



Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2021

Concours Biologie & Géologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 24 Juin 2021 Heure : 8 H Durée : 3 H Nb pages : 8

Barème : Exercice 1 : 5 pts Exercice 2 : 3 pts Problème : 12 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Le candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition

L'annexe doit être obligatoirement remise avec la copie d'examen

Exercice 1:

Un réfractomètre d'Abbe est un appareil servant à mesurer des indices optiques, très utilisé notamment pour la caractérisation rapide d'échantillons. Il est utilisé dans l'industrie agroalimentaire la concentration de sucre dans les jus pourrait être déduite à partir de la mesure de leurs indices de réfraction.

Dans cet exercice on se propose d'étudier la marche d'un rayon lumineux à travers ce système optique et de déterminer l'indice de réfraction des échantillons.

1- Etude du prisme :

Soit un prisme ABC de forme triangle rectangle en A , d'angle au sommet β en B et d'indice de réfraction n qui dépend de la longueur d'onde λ de la lumière de l'éclairement selon la loi de Cauchy : $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ avec $n_a = 1$ a et b constantes positives caractéristiques (figure 1). Plus l'indice de réfraction d'un milieu est élevé, plus le milieu réfracte la lumière.

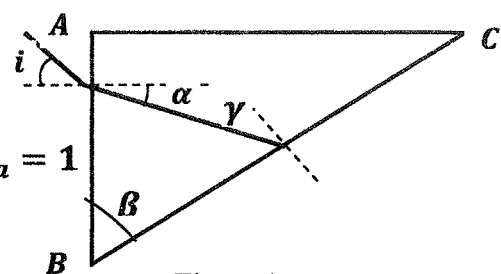


Figure 1

1-1 Lois de réfractions

1-1-1 Rappeler la loi de Snell-Descartes pour le passage d'un rayon lumineux à travers un dioptré plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 , avec i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction.

1-1-2 Si on se place dans le cas où $n_1 > n_2$, définir le phénomène de réflexion totale, et préciser à quelle condition sur i le phénomène de réflexion totale se produit.

1-1-3 Si on se place dans le cas où $n_1 < n_2$, déterminer en fonction de n_1 et n_2 l'angle limite de réfraction r_l .

1-2 Sur la figure 1-2 de l'annexe, si le rayon sort par la face **CB** sous un angle i' , tracer la marche du rayon de lumière en indiquant si le rayon se rapproche ou s'éloigne de la normale.

1-3 Par des considérations de géométrie, montrer que $\beta = \alpha + \gamma$, puis exprimer la déviation D_v entre le rayon incident et le rayon sortant par la **BC** du prisme, en fonction de i, i' et β .

1-4 On s'intéresse à deux radiations de la lumière blanche : la radiation bleue de longueur d'onde $\lambda_{\text{bleue}} = 480\text{nm}$ et une autre rouge de longueur d'onde $\lambda_{\text{rouge}} = 650\text{nm}$. Lors du passage à travers le prisme, la radiation bleue est la plus réfractée. Justifier cette observation sans calcul à l'aide de la loi de Cauchy.

2- Etude du réfractomètre

Il est constitué de deux prismes en verre d'indice n entre lesquels est positionné un mince film de jus liquide dont on se propose de mesurer son indice de réfraction n_l .

Le prisme d'entrée (1) est accolé à une lampe à vapeur de sodium et permet d'éclairer le liquide en incidence rasante (rayon(a)). Les rayons traversant le prisme (2) sont envoyés sur un miroir dont on peut contrôler l'inclinaison. Après réflexion, ces rayons sont alors observés par l'utilisateur à l'aide d'une lunette (figure 2).

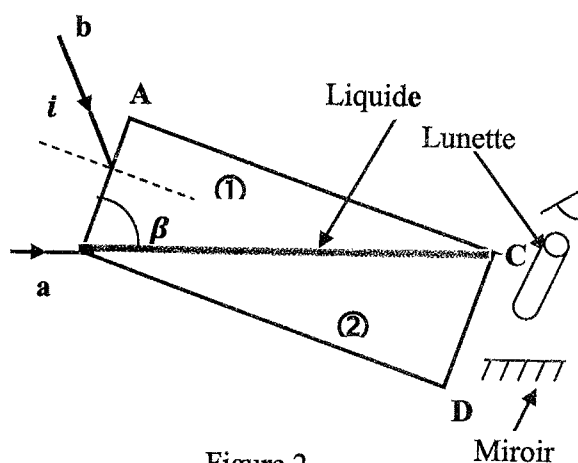


Figure 2

L'observateur règle la position du miroir de sorte à placer la limite de séparation entre la zone claire et la zone sombre au centre du réticule d'une lunette.

