



Concours Biologie et Géologie Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

1. (a) Déterminons le polynôme caractéristique P_A de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =_{C_1: C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &=_{\substack{L_2: L_2-L_1 \\ L_3: L_3-L_1}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Donc A admet 1 comme unique valeur propre.

- (b) - Puisque 0 n'est pas une valeur propre de A , A est inversible.
- Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.

$$\text{- Autrement : } \operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

donc $\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = 2 \neq 3$ ordre de multiplicité de la valeur propre 1 d'où A n'est pas diagonalisable.

- (c) Soit $X = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ c.à.d $f(X) - X = 0$ où encore

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne de $F = \operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$, alors F est un plan de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim F = 2$.

On vérifie que $f(u) = u$ et $f(v) = v$, donc u et v sont dans F .

(d) On a : $\text{card } \mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre, en effet

$$\det \mathcal{B}' = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

On conclut que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}'$.

$${}^t P P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F .

(a) On a, $p(u) = u$ et $p(v) = v$ car u et v sont dans F , $p(w) = 0$ car $w \in F^\perp$, d'où la matrice de P dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Soit C' la matrice de p , dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $C' = P C {}^t P$.

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$C' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = \|(x + y - 2, y - 1, -x + y - 1)\|^2 = \|x(1, 0, -1) + y(1, 1, 1) - (2, 1, 1)\|^2.$$

Posons $u' = (1, 0, -1)$, $v' = (1, 1, 1)$ et $w' = (2, 1, 1)$.

(d) On remarque que u' et v' sont dans F et on a (u, v) une base orthonormale de F .
D'après la propriété de minimisation en norme, ce minimum est atteint pour la projection orthogonale de w' sur F

$$p(w') = \langle w', u \rangle u + \langle w', v \rangle v = \frac{1}{2}(1, 0, -1) + \frac{4}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{11}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\|p(w') - w'\|^2 = \left\| \left(\frac{11}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right) - (2, 1, 1) \right\|^2 = \left\| \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \right\|^2 = \frac{1}{6}$$

Ainsi

$$\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} g(x, y) = \min_{s \in F} \|s - w'\|^2 = \|p(w') - w'\|^2 = \frac{1}{6}.$$

3. (a) Le système est linéaire, donc admet une écriture matricielle sous la forme :
 $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, avec A la matrice donnée au dessus.

$$(b) \text{ On a } B^2 = (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On a d'après la formule de Binôme $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k = I_3 + nB = n(A - I_3) + I_3 = nA + (1 - n)I_3.$$

(d) Par recurrence, on a $X_n = A^n X_0$, d'où

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - n & 2n & -n \\ -n & 2n + 1 & -n \\ -n & 2n & 1 - n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} u_n = a - n(a - 2b + c) \\ v_n = b - n(a - 2b + c) \\ w_n = c - n(a - 2b + c) \end{cases}$$

(e) Pour que les trois suites u_n , v_n et w_n soient constantes, il faut que $a - 2b + c = 0$.

Exercice 2

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale centrée et réduite de fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. (a) La fonction de répartition de $Y = X^2$ est donnée par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y).$$

$$\text{Si } y \leq 0, \quad F_Y(y) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } y > 0, \quad F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1. \end{aligned}$$

(b) La fonction densité de probabilité f_Y de Y est donnée par

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. La somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes de densité f et g , suit une loi de densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

On considère l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx, \quad t > 0.$$

(a) *Pb en 0* : $\frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x}}$ si $x \rightarrow 0$

Pb en t : $\frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t-x}}$ si $x \rightarrow t$

$$I = \int_0^{t/2} \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx + \int_{t/2}^t \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx = I_1 + I_2$$

I_1 et I_2 sont convergentes d'après le critère de Riemann donc I est convergente.

(b) On pose le changement de variable $\sin(u) = \sqrt{\frac{x}{t}}$ d'où $\cos(u)du = \frac{dx}{2\sqrt{xt}}$

$$I = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{tx(1-\frac{x}{t})}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(u)du}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2du = \pi.$$

(c) Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y .
On pose $U = Y_1 + Y_2$. La densité de U donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t)f_{Y_2}(x-t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} f_{Y_2}(x-t) dt.$$

on pose $y = x - t$ alors $f_U(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-y)}} e^{-\frac{x-y}{2}} f_{Y_2}(y) dy$

- Si $x \leq 0$, alors $f_U(x) = 0$.

- Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f_U(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-y)}} e^{-\frac{x-y}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(x-y)}} dy = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \pi = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Donc U suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. (a) La variable $T = e^{-\frac{U}{2}}$, on a $U(\Omega) = [0, +\infty[$ ce qui donne $T(\Omega) =]0, 1]$

$\forall t \in \mathbb{R}$, on a $F_T(t) = P(T \leq t) = P(e^{-\frac{U}{2}} \leq t)$

- Si $t \leq 0$, alors $F_T(t) = 0$.

