



Concours

Biologie & Géologie

Epreuve de Physique

Date : 02 Juin 2025

Heure : 8 H00

Durée : 3H

- Cette épreuve comporte 16 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte cinq parties.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la ou les cases correspondant aux bonnes réponses.

Q1. Un gaz parfait subit une détente de Joule-Gay-Lussac qualifiée de détente irréversible iso-énergétique. La variation de son entropie ΔS est :

- ☐ $\Delta S < 0$
- ☐ $\Delta S = 0$
- ☐ $\Delta S > 0$

Q2. 1 kg d'eau liquide, pris à $T=90^\circ\text{C}$, reçoit à pression atmosphérique une quantité de chaleur $Q=2315 \text{ kJ}$. On donne : l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100°C : $\ell_v = 2315 \text{ kJ.kg}^{-1}$, la capacité thermique massique de l'eau liquide saturante : $c_\ell = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Dites si :

- ☐ l'eau va s'évaporer totalement
- ☐ la quantité majeure va s'évaporer
- ☐ seule une petite quantité va s'évaporer

Q3. Une machine motrice ditherme fonctionne selon le cycle idéal de Carnot. T_1 est la température de la source chaude. T_2 celle de la source froide. Le rendement η de cette machine est :

- ☐ $1 - \frac{T_1}{T_2}$
- ☐ $1 - \frac{T_2}{T_1}$
- ☐ $1 + \frac{T_1}{T_2}$
- ☐ $1 + \frac{T_2}{T_1}$

Q4. On considère un gaz qui traverse une tuyère horizontale, rigide et calorifugée. ρ , h et v sont la masse volumique, l'enthalpie massique et la vitesse du gaz. Les indices 'e' et 's' réfèrent aux paramètres à l'entrée et à la sortie de la tuyère. Le régime est stationnaire et l'écoulement est incompressible. La vitesse à la sortie, $v_s \gg v_e$, est :

- ☐ $v_s = \sqrt{2\rho(h_s - h_e)}$
- ☐ $v_s = \sqrt{2(h_s - h_e)}$
- ☐ $v_s = \sqrt{2(h_s - h_e)/\rho}$
- ☐ $v_s = \sqrt{2(h_e - h_s)}$

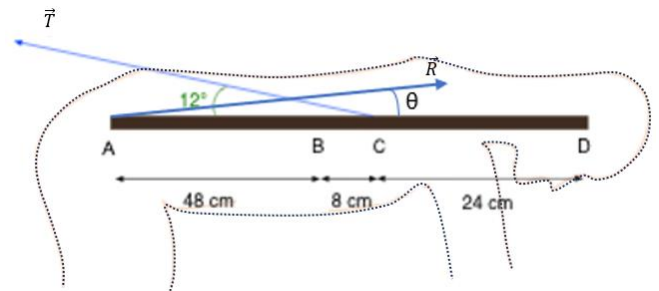
Q5. Laquelle des formes d'équations suivantes décrit un phénomène de transport diffusif ?

- ☐ $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$
- ☐ $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + P_{cr}$
- ☐ $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} + P_{cr}$

Q6. Dans un modèle simplifié, la colonne vertébrale peut être assimilée à un levier prenant appui sur le sacrum (A). Les différents muscles du dos sont équivalents à un muscle unique agissant en C. L'ensemble tronc-bras a son centre de gravité situé en B et représente 60% du poids de l'individu, qui pèse 80 kg. La tête représente 7% du poids de l'individu. $\vec{R}$ est la réaction du point d'appui A.

Que vaut la force T exercée par les muscles dorsaux ? On donne : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

- ☐ $T = 235 \text{ N}$
☐ $T = 1150 \text{ N}$
☐ $T = 2315 \text{ N}$

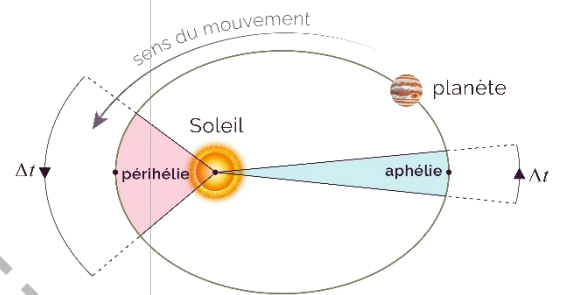


Q7. Deux pendules simples sont constitués d'un fil de 1 m auquel est attaché une masse de 1 kg pour le premier et 2 kg pour le deuxième. Les deux pendules ont des oscillations libres de faibles amplitudes et de fréquences f_1 et f_2 , respectivement. Dites si :