2-1 Indiquer pourquoi la lumière blanche semble a priori inadaptée à la mesure de l'indice de réfraction de l'échantillon ? Quel phénomène peut gêner la mesure ?

2-2 Sur la figure 2-2 de l'annexe, compléter la marche du rayon lumineux (a) en incidence rasante. On suppose que $n > n_l$, et au point **I** on note r_1 l'angle de réfraction à l'interface liquide-verre, i_2 et r_2 respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction sur la face de sortie du prisme. L'indice de l'air sera quant à lui pris égal à 1.

2-3 Montrer l'indice n_l du liquide est lié à l'angle r_2 par la relation :

$$n_l = n \cdot \sin \left[\beta - \sin^{-1} \left(\frac{\sin(r_2)}{n} \right) \right]$$

Calculer la valeur numérique de n_l pour $n = 1,732$, $r_2 = 23,3^\circ$ et $\beta = 65,0^\circ$, l'expérience ayant été réalisée à 20°C .

2-4 Dans le tableau suivant, on donne la variation de l'indice du liquide n_l en fonction de la concentration du sucre C en gl^{-1} dans la solution.

Indice n_l	1,3577	1,3592	1,3607	1,3621	1,3635	1,3650	1,3665	1,3680	1,3694
C en gl^{-1}	150	160	170	180	190	200	210	220	230

2-4-1 D'après le tableau la variation de l'indice n_l en fonction de la concentration en sucre est linéaire et elle se met sous la forme : $n_l = p \cdot C + q$, déterminer les constantes p et q si l'on sait que l'indice de l'eau pure (concentration $C = 0$) est $n_e = 1,33$.

2-4-2 En déduire la teneur approximative en sucre de l'échantillon de la question 2-3.

2-5 Sur la figure 2-5 de l'annexe compléter le chemin parcouru par le rayon (b) et conclure quant au fonctionnement du réfractomètre.

3- Fonctionnement d'un réfractomètre portable

Pour les réfractomètres portables, la mesure se fait par transparence, au moyen d'un prisme présentant un indice de réfraction élevé, et peut être lue directement sur l'échelle graduée en degré **Brix** ($^{\circ}\text{B}$) de l'instrument. La lumière, au passage du dioptre entre l'échantillon et le prisme, est déviée. Le degré **Brix** représente le pourcentage massique de sucre de l'échantillon, c'est-à-dire la masse de sucre dans 100 g ($V = 100\text{ mL}$ si c'est l'eau).

3-1 Un utilisateur du réfractomètre pense que : « Si l'échantillon est faiblement concentré, l'angle de réfraction est grand, car la différence d'indice de réfraction entre l'échantillon et le prisme est élevée. Si l'échantillon est très concentré, l'angle de réfraction est petit, car la différence d'indice de réfraction entre l'échantillon et le prisme est réduite.

3-1-1 Sur la figure 3-1 de l'annexe, indiquer l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction r_1 . Quelle est la valeur de i_1 ?

3-1-2 Calculer r_1 pour la solution étudiée à 50 g/L et pour la solution à 700 g/L pour $n = 1,732$.

3-1-3 Compte tenu du résultat obtenu dans la question 3-1-2 l'utilisateur avait-il raison? Justifier.

3-2 Quelles seraient les valeurs en degré **Brix** des deux concentrations citées dans la question 3-1-2 ?

3-3 Application : Calcul du taux de sucre dans un jus

Après triage des fruits, trempage, puis ou centrifugation lente, on obtient une pulpe pauvre en sucre la mesure par le réfractomètre donne généralement une valeur comprise entre 3 et 10°Brix . Pour que le jus soit suffisamment sucré, on doit lui ajouter du sucre pour atteindre selon les fruits entre 60° et 65°Brix . Cette opération valorise son goût et le protège des micro-organismes indésirables. Prenons 50 Kg de pulpe ayant un $B_1 = 4^{\circ}$, on désire atteindre une teneur avec un $B_2 = 60^{\circ}$, il faut donc ajouter une masse m_s de sucre à la pulpe.

3-3-1 Calculer m_1 la masse de sucre contenue dans les 50 kg de pulpe.

