



Concours Biologie et Géologie Epreuve de Physique

Date : 05 Juin 2023

Heure : 8 H00

Durée : 3 H

Nbre pages : 7

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants.

Première partie : Diffusion thermique – Diffusion de particules

On rappelle que dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Thermorégulation d'un mammifère marin

La loi phénoménologique de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit la proportionnalité entre la densité de flux thermique $\vec{J}_{th}$ et le gradient de température :

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Q1. Donner les unités de la densité de flux thermique $J_{th} = \|\vec{J}_{th}\|$ et de la conductivité thermique λ dans le système international des unités (SI). Justifier le signe " - " figurant dans cette loi.

Q2. Citer, en électrocinétique, la loi semblable à celle de Fourier tout en précisant les grandeurs analogues à $\vec{J}_{th}$, λ , T et au flux thermique Φ_{th} .

On se place en régime stationnaire. Le problème étudié est à symétrie cylindrique, par conséquent : $T = T(r)$ et $\vec{J}_{th} = J_{th}(r) \vec{u}_r$.

Un mammifère marin est modélisé par un cylindre de longueur L , couvert par une couche de graisse de conductivité thermique λ et d'épaisseur e comprise entre r_0 et $r_0 + e$ (figure 1). Cette couche permet de réduire les pertes thermiques. Son épaisseur peut varier selon la saison.

On note T_i la température interne ($r \leq r_0$) de l'animal supposée uniforme et T_e la température pour $r \geq r_0 + e$.

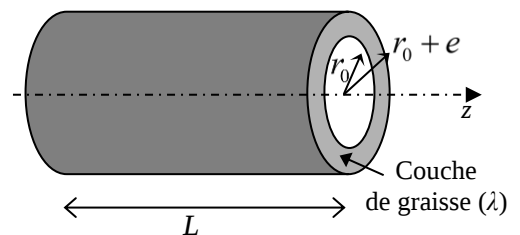


Figure 1

Q3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur le volume cylindrique de graisse de longueur L compris entre r et $r + dr$, montrer que :

$$J_{th}(r) = \frac{A}{r} \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

En déduire l'expression de la température $T(r)$ dans la région $r_0 \leq r \leq r_0 + e$.

Q4. Exprimer la puissance thermique Φ_{th} qui traverse le cylindre de rayon r et de longueur L dans le sens des r croissants.

En déduire que la résistance thermique de la couche de graisse s'écrit : $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_0 + e}{r_0}\right)$.

Q5. En plus de la couche de graisse, un jeune mammifère est protégé naturellement contre le froid par une paroi supplémentaire d'épaisseur e' (figure 2) et de conductivité λ' .

Déterminer puis calculer sa résistance thermique totale R_{tot} .

Ecrire en fonction de T_i , T_e et R_{tot} , la puissance thermique Φ_{th} transférée vers le milieu extérieur. En déduire l'énergie thermique Q_{th} perdue dans une durée Δt .

Sachant que les besoins métaboliques de ce jeune mammifère est de 500 kcal par jour. Combien de calories au minimum, sa nourriture devrait lui apporter au total en une journée afin de remplir tous ses besoins ?

On donne : $L = 60 \text{ cm}$, $r_0 = 10 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ cm}$, $\lambda = 7.10^{-2} \text{ SI}$, $e' = 1 \text{ cm}$, $\lambda' = 2.10^{-2} \text{ SI}$, $T_i = 36^\circ\text{C}$, $T_e = 0^\circ\text{C}$ et $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$.

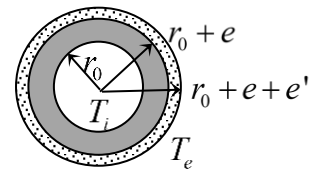


Figure 2

Collecte de nutriments par une bactérie

Pour assurer son métabolisme, une bactérie a besoin de consommer en permanence des nutriments. Leur absorption se produit à travers des pores membranaires, répartis à la surface.

Dans le cas d'une bactérie immobile, la collection de nutriments se fait par diffusion depuis le milieu environnant jusqu'à sa surface. On se propose de modéliser ce processus afin de définir une concentration minimale de nutriments, au-dessous de laquelle la bactérie ne peut plus veiller à ses besoins.

Données numériques :

- Coefficient de diffusion du glucose dans l'eau : $D = 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- Caractéristiques typiques d'une bactérie E. Coli :
 - Rayon du corps : $R = 1 \mu\text{m}$
 - Consommation de glucose par unité de volume de bactérie et par unité de temps : $A_0 = 10 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$

On assimile la bactérie à une sphère de rayon R (figure 3) et on suppose qu'elle absorbe des nutriments de façon isotrope à sa surface.

Dans le milieu extérieur, les nutriments migrent vers la bactérie avec un coefficient de diffusion D .

On note $c(M, t) [\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}]$ la concentration en nutriments en un point M , au temps t , et on note c_∞ la concentration des nutriments loin de la bactérie.