- ☐ $f_1 = 2 f_2$
☐ $f_2 = 2 f_1$
☐ $f_1 = f_2$

Q8. On considère une planète ayant une trajectoire elliptique autour du soleil. Sa vitesse est :

- ☐ la même partout sur la trajectoire
☐ maximale en aphélie.
☐ maximale en périhélie.



Deuxième Partie : Mécanique des fluides réels et écoulements sanguins

Le système cardiovasculaire a pour rôle d'approvisionner les tissus et les organes en oxygène et en nutriments essentiels à leur bon fonctionnement, tout en éliminant les déchets produits par leur métabolisme. Il doit donc assurer la circulation du sang depuis les artères jusqu'aux capillaires.

La circulation du sang dans une artère peut être modélisée par l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans une conduite cylindrique de rayon R et de longueur L (**Figure 1**). On suppose que l'écoulement est laminaire et que le régime permanent est atteint.

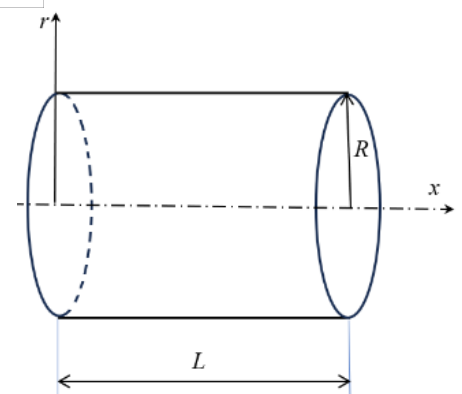


Figure 1

Pour les applications numériques, on donne la masse volumique du sang est $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et la viscosité dynamique $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

Mécanique des fluides visqueux

Q9. On donne l'expression du nombre de Reynolds ; $Re = LU/\mu$ où L et U sont identiques à une longueur et une vitesse caractérisant, respectivement, la géométrie et la cinématique de l'écoulement. $\mu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide et ρ la masse volumique du fluide. Donner la signification physique de Re .

Q10. Donner l'expression de Re pour un écoulement dans une conduite cylindrique de diamètre d ainsi que les différents régimes d'écoulement qui s'établissent selon les valeurs de Re . Schématiser l'allure de l'écoulement dans chaque cas.

Dans une telle conduite, l'expression de la vitesse d'un fluide *newtonien et incompressible* en écoulement *laminaire et stationnaire* est :

$$\vec{v}(r) = \vec{v}_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1)$$

où $\vec{v}_{max} = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \vec{u}_x$ est la vitesse maximale du fluide dans la section de la conduite ; $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$ est la perte de pression le long de la conduite ; r est la variable cylindrique.

Q11. Définir un fluide newtonien, un écoulement laminaire et un écoulement stationnaire. Que représente le rapport $\left(\frac{\Delta P}{L} \right)$?

Q12. Préciser les conditions aux limites que vérifie l'expression (1). Tracer les profils de vitesse dans ce cas et dans le cas d'écoulement turbulent.

<u>Conditions aux limites</u>	<u>Laminaire</u>	<u>Turbulent</u>

Q13. Définir et exprimer le débit volumique Q (loi de Poiseuille) en fonction de v_{max} et R .

Q14. Le nombre de Re s'exprime en fonction de la vitesse moyenne, v_{moy} , du fluide dans la conduite. Exprimer cette vitesse en fonction de v_{max} .

Q15. Définir la résistance hydraulique, R_H , de la conduite et l'exprimer en fonction de Q et Δp . En déduire son expression en fonction de R , L et η .

Q16. Trouver une analogie avec le phénomène de conduction électrique (préciser les différentes grandeurs d'analogie).