3-3-2 Calculer m_2 la masse de sucre qu'il faudrait dans les 50 kg de pulpe.

3-3-3 Calculer la masse m_s de sucre à rajouter dans le jus.

Exercice 2

1- Entre deux points A et B d'un circuit une branche est constituée d'un générateur de tension e en série avec une résistance R est parcouru par un courant i . On note par u_{AB} la tension entre les deux points A et B .

1-1 Exprimer la tension u_{AB} en fonction de i , R et e .

1-2 La fonction $i = f(u_{AB})$ est appelée caractéristique électrique du dipôle équivalent.

Tracer l'allure de la caractéristique $i = f(u_{AB})$, tout en précisant les points d'intersection de cette courbe avec les deux axes.

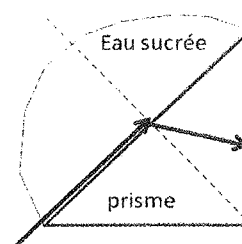


Figure 3

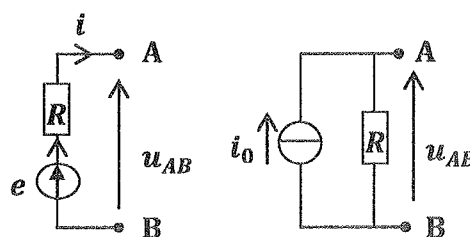


Figure 4

1-3 Montrer qu'entre deux points **A** et **B** d'un circuit, un générateur de tension **e**, en série avec une résistance **R**, peut être assimilé à un générateur de courant idéal **i₀** en parallèle avec cette même résistance **R**. Exprimer alors **i₀** en fonction de **e** et **R**.

2- On dispose d'un voltmètre de très grande résistance interne supposée infinie, d'un générateur de tension (GBF) et des résistances réglables. La force électromotrice du générateur étant fixée en mode continu, on effectue alors entre ses deux bornes les deux mesures suivantes :

mesure (1) : on mesure une tension **U = 6 V** pour une résistance de charge infinie ;

mesure (2) : On branche une résistance de charge égale à **50 Ω** aux bornes du générateur et on mesure une tension de **3 V** aux bornes de cette résistance. Déduire de ces mesures la résistance interne **R_g** et la force électromotrice **E** du générateur étudié.

3- On alimente désormais par ce générateur une association **R-C** en série, en régime sinusoïdal de pulsation réglable **ω**. Quelle sera, en module, l'impédance de charge minimale ? En déduire à quelle condition (qualitative) on pourra considérer le générateur comme idéal. On supposera cette condition remplie dans la suite, avec **R = 4,7 kΩ** et **C = 22 nF**.

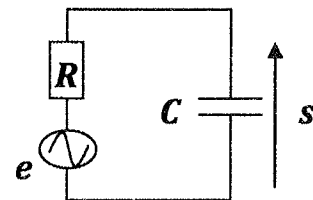


Figure 5

4- En l'absence d'oscilloscope branché sur le circuit.

4-1 Déterminer la fonction de transfert complexe en tension $\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{s}}{\bar{e}}$ si la grandeur de sortie est la tension **s(t)** aux bornes du condensateur et la tension d'entrée la tension **e(t)** du GBF supposé idéal, quel est le filtrage ainsi réalisé? Comment définit-on la pulsation de coupure d'un filtre de cette nature et donner son expression en fonction de **R** et **C**?

4-2 Application numérique : Calculer la fréquence de coupure du filtre (à un facteur 10 près).

5- On utilise un oscilloscope dont les caractéristiques d'entrée sont indiquées : «**1 MΩ, 25 pF**» dans la suite, on désigne par **R₀** et **C₀** la résistance et la capacité correspondantes. Cet appareil, branché sur le filtre précédent, correspond ainsi au circuit figure 6.

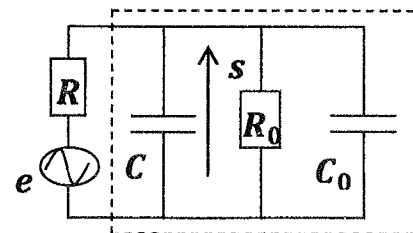


Figure 6

Déterminer simplement le gain en tension à basse fréquence, noté **H₀**.

6- Exprimer l'admittance complexe **Y**. Quelle est la limite à basse fréquence du déphasage de la tension **s** par rapport à l'intensité **i** parcourant le dipôle équivalent d'admittance **Y**?