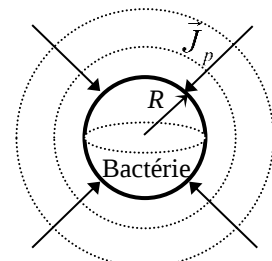


Figure 3

Q6. On rappelle que la loi de Fick reliant la concentration molaire des particules $c(M, t)$ et la densité de courant correspondant s'écrit : $\vec{J}_p(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} c(M, t)$

Préciser la dimension de la densité de courant $J_p(M, t)$.

On se placera dans un système de coordonnées sphériques centré sur la bactérie.

Q7. Expliquer brièvement que la densité de courant molaire s'écrit sous la forme $\vec{J}_p(M, t) = J_p(r, t) \vec{u}_r$.

Justifier que $J_p(r, t)$ est négative.

La récolte de nutriments par la bactérie est caractérisée par un flux $\Phi_0(r) [mol.s^{-1}]$, correspondant au nombre de moles de nutriments entrant par unité de temps dans une sphère de rayon r centrée sur la bactérie.

Au niveau de la surface de la bactérie, le flux $\Phi_0(R)$ entrant permet d'assurer l'activité métabolique. Celle-ci est caractérisée par la quantité de nutriments, notée A , consommée par unité de temps et de volume de la bactérie.

On se place dans la suite en régime stationnaire.

Q8. En faisant un bilan de matière sur une tranche comprise entre les surfaces sphériques de rayons r et $r + dr$, montrer que $\Phi_0(r)$ est une constante indépendante de r notée Φ_0 .

Q9. Exprimer le flux de nutriments Φ_0 collecté par la bactérie en fonction de sa consommation en nutriments A et de son rayon R .

Q10. Justifier que ce flux rentrant de nutriments s'exprime sous la forme : $\Phi_0 = D \frac{dc(r)}{dr} 4\pi r^2$.

Q11. En déduire que la concentration s'écrit sous la forme : $c(r) = c_\infty - \frac{\Phi_0}{4\pi D r}$

Q12. Exprimer $c(R)$ en fonction de c_∞ , D , R et A et en déduire la quantité maximale $A_{\max}$ que peut collecter une telle bactérie pour c_∞ donnée.

Q13. En utilisant les données numériques concernant la consommation volumique normale A_0 en glucose et le rayon R d'une bactérie E. Coli, déterminer la concentration en glucose minimale $c_{\infty, \min}$ dans le milieu pour qu'une bactérie puisse y survivre.

Deuxième partie : Détection et mesure des amplitudes des ondes sismiques

Un séisme est un phénomène géologique qui se produit lorsqu'il y a une libération très rapide d'énergie accumulée dans les plaques tectoniques terrestres, ce qui génère des vibrations ou des ondes sismiques qui se propagent à travers la croûte terrestre. La surveillance sismique et la préparation aux tremblements de terre sont essentielles pour réduire les risques pour la vie. Le séisme de magnitude 7,8 qui a frappé le sud-est de la Turquie et le nord de la Syrie le 6 février 2023 a coûté la vie à plus de 50 000 personnes.

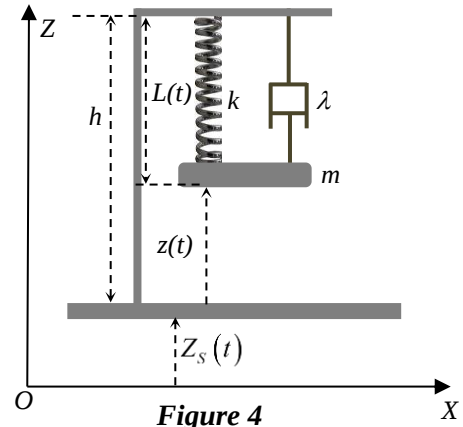
Sismographe vertical

Un sismographe est un instrument scientifique utilisé pour mesurer les vibrations et les ondes sismiques générées par les tremblements de terre. Les ondes mécaniques produites par un séisme sont de différentes natures. Les ondes volumiques (ondes Primaire et Secondaire) sont les plus rapides et ont des fréquences qui varient entre 0,2 et 10 Hz. A l'inverse, les ondes surfaciques (ondes de Love et de Rayleigh) sont les plus lentes mais les plus dévastatrices, avec des fréquences allant de 2 mHz à 0,2 Hz.

Le sismographe étudié dans cette partie est constitué d'un bâti rigide de hauteur h , solidaire au sol, auquel est suspendu une masse m par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide L_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ (figure 4).

Lorsqu'une onde sismique traverse le sol, elle déclenche un mouvement de vibration vertical de la masse m .

Une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω crée un mouvement vertical du sol repéré par la cote $Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ dans un référentiel $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ supposé galiléen, ce qui



déclenche un mouvement de la masse m par rapport au sol, caractérisé par la fonction $z(t)$.

A un instant t , le ressort a pour longueur $L(t)$. L'amortisseur exerce sur la masse m une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\lambda \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z$.

Q14. Déterminer, en l'absence de secousse sismique, la longueur du ressort à l'équilibre L_{eq} en fonction de L_0 , k , m et g . En déduire la cote de la masse z_{eq} repérée par rapport au bâti.