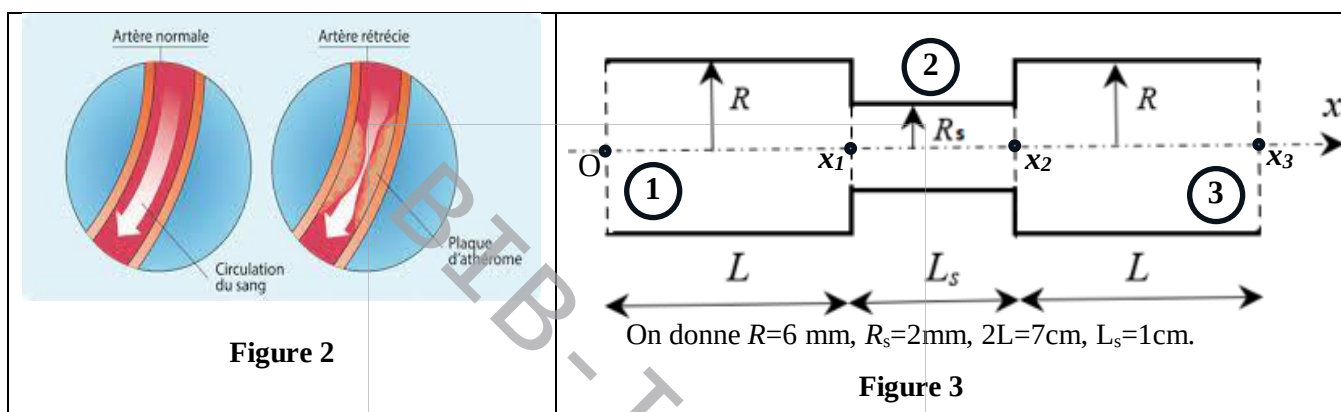
<u>Hydraulique</u>	<u>Analogie</u>	<u>Electrique</u>
-----		-----
-----		-----
-----		-----
-----		-----
-----		-----
-----		-----
-----		-----
-----		-----

Modélisation d'une sténose

Q17. Une artère saine étant modélisée par un tube cylindrique de rayon R et de longueur L soumis à Δp . Calculer le débit Q , puis la vitesse moyenne du sang, v_{moy} , dans cette artère. Calculer Re et conclure sur la nature de l'écoulement.

On donne $R=6\text{ mm}$, $L=8\text{ cm}$ et $\Delta p = 40\text{ Pa}$.

Une sténose est un rétrécissement de l'artère (et des vaisseaux sanguins), généralement dû à une athérosclérose (accumulation de graisse et calcium dans la paroi). Cette accumulation forme une plaque qui s'épaissit progressivement et affecte la circulation du sang (**Figure 2**). Une modélisation simple est représentée sur la **Figure 3**.



Q18. Le régime étant stationnaire, que peut-on dire des débits volumiques Q_1 , Q_2 , Q_3 dans les zones ①, ② et ③ et Q dans l'artère. Comparer, en le justifiant, les vitesses moyennes de l'écoulement dans les 3 zones.

Q19. Calculer la résistance, $R_{H,2}$ de la zone sténosée (zone 2) et la résistance $R_{H,1} + R_{H,3}$ somme des résistances des zones 1 et 3.

Q20. Exprimer la résistance hydraulique totale, $R_{H,t}$, en fonction de Q et de $\Delta p = p(x=0) - p(x=x_3)$, puis l'exprimer en fonction de $R_{H,1}$, $R_{H,2}$ et $R_{H,3}$. Calculer $R_{H,t}$.

Q21. Proposer une analogie électrique avec cette situation. Qu'appelle-t-on le circuit proposé ? En déduire l'expression de la différence de pression, $\Delta p_s = p(x_1) - p(x_2)$, au niveau de la sténose en fonction des résistances hydrauliques des 3 zones $R_{H,1}$, $R_{H,\text{sténose}} = R_{H,2}$, $R_{H,3}$ et Δp .

Q22. En utilisant l'analogie proposée, expliquer l'effet de la sténose sur la circulation sanguine si le système cardio-vasculaire maintient le même gradient de pression $\Delta p = p(0) - p(x_3) = 40 \text{ Pa}$ (valeur sans sténose).

