



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Mathématiques

Date : Mercredi 01 Juin 2022 Heure : 8H Durée : 3H Nbre pages : 4

Barème : Exercice 1 (7), Exercice 2 (6) et Exercice 3 (7)

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 (7 points)

On considère les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement A et B .

- Montrer que 0, -2 et 2 sont les trois valeurs propres de A . En déduire que A est diagonalisable.
 - Soit $e'_1 = (1, 2, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres de A et préciser la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
 - Calculer P^{-1} .
- Préciser les matrices D et Δ de f et g dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle relation existe-t-il entre A et D d'une part et B et Δ d'autre part ?
- Vérifier que $D^3 = 4D$. En déduire que $D^{2n+1} = 4^n D$ pour tout entier naturel n .
 - En déduire une expression de A^{2n+1} en fonction de A , puis de A^{2n+2} en fonction de A^2 .
 - Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels α_n et β_n à déterminer tels que $\Delta^n = \alpha_n \Delta^2 + \beta_n \Delta$.
 - En déduire une relation entre B^n , B^2 et B .

4. (a) Soit $C = A + B$. Sans faire le calcul, justifier que C est diagonalisable et donner ses valeurs propres et une base de chacun de ses sous espaces propres correspondants.
- (b) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base $\mathcal{B}$. On note par F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ définie par $F = \{u \in \mathbb{R}^3 / \varphi(u) = -2u\}$. Montrer que F est le plan d'équation : $x + y - 2z = 0$.
- (c) Soient $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e'_3$. Vérifier que (u_2, u_3) est une base orthonormale de F .
- (d) Définir une base orthonormale (u_1) de $F^\perp$.
5. (a) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $p(u)$ d'un vecteur u sur $F^\perp$. Écrire la matrice M de cette projection orthogonale p dans la base orthonormale (e_1, e_2, e_3) .
- (b) En déduire la matrice M' de la projection orthogonale q de E sur le plan vectoriel F .
- (c) Donner les matrices des projections orthogonales p et q dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 2 (6 points)

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0, 1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$. Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note N la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

On admet que, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

1. (a) Déterminer la loi de X . Préciser son espérance et sa variance.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi conditionnelle de N sachant ($X = n$) est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(N = k / X = n) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (c) Calculer $P(N = 0)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(N = k)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p . On définit la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.
- (a) Calculer $P(Z = 0)$, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.
- (b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
- (c) Montrer : $E((X - Y)^2) = 2V(X)$.
- (d) En déduire que Z admet une variance et la calculer.

3. Dans une population, la probabilité qu'une personne demande à être vaccinée contre la covid 19 est $p = 0,1$. On constitue, dans cette population, un échantillon de n individus et on note U la variable aléatoire comptant le nombre de personnes de l'échantillon qui demandent à être vaccinées.

(a) Quelle est la loi de U ?

On suppose maintenant que $n = 10000$.

(b) Donner l'espérance et la variance de U .

(c) Montrer qu'on peut approcher U par une loi normale. Donner ces paramètres

(d) Pour des raisons de conservation limitée des vaccins, le nombre de vaccins disponibles pour servir cet échantillon de 10000 individus est limité à une valeur α_{lim} qui correspond au nombre maximal de personnes qu'on peut vacciner. On appelle R le risque de ne pas pouvoir répondre à une demande massive de vaccination. Quel nombre α_{lim} de vaccins faut-il prévoir pour que le risque R soit au plus égal à 1% ?

(On donne $\phi(2.33) = 0.99$ où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

Exercice 3 (7 points)

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que la fonction f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X .

(b) Déterminer la fonction de répartition de X .

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et soit V une variable aléatoire définie par : $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) Rappeler la fonction de répartition de U .

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et X suivent la même loi.

3. On pose $Y = 2\ln(X)$.

Déterminer la fonction de répartition de Y et déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.

4. Dans la suite, on souhaite obtenir des valeurs approchées de $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$.

(a) Justifier que l'intégrale J est convergente.

(b) On pose que $Z = e^{Y-Y^3}$. Justifier que J est l'espérance de Z et que Z admet une variance.

5. Soit $(Z_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z . On pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Z_k - M_n)^2$$

- (a) Montrer que M_n est un estimateur sans biais de $E(Z)$.
- (b) Montrer que pour $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|M_n - E(Z)| \leq \alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(\alpha) - 1$
où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- (c) Dédurre un intervalle de confiance de J en fonction de M_n , S_n et n au risque d'erreur 5%.
- On donne $\Phi(1,96) = 0,975$.

★ Fin du sujet ★