On note $u(t) = z(t) - z_{eq}$ l'écart par rapport à la position d'équilibre de la masse m .

Q15. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lors d'une secousse sismique s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega^2 Z_s(t)$$

où ω_0 et Q sont deux constantes à exprimer en fonction de k , m et λ . Donner les significations physiques et les dimensions de ces deux grandeurs.

Q16. On se place en régime permanent sinusoïdal et on utilise la notation complexe : $\underline{u} = U_0 \exp j(\omega t + \varphi)$ avec $j^2 = -1$. Écrire l'équation du mouvement de la masse m en notation complexe.

En déduire l'expression de la fonction de transfert du sismographe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_s}$.

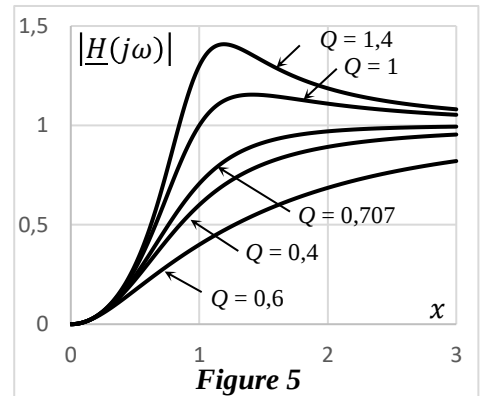
Q17. Quelle est la nature du filtre qui décrit le comportement du sismographe ? justifier votre réponse.

Q18. Montrer que l'expression de l'amplitude maximale U_0 de la réponse verticale $u(t)$ est donnée par

$$U_0 = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} Z_0 \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Q19. Quelles sont les deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude maximale U_0 soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. Déterminer dans ce cas le déphasage entre le mouvement de la masse m et celui du sol.

Q20. La variation du rapport $\frac{U_0}{Z_0}$ en fonction de x est représentée sur la figure 5 pour différentes valeurs de Q . Les sismologues choisissent un facteur Q égal à 0,707. Justifier le choix de cette valeur.



Filtrage du signal de sortie du sismographe

La vibration de la masse m est amplifiée et enregistrée par un mécanisme de mesure ou un transducteur. Afin de supprimer les parasites de hautes fréquences du signal en sortie du sismographe, on utilise un filtre passif constitué par un circuit RLC série (figure 6).

Les signaux d'entrée et de sortie s'écrivent respectivement en notation complexe : $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$.

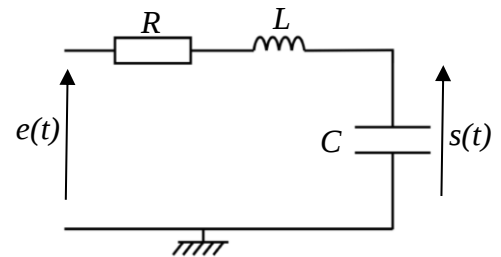


Figure 6

Q21. Donner les circuits équivalents en hautes et basses fréquences. En déduire la nature du filtre.

Q22. Montrer que le signal $\underline{s}(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{s}(t) = \omega_0^2 \underline{e}(t)$$

où ω_0 et Q sont deux constantes à exprimer en fonction de R , L et C .

Q23. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Quel est l'ordre de ce filtre ?

Q24. Exprimer le module de la fonction de transfert de ce filtre en fonction de ω , ω_0 et Q .

Q25. Déterminer l'expression du Gain en décibels G_{dB} . Donner les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses et aux hautes fréquences et préciser les pentes de ces asymptotes.

Q26. Sachant que la valeur maximale de G_{dB} est nulle pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, définir et déterminer la pulsation de coupure ω_c du filtre dans ce cas. Montrer en particulier que $\omega_c = \omega_0$ pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q27. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 1,4$.

Troisième partie : Voyage dans l'atmosphère avec un ballon-sonde

Inventé en 1892 par Gustave Hermite, le ballon-sonde est depuis devenu un moyen incontournable pour la recherche spatiale, les prévisions météorologiques et d'autres fins scientifiques. Un ballon-sonde est constitué généralement d'une fine pellicule de plastique remplie d'hélium. Lorsque le ballon monte dans l'atmosphère, il se dilate en raison de la diminution de la pression atmosphérique. Le ballon finit par atteindre un point où il ne peut plus se dilater et éclate. Les ballons-sondes peuvent atteindre des hauteurs allant jusqu'à 40 kilomètres au-dessus de la surface de la terre.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de la montée d'un ballon dans la couche la plus basse de l'atmosphère, appelée troposphère, qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude.

Pression dans l'atmosphère

L'atmosphère terrestre est assimilée à un gaz parfait, de masse molaire $M_a = 29 \text{ g mol}^{-1}$. Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme : $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire de l'axe Oz orienté suivant la verticale ascendante. Son origine O est choisie au niveau de la surface du sol où la pression est $P_0 = 1,00 \text{ bar}$, la température de l'air est $T_0 = 290 \text{ K}$ et sa masse volumique est $\rho_0 = 1,30 \text{ kg m}^{-3}$.