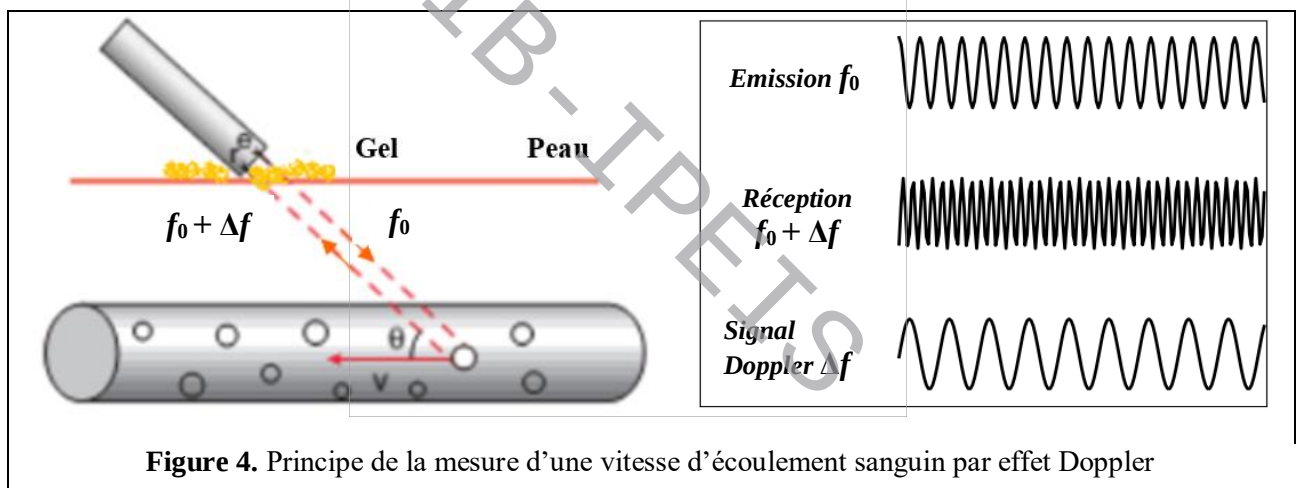
Q23. Dans la réalité, le cœur doit assurer les mêmes besoins en oxygène et en nutriments demandés par l'organisme. De ce fait il doit maintenir le même débit volumique du sang circulant dans le système sain. Dire comment ceci affecte le cœur (il est possible d'analyser la situation par analogie avec l'électricité)

Q24. Calculer le nouveau gradient de pression, $\Delta p'$, assurant le débit nécessaire Q . En déduire la chute de pression, Δp_s , dans la zone de sténose. Calculer la vitesse moyenne, $v_{\text{moy},s}$, correspondante, puis calculer Re dans cette zone. Conclure en ce qui concerne le régime d'écoulement qui s'établit.

Troisième Partie : Mesure de la vitesse par effet Doppler

La détection d'une sténose chez un patient passe par une estimation de la vitesse d'écoulement du sang. Une technique de mesure de la vitesse du sang est l'échographie Doppler. Le principe de cette technique repose sur le décalage de fréquence d'une onde reçue/émise par un récepteur/émetteur mobile, ici les hématies (globules rouges).

Une sonde à ultrason, jouant le rôle d'émetteur et de récepteur en même temps, est positionnée sur la peau et émet des ultrasons de célérité c et de fréquence f_0 . L'onde incidente fait un angle θ avec le vaisseau à explorer (**Figure 4**). Cette onde est reçue par les hématies, circulant à la vitesse $v \ll c$ dans les artères, puis réfléchi vers la sonde. La mesure du décalage total de fréquence entre les ondes émises et reçues (par réflexion sur l'hématie) permet d'estimer la vitesse v .



On considère que pendant la période T_0 de l'onde ultrasonore ;

- L'angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entre le faisceau d'ultrasons et le vecteur vitesse $\vec{v}$, reste constant et par suite seule la composante de vitesse $v \cdot \cos(\theta)$ contribue à la variation de la distance sonde-hématie.
- La vitesse reste constante et l'hématie est animée par un mouvement rectiligne uniforme.

