



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Session 2021	Date : 21/06/2021	Heure : 8H	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices non programmables est autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 (7 points)

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

1. (a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
(b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
(c) Donner la dimension du sous espace vectoriel $F = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et vérifier que u et v sont dans F .
(d) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(e) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}'$. Montrer que ${}^tPP = I_3$.
Que peut-on conclure pour $\mathcal{B}'$.
2. Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F .
(a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$.
(b) En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(c) Soit g une application de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x + y - 2)^2 + (y - 1)^2 + (-x + y - 1)^2.$$

Déterminer les vecteurs u', v' et w' de $\mathbb{R}^3$ tels que $g(x, y) = \|xu' + yv' - w'\|^2$.

(d) Calculer :

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y).$$

3. Soient a, b et c trois réels. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

(b) On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 .

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = nA + (1-n)I_3$.

(d) En déduire l'expression des termes généraux u_n , v_n et w_n en fonction de n , a , b et c .

(e) Donner une condition sur a, b et c pour que les trois suites u_n , v_n et w_n soient constantes.

Exercice 2 (6 points)

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale centrée et réduite, de fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et on note Φ la fonction de répartition de X .

1. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y .

(a) Exprimer, pour tout réel x , $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.

(b) En déduire que la fonction densité de probabilité f_Y de Y est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On rappelle que la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes de densité f et g , suit une loi de densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Pour $t > 0$, on considère l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx.$$

- (a) Montrer que I est convergente.
- (b) En effectuant le changement de variable $\sin(u) = \sqrt{\frac{x}{t}}$, montrer que $I = \pi$.
- (c) Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y .
On pose $U = Y_1 + Y_2$. Montrer que U suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que la variable $T = e^{-\frac{U}{2}}$ suit une loi uniforme sur $]0, 1]$.
- (b) Donner l'espérance et la variance de T .
4. Soit a un réel strictement positif et soit Z une variable aléatoire de densité f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_Z(x) = \alpha e^{\frac{-x^2}{a} + x}.$$

- (a) Montrer que $\alpha = \frac{e^{-\frac{a}{4}}}{\sqrt{a\pi}}$.
- (b) En déduire que Z suit une loi normale de moyenne $\frac{a}{2}$ et d'écart type $\sqrt{\frac{a}{2}}$.
- (c) Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de Φ la fonction de répartition de la loi X .
- (d) En déduire que $P(0 < Z < 2) = \Phi\left(\frac{4-a}{\sqrt{2a}}\right) + \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) - 1$.
- (e) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de l'intégrale $\int_0^2 e^{\frac{-x^2}{2} + x} dx$.
(On donne : $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\sqrt{2\pi} \simeq 2.5066$ et $\sqrt{e} \simeq 1.6487$).

Exercice 3 (7 points)

Soit $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

Soit un entier $n \geq 1$ fixé. On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé. On

note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

1. (a) Justifier que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
- (b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, montrer que $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- (c) En déduire que l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{5}{n}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95.

On recherche par la suite un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 d'amplitude plus petite.

On fixe deux réels strictements positifs t et ε .

2. (a) Etablir l'égalité $P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) = P(e^{nt\bar{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)})$.

(b) Montrer que :

$$E(e^{nt\bar{X}_n}) = (e^t p + q)^n.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Markov, établir l'inégalité suivante :

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}.$$

(d) En admettant l'inégalité $\ln(pe^t + q) - tp \leq \frac{t^2}{8}$, montrer qu'on a ainsi l'inégalité suivante :

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon)}.$$

(e) En déduire que :

$$P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

3. On pose $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$. Etablir l'inégalité $P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$.

4. Déduire des questions 2.(e) et 3. l'inégalité :

$$P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

5. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance 0.95 et pour une amplitude plus réduite que celle obtenue à la question 1.(c).

6. On cherche à observer des mutations sur des cellules identiques en les soumettant à une source de radioactivité. À l'issue de chaque expérience, la cellule testée a une probabilité p d'avoir muté.

(a) Si on a réalisé n expériences indépendamment les unes des autres, quelle est la loi du nombre S_n de cellules mutées parmi les n testées ?

(b) Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.

(c) Pour $n = 1000$. Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance 0.95, où l'amplitude de l'intervalle de confiance est la plus réduite.

Fin de l'énoncé