On suppose que la pression P et la masse volumique ρ_a de l'air ne dépendent que de l'altitude z .

- *Modèle de l'atmosphère isotherme*

Dans un premier temps, on suppose que l'atmosphère est isotherme à la température T_0 .

Q28. Établir le bilan des forces s'exerçant sur une tranche d'air cylindrique au repos de section S et comprise entre les altitudes z et $z + dz$

(figure 7). En déduire une équation reliant $\frac{dP(z)}{dz}$ et $\rho_a(z)$.

Q29. Ecrire l'équation d'état d'un gaz parfait faisant intervenir la masse volumique $\rho_a(z)$.

Q30. Montrer que la pression atmosphérique $P(z)$ s'écrit sous la forme :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \text{ avec } H \text{ est une constante dont on donnera sa}$$

signification physique, son expression et sa valeur numérique.

La constante des gaz parfaits est : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Q31. Déterminer la valeur de la pression à l'altitude $z = 10 \text{ km}$. La comparer à la valeur expérimentale $P_{\text{exp}}(z = 10 \text{ km}) = 0,26 \text{ bar}$. Conclure.

- *Modèle de l'atmosphère à gradient de température*

Afin d'améliorer ce modèle, on suppose que la température n'est plus uniforme. Elle obéit à la loi suivante :

$$T(z) = T_0(1 - az) \text{ avec } a = 22,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}.$$

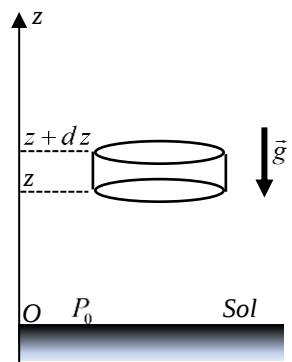


Figure 7

Q32. Montrer que la nouvelle loi de variation de la pression atmosphérique $P(z)$, dans la couche troposphérique, s'écrit : $P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^\beta$ où $\beta = \frac{M_a g}{\alpha R T_0}$.

Q33. Calculer la nouvelle valeur de la pression à l'altitude $z = 10 \text{ km}$. Conclure.

Q34. Déterminer l'expression de la masse volumique de l'air $\rho_a(z)$ à l'altitude z .

Ascension d'un ballon-sonde dans la troposphère

On souhaite étudier l'atmosphère à l'aide d'un ballon-sonde rempli d'hélium et équipé d'une nacelle contenant des instruments de mesure. Le ballon est partiellement gonflé au sol avec un volume $V_0 = 500 \text{ m}^3$ d'hélium.

La masse du ballon-sonde, constitué par la nacelle et l'enveloppe dépourvu d'hélium, est $m = 500 \text{ kg}$.

L'enveloppe est suffisamment extensible pour garantir un équilibre mécanique et thermique entre l'hélium et le milieu extérieur. Par conséquent, la pression et la température à l'intérieur du ballon sont égales à celles de l'air à la cote z .

Q35. Montrer que la densité relative de l'hélium par rapport à l'air $d = \frac{\rho_{\text{He}}}{\rho_a}$ est constante lors de l'ascension du ballon. Calculer d sachant que la masse molaire de l'hélium est $M_{\text{He}} = 4 \text{ g mol}^{-1}$.

Q36. Donner l'expression de la force de poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ auquel est soumis le ballon-sonde.

Q37. On appelle force d'ascension $\vec{F}_a$ la somme de toutes les forces extérieures s'exerçant sur le ballon en mouvement rectiligne le long de l'axe (Oz) . En négligeant les forces de frottement de l'air, déterminer l'expression de $\vec{F}_a$ au niveau du sol en fonction de m , g , d et ρ_0 .

Q38. A quelle condition le ballon s'élève-t-il ? En utilisant les données numériques, montrer que cette condition est vérifiée.

Q39. Exprimer le volume de l'hélium $V(z)$ contenu dans le ballon au cours de l'ascension.

Q40. Calculer l'altitude maximale z_{max} lorsque le volume atteint sa valeur maximale $V_{\text{max}} = 1000 \text{ m}^3$.



Concours Biologie et Géologie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Première partie : Diffusion thermique – Diffusion de particules