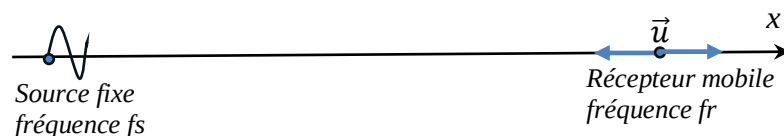


Figure 5

On considère la situation de la **Figure 5**: une source fixe à l'origine de l'axe Ox émet une onde de fréquence f_s et de célérité c . Un récepteur mobile à la vitesse algébrique, très inférieur à cet

supposée constante, perçoit cette onde à la fréquence f_r . Posons $\vec{u} = u \vec{e}_x$: si $u > 0$ le récepteur s'éloigne et si $u < 0$ il se rapproche.

Q25. Montrer que la fréquence perçue par le récepteur s'écrit $f_r = f_s \left(1 - \frac{u}{c}\right)$. On rappelle le développement limité de premier ordre $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Q26. En déduire l'expression de la fréquence, f_1 , perçue par l'hématie et l'expression de la fréquence, f_2 , de l'onde reçue par la sonde en provenance de l'hématie en fonction de, f_1 . Montrer alors que :

$$f_2 = f_0 \left(1 - \frac{2v \cos(\theta)}{c}\right).$$

$v < 0$, rapprochement ; $v > 0$, éloignement

Q27. Discuter le signe du décalage Doppler $\Delta f = f_2 - f_0$ suivant que l'hématie s'éloigne ou se rapproche de la sonde.

Q28. Calculer Δf dans l'artère saine et dans la zone de sténose dans le cas d'un rapprochement à la sonde. Commenter.

On donne $c = 1,5 \text{ km.s}^{-1}$; $f_0 = 4 \text{ MHz}$; $\theta = 20^\circ$.

Q29. L'analyse spectrale des fréquences Doppler peut conduire à différents types de signaux : aucun signal, un spectre fréquentiel très large, un spectre étroit. Décrire la situation de santé du patient dans chaque cas.

QuatrièmePartie : Filtrage

En pratique le récepteur du scanner Doppler reçoit un signal composé de différentes fréquences ; en particulier la fréquence f_0 réfléchi sur les organes immobiles. Pour filtrer le signal et ne garder que la composante liée à la vitesse de l'hématie on utilise un filtre passif. Le diagramme de Bode en gain de ce filtre est présenté sur la **figure 6**.