7-

7-1 En utilisant les équivalences Norton-Thévenin, montrer que ce circuit peut être simplifié en un simple circuit **R' - C'** en série, Déterminer **R'** en fonction de **R** et **R₀** et **C'** en fonction de **C** et **C₀**

7-2 Montrer que la nouvelle fonction de transfert $\bar{H}' = \frac{\bar{s}}{\bar{e}}$ peut se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

8- Comparer **H₀** et la nouvelle fréquence de coupure aux valeurs précédentes (question 5), et conclure quant à l'utilisation de l'oscilloscope pour étudier le filtre **RC**.

Problème : Etude d'un pendule de torsion

A- Etude mécanique

On considère un pendule de torsion constitué d'une tige horizontale (T_g) de masse négligeable et de longueur $2l$ suspendu par son centre O par un fil de torsion vertical (F) dont l'extrémité supérieure du fil est reliée à un support fixe. Aux extrémités A et B de la tige sont fixées deux petites sphères identiques supposées ponctuelles de même masse $\frac{m}{2}$. La tige peut tourner autour de l'axe Oz matérialisé par le fil de torsion. Cet axe vertical noté Δ est orienté vers le haut.

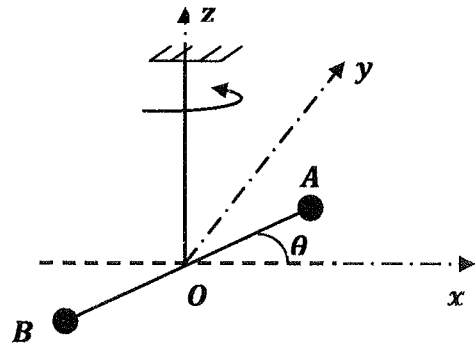


Figure 7

Le mouvement du pendule est étudié dans un plan (x, O, y) d'un référentiel terrestre $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen, auquel on associe la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce plan on définit le repère des coordonnées polaires (r, θ) , de vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, avec l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{u}_r)$. Le vecteur position lié au point A est : $\vec{OA} = l \vec{u}_r$.

Lorsqu'on fait tourner la tige selon l'axe du fil d'un angle θ (figure 7), on "tord" le fil. Lorsqu'on lâche la tige, le fil se "détord" en exerçant sur la tige un couple de rappel $M = -K\theta$ où K est la constante de torsion du fil.

On suppose qu'au repos, l'angle de torsion est nul.

A l'instant choisi comme origine des temps, le pendule est abandonné avec les conditions initiales $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$.

A-1- Etude cinématique

A-1-1 Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) du point A en fonction de ses coordonnées (l, θ) .

A-1-2 Exprimer les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

A-1-3 Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point A dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

A-2- Etude Dynamique

Dans cette question on se propose de déterminer l'équation horaire du mouvement du pendule à partir du théorème du moment cinétique.

A-2-1 Le système étudié étant constitué par les deux points matériels A et B . Si l'on admet que le moment cinétique du système étudié est la somme des moments cinétique de chacun des deux points, montrer alors que le moment cinétique du système par rapport au point O s'écrit :

$\vec{L}_O = ml^2 \dot{\theta} \vec{k}$. En déduire L_Δ , le moment cinétique du système par rapport à l'axe de rotation Δ .

A-2-2 Dresser le bilan des forces qui s'exercent sur la tige.

A-2-3 Énoncer le théorème du moment cinétique dans le cas d'un système en rotation par rapport à l'axe Δ .

A-2-4 Seul le moment du couple de force de rappel est non nul, en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport au point O , montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme : $\ddot{\theta} + \frac{K}{ml^2} \theta = 0$

A-2-5 Donner dans ce cas la loi horaire $\theta(t)$ du mouvement de la barre, puis exprimer la pulsation ω_0 caractérisant le mouvement du pendule de torsion en fonction de K , m et l .

A-3- Etude Energétique

A-3-1 Enoncer le théorème de l'énergie mécanique E_m .

A-3-2 En appliquant le théorème de l'énergie mécanique au système, retrouver l'équation différentielle du mouvement.

A-4- Dans la suite du problème on tient compte des frottements s'exerçant sur les deux masses A et B . On les modélise par une force $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ sur chacune des deux masses $\frac{m}{2}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de chacune des deux masses et λ est une constante positive. On négligera cependant les frottements s'exerçant sur la tige.

A-4-1 Quelle est l'origine physique des frottements s'exerçant sur chaque masse ?