Thermorégulation d'un mammifère marin

Q1.	Dans le système international, J_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$ et λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$ Le signe (–) qui figure dans la loi de Fourier traduit le fait que le flux thermique est orienté dans le sens des températures décroissantes.										
Q2.	En électrocinétique, la loi semblable à la loi de Fourier est la loi d'Ohm. La densité de courant volumique dans un conducteur Ohmique est : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{grad} V$ où γ est la conductivité électrique. Analogie électrique - thermique <table border="1" data-bbox="229 891 1463 1133"> <thead> <tr> <th>Grandeurs électriques</th><th>Grandeurs thermiques</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\vec{J}$: densité volumique de courant électrique</td><td>$\vec{J}_{th}$: densité de flux thermique</td></tr> <tr> <td>γ : conductivité électrique</td><td>λ : conductivité thermique</td></tr> <tr> <td>V : potentiel électrique</td><td>T : température</td></tr> <tr> <td>$I = \iint_S \vec{J} \cdot d^2\vec{S}$: intensité de courant électrique</td><td>$\Phi_{th} = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot d^2\vec{S}$: flux thermique</td></tr> </tbody> </table>	Grandeurs électriques	Grandeurs thermiques	$\vec{J}$: densité volumique de courant électrique	$\vec{J}_{th}$: densité de flux thermique	γ : conductivité électrique	λ : conductivité thermique	V : potentiel électrique	T : température	$I = \iint_S \vec{J} \cdot d^2\vec{S}$: intensité de courant électrique	$\Phi_{th} = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot d^2\vec{S}$: flux thermique
Grandeurs électriques	Grandeurs thermiques										
$\vec{J}$: densité volumique de courant électrique	$\vec{J}_{th}$: densité de flux thermique										
γ : conductivité électrique	λ : conductivité thermique										
V : potentiel électrique	T : température										
$I = \iint_S \vec{J} \cdot d^2\vec{S}$: intensité de courant électrique	$\Phi_{th} = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot d^2\vec{S}$: flux thermique										
Q3.	Par application du premier principe de la thermodynamique sur le volume cylindrique de longueur L compris entre r et $r + dr$ en régime stationnaire, on obtient : $dU = U(t + dt) - U(t) = \delta Q(r) - \delta(r + dr) = 0$ $\Rightarrow 2\pi r L J_{th}(r) - 2\pi(r + dr) L J_{th}(r + dr) = 0$ $\Rightarrow \frac{d}{dr}(r J_{th}(r)) = 0 \Rightarrow r J_{th}(r) = A \Rightarrow J_{th}(r) = \frac{A}{r} ; A = cte$ $J_{th}(r) = \frac{A}{r} \Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow T = \alpha \ln r + \beta ; \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes.}$ En tenant compte des conditions aux limites : $T(r_0) = T_i$ et $T(r_0 + e) = T_e$, on obtient : $\alpha = \frac{T_e - T_i}{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)} \text{ et } \beta = \frac{T_i \ln(r_0 + e) - T_e \ln(r_0)}{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)}$ Ainsi : $T(r) = \frac{T_e - T_i}{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)} \ln(r) + \frac{T_i \ln(r_0 + e) - T_e \ln(r_0)}{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)} = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{r_0 + e}{r_0}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$										
Q4.	Puissance thermique Φ_{th} traversant un cylindre de rayon r et de longueur L : $\Phi_{th} = \iint_S J_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L = -\lambda \frac{\alpha}{r} 2\pi r L = -2\pi \lambda L \alpha$ $\Rightarrow \Phi_{th} = \frac{2\pi \lambda L}{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)} (T_i - T_e)$ La résistance thermique est : $R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\Phi_{th}} = \frac{\ln(r_0 + e) - \ln(r_0)}{2\pi \lambda L} = \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{r_0}\right)}{2\pi \lambda L}$										

Q5.	$R'_{th} = \frac{\ln\left(1 + \frac{e'}{r_0 + e}\right)}{2\pi\lambda' L}$
	Résistance de la couche supplémentaire de conductivité λ' et d'épaisseur e' :
	Le système est équivalent à deux dipôles thermiques montés en série. La résistance thermique total est :
	$R_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{r_0}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{\ln\left(1 + \frac{e'}{r_0 + e}\right)}{2\pi\lambda' L} ; \text{A.N : } R_{tot} = 1,75 \text{ K.W}^{-1}$
	Puissance thermique Φ_{th} transférée vers le milieu extérieur :
	$\Phi_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{tot}} ; \text{A.N : } \Phi_{th} = 20,57 \text{ W}$
	Energie thermique Q_{th} perdue dans une durée Δt : $Q_{th} = \Phi_{th} \Delta t$
	A.N : en une journée $Q_{th} = 1,78.10^6 \text{ J} = 425,18 \text{ kcal}$
	En plus de ces besoins métaboliques journaliers, l'apport énergétique du jeune mammifère permet de compenser les pertes thermiques. $W = W_{met} + Q_{th}$; A.N : $W = 925,18 \text{ kcal} = 3,87.10^6 \text{ J}$