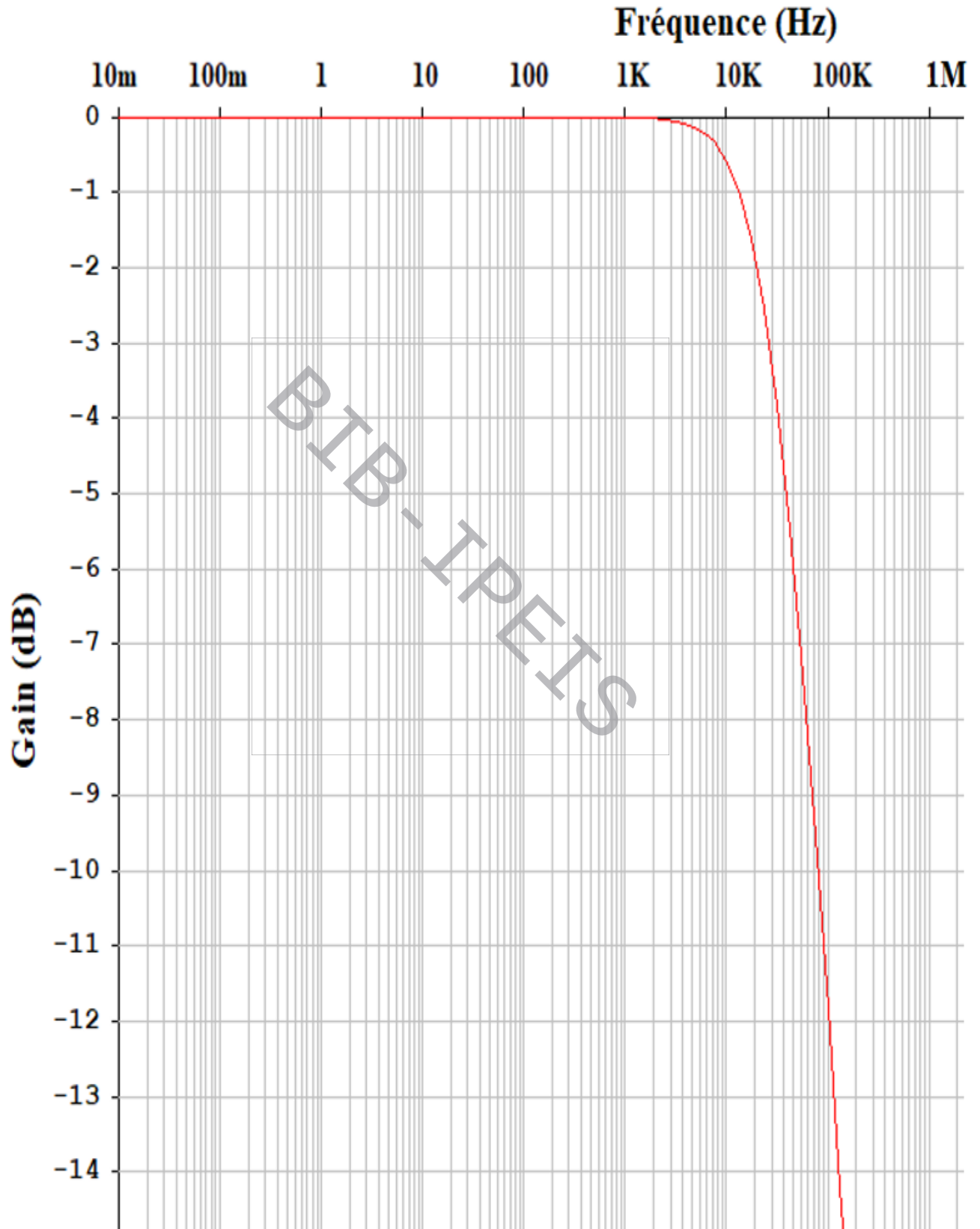


Figure 6

Q30. En déduire la nature du filtre correspondant. Donner les valeurs asymptotiques du G_{dB} et la valeur du gain maximal.

Q31. Tracer sur la **Figure 6** le digramme asymptotique. Déterminer l'ordre du filtre, les valeurs des fréquences propre, f_0 , et de coupure à $G_{dB}^{max} - 3dB$, f_c . Donner la bande passante.

Q32. Proposer un circuit électrique dont le gain correspond à celui de la **Figure 6** et donner l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ correspondante.

Q33. Quelle est l'utilité de ce filtre dans l'application actuelle (se rapporter à la question Q28).

Cinquième Partie : Ondes acoustiques et échographie

Lors de l'échographie, plusieurs problèmes d'ordre technique peuvent être rencontrés. Parmi eux, la difficulté de propagation de l'onde ultrasonore à travers des couches de propriétés sonores très différentes. On se propose dans cette partie d'étudier l'origine du problème et la possibilité d'y remédier.

Propagation des ondes acoustiques

On considère un fluide parfait au repos macroscopique, caractérisé par une pression P_0 et une masse volumique ρ_0 , tous deux uniformes. Le passage d'une onde sonore dans ce fluide perturbe cet état d'équilibre. Ainsi, les champs locaux de pression, de masse volumique et de vitesse deviennent en un point M du fluide et à chaque instant (pour un problème unidirectionnel suivant Ox) :

$$\begin{array}{ll} P(x, t) = P_0 + p(x, t) & p(x, t) \ll P_0 \\ \rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t) & \mu(x, t) \ll \rho_0 \\ \vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{e}_x & v(x, t) \ll c \end{array} \quad \text{avec}$$

où $p(x,t)$, $\mu(x,t)$ et $v(x,t)$ sont, respectivement, la surpression, la masse volumique et la vitesse acoustiques, causés par le passage de l'onde. c est la célérité de l'onde dans le fluide considéré.

Dans toute cette partie, on considère la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire.

Q34. Bien que l'OPPH soit une onde idéale, purement hypothétique, elle est d'un grand intérêt pour la physique des ondes. Donner l'expression d'une OPPH de surpression en notations réelle et complexe (définir chaque terme). Donner son utilité. Citer un exemple d'exploitation de cette onde.