- Si $0 < t \leq 1$, alors $F_T(t) = P(U \geq -2\ln(t)) = 1 - F_U(-2\ln(t))$

- Si $t > 1$, alors $F_T(t) = 1$.

d'où

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{t} f_U(-2\ln(t)) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) L'inégalité de Markov est donnée par

$$\forall a > 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$

En utilisant cette inégalité

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) = P(e^{nt\bar{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)}) \leq \frac{E(e^{nt\bar{X}_n})}{e^{nt(p+\varepsilon)}} = e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}.$$

(d) On a l'inégalité $\ln(pe^t + q) - tp \leq \frac{t^2}{8}$, alors $n(\ln(pe^t + q) - tp) \leq n\frac{t^2}{8}$ où encore $n(\ln(pe^t + q) - tp) - nt\varepsilon \leq n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)$ en suite, on a l'inégalité :

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))} \leq e^{n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)}.$$

(e) Soit $\varphi(t) = \frac{t^2}{8} - t\varepsilon$, on a $\varphi'(t) = \frac{t}{4} - \varepsilon$ et par suite φ admet un minimum global en $t = 4\varepsilon$
c.à.d $\frac{t^2}{8} - t\varepsilon \geq -2\varepsilon^2$, puisque

$$\forall t > 0 \quad P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)}$$

on déduit que l'inégalité reste vraie pour $t = 4\varepsilon$

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

3. On pose $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$, d'après la question précédente, on a l'inégalité

$$P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

4. On a $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k) = 1 - \bar{X}_n$, alors $\bar{Y}_n - q = 1 - \bar{X}_n - (1 - p) = p - \bar{X}_n$

$$P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) = P(p - \bar{X}_n \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - p \leq -\varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

D'après les questions 2(e) et 3, on a l'inégalité :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - p \leq -\varepsilon) + P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

(a) *Pb en 0* : $\frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x}}$ si $x \rightarrow 0$

Pb en t : $\frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t-x}}$ si $x \rightarrow t$

$$I = \int_0^{t/2} \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx + \int_{t/2}^t \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx = I_1 + I_2$$

I_1 et I_2 sont convergentes d'après le critère de Riemann donc I est convergente.

(b) On pose le changement de variable $\sin(u) = \sqrt{\frac{x}{t}}$ d'où $\cos(u)du = \frac{dx}{2\sqrt{xt}}$

$$I = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{tx(1-\frac{x}{t})}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(u)du}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2du = \pi.$$

(c) Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y .
On pose $U = Y_1 + Y_2$. La densité de U donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t)f_{Y_2}(x-t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} f_{Y_2}(x-t) dt.$$

on pose $y = x - t$ alors $f_U(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-y)}} e^{-\frac{x-y}{2}} f_{Y_2}(y) dy$

- Si $x \leq 0$, alors $f_U(x) = 0$.

- Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f_U(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-y)}} e^{-\frac{x-y}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(x-y)}} dy = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \pi = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Donc U suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. (a) La variable $T = e^{-\frac{U}{2}}$, on a $U(\Omega) = [0, +\infty[$ ce qui donne $T(\Omega) =]0, 1]$

$\forall t \in \mathbb{R}$, on a $F_T(t) = P(T \leq t) = P(e^{-\frac{U}{2}} \leq t)$

- Si $t \leq 0$, alors $F_T(t) = 0$.

- Si $0 < t \leq 1$, alors $F_T(t) = P(U \geq -2\ln(t)) = 1 - F_U(-2\ln(t))$

- Si $t > 1$, alors $F_T(t) = 1$.

d'où

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{t} f_U(-2\ln(t)) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) L'inégalité de Markov est donnée par

$$\forall a > 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$

En utilisant cette inégalité

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) = P(e^{nt\bar{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)}) \leq \frac{E(e^{nt\bar{X}_n})}{e^{nt(p+\varepsilon)}} = e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}.$$

(d) On a l'inégalité $\ln(pe^t + q) - tp \leq \frac{t^2}{8}$, alors $n(\ln(pe^t + q) - tp) \leq n\frac{t^2}{8}$ où encore $n(\ln(pe^t + q) - tp) - nt\varepsilon \leq n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)$ en suite, on a l'inégalité :

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))} \leq e^{n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)}.$$

(e) Soit $\varphi(t) = \frac{t^2}{8} - t\varepsilon$, on a $\varphi'(t) = \frac{t}{4} - \varepsilon$ et par suite φ admet un minimum global en $t = 4\varepsilon$
c.à.d $\frac{t^2}{8} - t\varepsilon \geq -2\varepsilon^2$, puisque

$$\forall t > 0 \quad P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)}$$

on déduit que l'inégalité reste vraie pour $t = 4\varepsilon$

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

3. On pose $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$, d'après la question précédente, on a l'inégalité

$$P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

4. On a $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k) = 1 - \bar{X}_n$, alors $\bar{Y}_n - q = 1 - \bar{X}_n - (1 - p) = p - \bar{X}_n$

$$P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) = P(p - \bar{X}_n \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - p \leq -\varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

D'après les questions 2(e) et 3, on a l'inégalité :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - p \leq -\varepsilon) + P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

5. Pour que l'intervalle de confiance soit au niveau de confiance 0.95, il faut que $2e^{-2n\epsilon^2} \leq 0.05$, c.à.d $e^{-2n\epsilon^2} \leq \frac{1}{40} \implies \epsilon \geq \sqrt{\frac{\ln(40)}{2n}}$, il suffit de choisir $\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(40)}{2n}} \ll \sqrt{\frac{5}{n}}$ l'amplitude de l'intervalle de confiance est plus réduite que celle obtenue à la question 1(c).
-

6. (a) Si on a réalisé n expériences indépendamment les unes des autres, la loi du nombre S_n est une loi Binomiale de paramètre n et p .
-

- (b) L'espérance de $\frac{S_n}{n}$ est $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}np = p$.
La variance de $\frac{S_n}{n}$ est $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{1}{n}pq$,
-

- (c) On a $\frac{S_n}{n}$ suit la même loi que $\bar{X}_n$, pour $n = 1000$ l'intervalle de confiance par niveau de confiance 0.95, l'amplitude de l'intervalle de confiance est la plus réduite,

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(40)}{2000}} = \frac{1}{20} \sqrt{\frac{\ln(40)}{5}} \simeq 0,0429.$$

$$\sqrt{\frac{5}{n}} = \sqrt{\frac{5}{1000}} = 0,0707.$$