Collecte de nutriments par une bactérie

Q6.	$J_p(M, t)$ s'exprime dans le système international en $\text{mol.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
Q7	Le système possède une symétrie sphérique. Il est invariant par rotation autour du point O. Par conséquent $c(M, t)$ ne dépend que de la variable d'espace r dans le système de coordonnées sphériques et du temps t. La densité de courant $\vec{J}_p(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} c(M, t) = J_p(r, t) \vec{u}_r$ Sachant que le gradient de concentration est orienté dans le sens du vecteur $\vec{u}_r$ (selon les concentrations croissantes, $J_p(r, t)$ est alors négative.
Q8.	Bilan de matière sur une tranche comprise entre les surfaces sphériques de rayons r et $r + dr$ pendant dt : $[\Phi_0(r + dr) - \Phi_0(r)] dt = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi_0(r)}{dr} dr dt = 0 \Rightarrow \Phi_0(r) = \Phi_0 = \text{cte}$
Q9.	Le flux de nutriments est : $\Phi_0 = \Phi_0(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 A$
Q10.	Le flux de nutriments collecté par la bactérie est : $\Phi_0(r) = -\oint_S \vec{J}(r) \cdot \overrightarrow{d^2S} = D \frac{dc(r)}{dr} 4\pi r^2 = \Phi_0$
Q11.	$\Phi_0 = D \frac{dc(r)}{dr} 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dc(r)}{dr} = \frac{\Phi_0}{4\pi D r^2} \Rightarrow c(r) = -\frac{\Phi_0}{4\pi D r} + \alpha$ Or $c(r \rightarrow \infty) = c_\infty \Rightarrow \alpha = c_\infty$ d'où $c(r) = c_\infty - \frac{\Phi_0}{4\pi D r}$
Q12.	$\begin{cases} c(R) = c_\infty - \frac{\Phi_0}{4\pi D R} \\ \Phi_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 A \end{cases} \Rightarrow c(R) = c_\infty - \frac{R^2 A}{3D}$ La consommation en nutriments est maximale lorsque $c(R)$ est nulle. $c(R) = c_\infty - \frac{R^2 A_{\max}}{3D} = 0 \Rightarrow A_{\max} = \frac{3D}{R^2} c_\infty$
Q13.	Pour une consommation volumique en glucose égale à A_0 : $c(R) = c_\infty - \frac{R^2 A_0}{3D}$ Pour une concentration $c(R)$ nulle, la concentration à l'infini est minimale. Soit : $c(R) = c_{\infty, \min} - \frac{R^2 A_0}{3D} = 0 \Rightarrow c_{\infty, \min} = \frac{R^2 A_0}{3D}$. A.N : $c_{\infty, \min} = 3,3.10^{-3} \text{ mol.m}^{-3}$

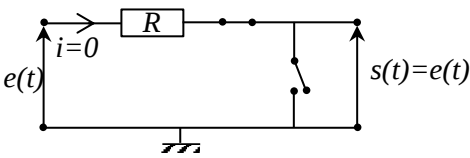
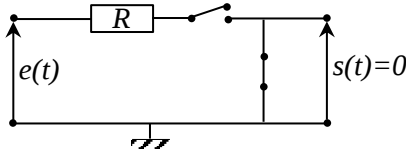
Deuxième partie : Détection et mesure des amplitudes des ondes sismiques

Sismographe vertical

Q14.	A l'équilibre : $-m\vec{g} - k(L_0 - L_{\text{eq}})\vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow L_{\text{eq}} = L_0 + \frac{mg}{k}$ La position de la masse par rapport au bâti : $z_{\text{eq}} = H - L_{\text{eq}} = H - L_0 - \frac{mg}{k}$
Q15.	Appliquons la RFD à la masse m dans le référentiel galiléen R : $-m\vec{g} - k(L_0 - L(t))\vec{e}_z - \lambda \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z = m \frac{d^2}{dt^2} (z(t) + Z_s(t)) \vec{e}_z \text{ avec } L(t) = H - z(t)$ $\Rightarrow -k \left(z(t) - \left(H - L_0 - \frac{mg}{k} \right) \right) - \lambda \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2}{dt^2} (z(t) + Z_s(t))$ $\Rightarrow -k(z(t) - z_{\text{eq}}) - \lambda \frac{d(z(t) - z_{\text{eq}})}{dt} - m \frac{d^2}{dt^2} (z(t) - z_{\text{eq}}) = m \frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2}$ $\Rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{du(t)}{dt} + \frac{k}{m} u(t) = -\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} \text{ or } Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ Donc $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega^2 Z_s(t)$ où $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre du système exprimé en rad.s^{-1} dans le système international $Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{mk}$: facteur de qualité ; grandeur adimensionnel
Q16.	En régime sinusoïdal forcé : $\underline{u} = U_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$ En injectant cette solution dans l'équation différentielle du mouvement, on obtient : $-\omega^2 \underline{u}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{u}(t) + \omega_0^2 \underline{u}(t) = \omega^2 \underline{Z}_s(t) \Rightarrow \left((\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \right) \underline{u}(t) = \omega^2 \underline{Z}_s(t)$ $\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_s(t)} = \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$
Q17.	La fonction de transfert qui décrit le comportement du sismographe correspond à celle d'un filtre passe haut . En effet : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{H}(j\omega) = -1$ le filtre ne laisse passer que les hautes fréquences
Q18.	$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_s(t)} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ $\Rightarrow U_0 = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} Z_0 \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$
Q19.	$U_0 = Z_0$ pour $(x^2 \gg 1 \text{ et } x^2 \gg \frac{x}{Q}) \Rightarrow (\omega^2 \gg \omega_0^2 \text{ et } \omega \gg \frac{\omega_0}{Q}) \Rightarrow (\omega^2 \gg \frac{k}{m} \text{ et } \omega \gg \frac{\lambda}{m})$ - La fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{x^2}{(1-x^2) + \frac{j}{Q}x}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ Dans le cas où $(x^2 \gg 1 \text{ et } x^2 \gg \frac{x}{Q})$; $\underline{H}(j\omega) = -1 = e^{j\pi}$. Le déphasage entre le mouvement de la masse m et celui du sol est égal à π.