A-4-2 En appliquant le théorème du moment cinétique au pendule, montrer que l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble {masses+tige} est de la forme:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

et déduire les expressions de β et ω_0 , déterminer leurs dimensions.

A-4-3 La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme:

$\theta(t) = P e^{r_1 t} + Q e^{r_2 t}$, où P et Q sont deux constantes avec r_1 et r_2 sont les deux solutions de l'équation caractéristique : $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$, décrire brièvement les différents régimes du mouvement du pendule.

A-4-4 A quelle(s) condition(s) sur β peut on avoir :

$\theta(t) = e^{-\beta t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$? Exprimer alors les constantes c_1 , c_2 et ω en fonction des données. On suppose cette condition vérifiée dans la suite. Tracer la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps, les courbes enveloppes et la tangente à l'origine de l'enveloppe.

A-4-5 On appelle décrément logarithmique δ la quantité : $\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}$ ou $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la pseudo-période. Exprimer δ en fonction de T , n et β .

A-5- Le pendule de torsion oscille de 2 pseudo-périodes pendant 12s. L'amplitude des oscillations est réduite d'un facteur 3 au bout de 10 oscillations. On prendra pour cette question $ml^2 = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$ et $l = 20 \text{ cm}$.

Calculer numériquement à partir de ces valeurs la pseudo-période T , le décrément logarithmique, la constante de temps $\tau = \frac{1}{\beta}$, la pseudo-pulsation ω et la pulsation propre ω_0 et la constante de torsion du fil K .

B- Etude Thermodynamique :

On reprend le pendule de torsion figure 7 et on suppose que le fil F est caractérisé par sa capacité calorifique C , supposée constante, et par sa « constante » de torsion $K(T)$ qui ne dépend que de la température T . Lors d'une rotation élémentaire de la tige d'un angle $d\theta$, le travail dW reçu (algébriquement) par F est : $dW = M(T, \theta) \cdot d\theta$

où $M(T, \theta)$ est le moment du couple de forces imposé à F dont l'expression est :

$$M(T, \theta) = K(T) \theta$$

Cette dernière équation correspond à l'équation d'état du fil. Lors d'une transformation infinitésimale réversible où la température et l'angle de rotation du fil varient respectivement de dT et de $d\theta$, la quantité de chaleur reçue par le fil s'écrit : $dQ = C dT + b(T, \theta) d\theta$ où $b(T, \theta)$ est un coefficient calorimétrique.

B-1-

B-1-1 Énoncer le premier principe et le second principe de la thermodynamique pour un système physique quelconque.

B-1-2 Exprimer les différentielles respectives dU et dS de l'énergie interne U et de l'entropie S du fil.

B-2- Sachant que ces deux différentielles sont bien des différentielles totales exactes, montrer que :

$$b(T, \theta) = -T\theta \frac{dK}{dT}$$

B-3- Dans tout ce qui suit, on prendra :

$$K(T) = K_0 - \alpha T$$

K_0 et α sont deux constantes positives et on admettra que cette expression de $K(T)$ reste toujours positive pour les températures considérées. Calculer $b(T, \theta)$.

B-4- Montrer que les fonctions d'état énergie interne $U(T, \theta)$ et entropie $S(T, \theta)$ du fil peuvent se mettre sous la forme :

$$U = CT + \frac{K_0}{2}\theta^2 + U_0 \text{ et } S = C \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\alpha}{2}\theta^2 + S_0$$

U_0 et S_0 étant deux constantes d'intégration.

B-5-

B-5-1 Quelle est la relation entre M et θ dans une transformation isotherme du fil ?

B-5-2 Quelle est la relation entre M et θ dans une transformation isentropique du fil ?

B-6- On imagine que, par des manipulations qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier, le fil subit le cycle de transformations suivantes que l'on supposera toutes réversibles.

i) Le fil est initialement dans un état d'équilibre E_1 à la température T_0 et à l'angle de rotation nul ($\theta_0 = 0$). Dans une première transformation $E_1 \rightarrow E_2$, on lui imprime une rotation jusqu'à valeur θ_1 de l'angle, tout en le maintenant en contact avec le milieu ambiant à la température T_0 (transformation isotherme).

ii) La seconde transformation $E_2 \rightarrow E_3$ est une rotation adiabatique jusqu'à l'angle $\theta_2 > \theta_1$. La température du fil est atteinte alors $T_1 < T_0$.

iii) La troisième transformation $E_3 \rightarrow E_4$ est une rotation isotherme à la température T_1 faisant passer l'angle de rotation de θ_2 à θ_3 avec $\theta_3 < \theta_2$.

iv) Enfin, la quatrième transformation est adiabatique et ramène le fil dans son état initial E_1 .

