le paramètre a en fonction de $\bar{Y}_m$ avec un risque d'erreur de 5%.

(e) Pour $a = 2$, qu'elle est la valeur minimale de la taille de l'échantillon pour que l'écart entre la moyenne empirique et $E(T_2)$ soit inférieur à 10^{-2} avec un niveau de confiance égale à 95%.

Exercice 3 (5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un réel de $]0, 1[$.

On considère une urne contenant des boules blanches et noires avec la probabilité p de tirer une boule blanche et la probabilité $q = 1 - p$ de tirer une boule noire.

On effectue une succession de tirages d'une boule, **avec remise** et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la deuxième boule blanche.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements B_k respectivement N_k , "Obtenir une boule blanche" respectivement "Obtenir une boule noire" au $k^{\text{ème}}$ tirage.

1. (a) Décrire les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$ en fonction des B_k et N_k , puis calculer leurs probabilités.
(b) Soit A l'événement "Obtenir une seule boule blanche parmi $(n + 1)$ tirages". Calculer $P(A)$.
(c) En déduire que $P(X = n) = (n + 1)p^2q^n$.
2. On considère Y une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

$$P(Y = k/X = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Déterminer la loi de Y .
 - (b) Montrer que $U = Y + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
 - (c) Déduire la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Soit la variable aléatoire $Z = X - Y$.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable Z .
 - (b) Déterminer la loi conditionnelle de Z sachant $(X = n)$.
 - (c) En déduire que Z suit la même loi que Y .
 - (d) Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes.
 - (e) Calculer $\text{Cov}(Y, Z)$ et déduire la valeur de $\text{Cov}(X, Y)$.

Fin de l'énoncé