Q20.	Le choix d'un facteur de qualité de 0,707 pour les sismographes est lié à la réponse en fréquence de ces instruments. Le facteur de qualité est choisi pour optimiser la réponse de l'instrument aux ondes sismiques. D'après la figure 5, un facteur de qualité de 0,707 permet d'atteindre rapidement un rapport $\frac{U_0}{Z_0}$ égal à 1. Le sismographe reproduit fidèlement les secousses sismiques pour $x > 2$.
------	--

Filtrage du signal de sortie du sismographe

Q21.	Circuits équivalents : A basses fréquences $\omega \rightarrow 0$; $\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow 0 \text{ et } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \rightarrow \infty$  A hautes fréquences $\omega \rightarrow \infty$; $\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow \infty \text{ et } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$  Le circuit ne laisse passer que les signaux de basses fréquences. Il s'agit d'un filtre passe bas
Q22.	Appliquons la loi des mailles : $\underline{e}(t) = R\underline{i}(t) + L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \text{ avec } \underline{s}(t) = \frac{q(t)}{C} \text{ et } \underline{i}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{d\underline{s}(t)}{dt}$ $\Rightarrow \underline{e}(t) = RC \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + LC \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \underline{s}(t) \Rightarrow \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \underline{s}(t) = \frac{1}{LC} \underline{e}(t)$ $\Rightarrow \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{s}(t) = \omega_0^2 \underline{e}(t) \text{ avec } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$
Q23.	$\frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{s}(t) = \omega_0^2 \underline{e}(t) \Rightarrow -\omega^2 \underline{s}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{s}(t) + \omega_0^2 \underline{s}(t) = \omega_0^2 \underline{e}(t)$ $\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ La fonction de transfert est celle d'un filtre passe bas du second ordre.
Q24.	$ \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$
Q25.	$G_{dB} = 20 \log(\underline{H}(j\omega)) \Rightarrow G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}\right) = -10 \log\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)$ - Pour les basses fréquences : $G_{dB} \approx 0$ asymptote horizontale (pente nulle) - Pour les basses fréquences : $G_{dB} \approx -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ asymptote oblique de pente $-40dB / \text{décade}$
Q26.	La pulsation de coupure ω_c correspond à la pulsation à laquelle le gain chute de 3 décibels par rapport à sa valeur maximale. $G_{dB}(\omega_c) = \underbrace{G_{dB, \max}}_{=0} - 3 \Rightarrow \underline{H}(j\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{Q\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{Q\omega_0}\right)^2 = 2$

	$\Rightarrow \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2}}$ Pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{Q^2} = 2 \rightarrow \omega_c = \omega_0$
Q27.	

Troisième partie : Voyage dans l'atmosphère avec un ballon-sonde

Pression dans l'atmosphère

Q28.	Bilan des forces s'exerçant sur une tranche d'air cylindrique au repos de section S et comprise entre les altitudes z et $z + dz$: $P(z)S - P(z + dz)S - \rho_a g S dz = 0 \Rightarrow -\frac{dP(z)}{dz} dz - \rho_a(z) g dz = 0 \Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\rho_a(z) g$
Q29.	Équation d'état d'un gaz parfait pour une masse m d'air correspondant à un nombre de mole n et un volume $V(z) = \frac{m}{\rho_a(z)}$ à l'altitude z : $P(z)V(z) = nRT_0 \Rightarrow P(z)\frac{m}{\rho_a(z)} = \frac{m}{M_a} RT_0 \Rightarrow P(z) = \frac{RT_0}{M_a} \rho_a(z)$
Q30.	$\begin{cases} \frac{dP(z)}{dz} = -\rho_a(z) g \\ P(z) = \frac{RT_0}{M_a} \rho_a(z) \end{cases} \Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{M_a g}{RT_0} P(z)$ La solution de cette équation différentielle est de la forme : $P(z) = A \exp\left(-\frac{M_a g}{RT_0} z\right)$; $A = cte$ Or à l'altitude $z = 0$; $P(0) = P_0 \rightarrow A = P_0$ D'où : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M_a g}{RT_0} z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$; $H = \frac{RT_0}{M_a g}$ H possède la dimension d'une longueur qui caractérise la diminution de la pression en fonction de l'altitude. A.N : $H = 8475 \text{ m}$
Q31.	A l'altitude $z = h = 10 \text{ km}$, la pression est $P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$; A.N : $P(z = 10 \text{ km}) = 0,307 \text{ bar}$ La différence entre la valeur expérimentale ($0,26 \text{ bar}$) et la valeur calculée ($0,307 \text{ bar}$) est due au modèle de l'atmosphère isotherme utilisé. Ce modèle ne décrit pas correctement la variation de la pression atmosphérique. En effet, la variation de la température n'est pas négligeable dans l'atmosphère.
Q32.	Modèle de l'atmosphère à gradient de température : $T(z) = T_0(1 - az)$; $a = 22,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ En utilisant l'équation fondamentale de l'hydrostatique et l'équation d'état d'un gaz parfait, on obtient : $\begin{cases} \frac{dP(z)}{dz} = -\rho_a(z) g \\ P(z) = \frac{RT(z)}{M_a} \rho_a(z) \end{cases} \Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{M_a g}{RT(z)} P(z) \Rightarrow \frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{M_a g}{RT_0(1 - az)} dz$ $\Rightarrow P(z) = D(1 - az)^{\frac{M_a g}{aRT_0}} ; D = cte \text{ Or } P(z = 0) = P_0 \Rightarrow P_0 = D \text{ d'où } P(z) = P_0(1 - az)^\beta \text{ avec } \beta = \frac{M_a g}{aRT_0}$