B-6-1 Pour chacune des transformations, déterminer le travail et la chaleur reçus par le fil en précisant leurs signes respectifs.

B-6-2 Démontrer la relation : $\theta_2^2 = \theta_3^2 + \theta_1^2$

B-6-3 Quel est le travail total W reçu par le fil lors du cycle ? Quel est son signe ?

B-6-4 Démontrer que :

$$\left| \frac{W}{Q_{AB}} \right| = 1 - \frac{T_1}{T_0}$$

Expliquer pourquoi ce résultat était prévisible.

Ne rien
écrire
ici

Session : Juin 2021 Concours : Biologie Géologie

Epreuve de : **Physique**

Nom : Prénom :

Institut d'origine :

Identifiant :

--	--	--	--	--	--

Série :

--	--	--

Annexe

Ne rien
écrire
ici

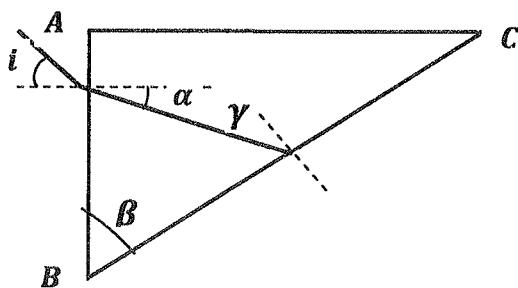


Figure 1-2

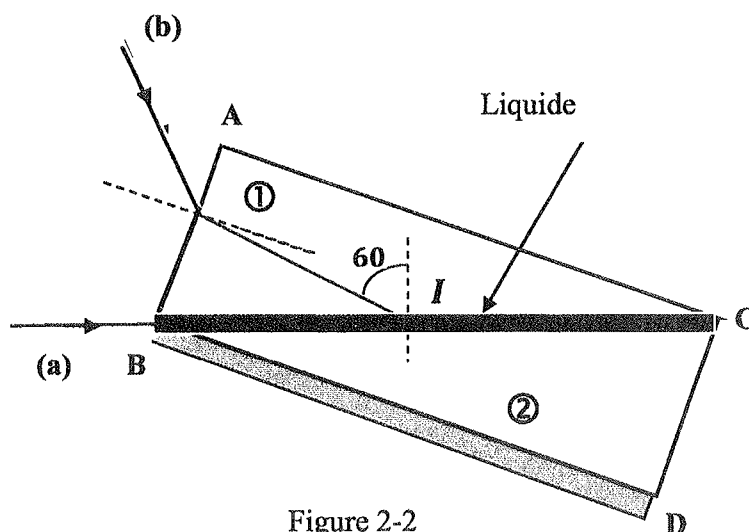


Figure 2-2

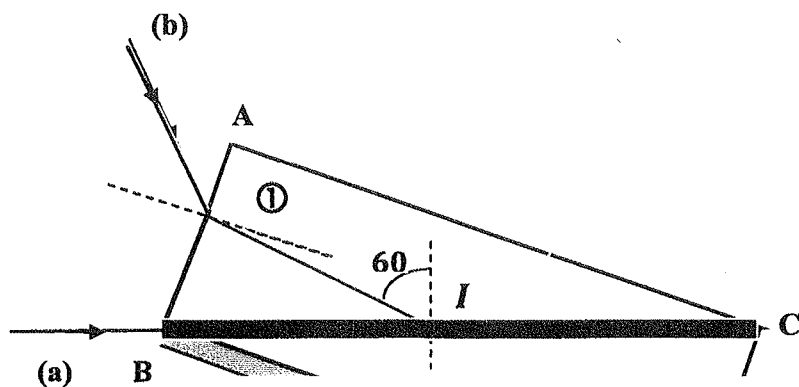


Figure 2-5

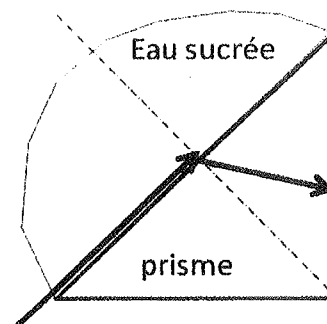


Figure 3-1