Q33.	A.N : $\beta = 5,22$; A l'altitude $z = 10 \text{ km}$; $P(10 \text{ km}) = 0,263 \text{ bar}$ La valeur calculée en utilisant le modèle de l'atmosphère à gradient de température est en bonne concordance avec la valeur expérimentale.
Q34.	L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit : $P(z) \frac{1}{\rho_a(z)} = \frac{1}{M_a} RT(z)$ $\Rightarrow \rho_a(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)} = \frac{M_a}{R} \frac{P_0(1-az)^\beta}{T_0(1-az)} = \frac{M_a P_0}{RT_0} (1-az)^{\beta-1}$

Ascension d'un ballon-sonde dans la troposphère

Q35.	Puisque l'hélium est en équilibre thermique et mécanique avec l'air atmosphérique, les pressions et les températures de l'hélium et de l'air sont identiques. A l'altitude z , on a : $\rho_a(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)}$ et $\rho_{He}(z) = \frac{M_{He} P(z)}{RT(z)}$. $\Rightarrow d = \frac{\rho_{He}(z)}{\rho_a(z)} = \frac{M_{He} P(z)}{RT(z)} \frac{RT(z)}{M_a P(z)} = \frac{M_{He}}{M_a}$. A.N : $d = \frac{4}{29} = 0,138$
Q36.	Force de poussée d'Archimède auquel est soumis le ballon-sonde : $\vec{I} = -\rho_a V_{He} \vec{g} = \rho_a V_{He} g \vec{u}_z$; $V_{He} = V(z)$ est le volume de l'hélium contenu dans le ballon à l'altitude z .
Q37.	Force ascensionnelle résultante de toutes les forces s'exerçant sur le ballon-sonde : $\vec{F}_a = \vec{P}_B + \vec{P}_{He} + \vec{I} = m \vec{g} + m_{He} \vec{g} - m_a \vec{g}$ $\Rightarrow \vec{F}_a = -m \vec{g} - \rho_{He} V(z) g \vec{u}_z + \rho_a V(z) g \vec{u}_z$. Au niveau du sol : $V(z=0) = V_0$ et $\rho_a(z=0) = \rho_0$, donc $\vec{F}_a(z=0) = -m \vec{g} - \rho_{He} V_0 g \vec{u}_z + \rho_a V_0 g \vec{u}_z$ $\Rightarrow \vec{F}_a(z=0) = -m g \vec{u}_z - d \rho_a V_0 g \vec{u}_z + \rho_a V_0 g \vec{u}_z = (\rho_0 V_0 (1-d) - m) g \vec{u}_z$.
Q38.	Le ballon-sonde s'élève du sol si la force de poussée d'Archimède est plus importante que le poids total du ballon, c'est-à-dire que la force d'ascension $\vec{F}_a$ est dirigée suivant $+\vec{u}_z$. $F_a(z=0) = (\rho_0 V_0 (1-d) - m) g > 0 \Rightarrow mg < \rho_0 V_0 (1-d)$ Au niveau du sol, la valeur algébrique de cette force est : $F_a(z=0) = 591,5 \text{ N} > 0$. Par conséquent, le ballon peut s'élever.
Q39.	Au cours de l'ascension, la masse de l'hélium dans l'enveloppe reste constante, soit : $m_{He} = \rho_{He}(z=0) V_0 = \rho_{He}(z) V(z) \Rightarrow d \rho_0 V_0 = d \rho_a(z) V(z) \Rightarrow V(z) = \frac{\rho_0 V_0}{\rho_a(z)}$. D'après Q34 -, on a : $\rho_a(z) = \frac{M_a P_0}{RT_0} (1-az)^{\beta-1} = \rho_a(z=0) (1-az)^{\beta-1} = \rho_0 (1-az)^{\beta-1}$. donc $V(z) = V_0 (1-az)^{1-\beta}$
Q40.	A l'altitude maximale z_{max} , $V(z_{max}) = V_{max} = V_0 (1-az_{max})^{1-\beta} \Rightarrow 1-az_{max} = \left(\frac{V_{max}}{V_0} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ $\Rightarrow z_{max} = \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{V_{max}}{V_0} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right)$. ; A.N : $z_{max} = 6702,3 \text{ m} \approx 6,7 \text{ km}$