BIBLIOTHÈQUE

L'impédance acoustique complexe d'un milieu est définie par le rapport $\underline{Z} = \underline{p}(x,t)/\underline{v}(x,t)$. Pour une OPPH elle peut se réduire à $\underline{Z} = \frac{p}{v} = \frac{p_m}{v_m} = \frac{p_m}{v_m}$. On montre la relation liant la surpression acoustique à la vitesse 'acoustique' dues au passage de l'onde sonore : $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$ (équation d'Euler linéarisée).

Q35. Définir la notion d'impédance en physique. Pour une OPPH, l'impédance acoustique est purement réelle. Montrer qu'elle est égale à $Z = \pm \rho_0 c$, selon que la propagation se fait dans le sens des x croissants ou décroissants.

BIBLIOTHÈQUE

Réflexion et transmission des ondes acoustiques

On considère deux milieux non dissipatifs d'impédances acoustiques $Z_1 = \rho_{01}c_1$ et $Z_2 = \rho_{02}c_2$, initialement au repos. La pression initiale est P_0 uniforme dans les deux milieux. Une OPPH incidente se propage dans le domaine $x < 0$ dans le sens des x croissants (**Figure 7**).

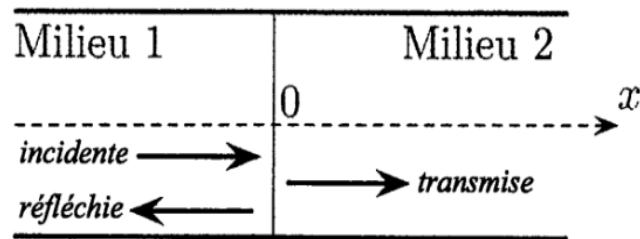


Figure 7

Au niveau d'un dioptré acoustique imperméable, fixé en $x = 0$, cette onde subit une transmission dans le domaine $x > 0$ et une réflexion dans le domaine $x < 0$. $\{p_i(x, t), v_i(x, t)\}$, $\{p_t(x, t), v_t(x, t)\}$ et $\{p_r(x, t), v_r(x, t)\}$ sont les champs de pressions et de vitesses acoustiques associés à ces 3 ondes.

Q36. Exprimer les pressions et les vitesses acoustiques dans les milieux 1 et 2, $\{p_1(x, t), v_1(x, t)\}$ et $\{p_2(x, t), v_2(x, t)\}$, en fonction des pressions et des vitesses incidentes, transmises et réfléchies.

Q37. Donner, en le justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse et à la pression au niveau du dioptré en $x=0$. En déduire les équations qui en résultent.

Au niveau du dioptré acoustique, on définit les coefficients de réflexion, r_p , et de transmission, t_p , en amplitude de pression par : $r_p = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{P_{rm}}{P_{im}}$ et $t_p = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{P_{tm}}{P_{im}}$, où P_{im} , P_{rm} et P_{tm} sont les amplitudes des ondes incidente, réfléchie et transmise.

Q38. Exprimer r_p et t_p en fonction de Z_1 et Z_2 .

Au niveau de dioptre acoustique on définit, aussi, les coefficients de réflexion, R , et de transmission, T , de l'énergie acoustique de l'onde incidente : $R = \left| \frac{\langle \pi_r(0,t) \rangle}{\langle \pi_i(0,t) \rangle} \right|$ et $T = \left| \frac{\langle \pi_t(0,t) \rangle}{\langle \pi_i(0,t) \rangle} \right|$ où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur le temps. On rappelle l'expression de la puissance surfacique acoustique $\pi(x,t) = p(x,t) \cdot v(x,t)$.

Q39. Exprimer $\langle \pi(x,t) \rangle$ en fonction de P_m et Z dans le cas d'une OPPH puis en déduire que R et T peuvent s'écrire, en termes de modules de pression, comme :

$$R = \left(\frac{P_{rm}}{P_{im}} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{P_{tm}}{P_{im}} \right)^2$$

Q40. Montrer que $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2$ et $T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$. Calculer la somme $R+T$. Quel principe physique traduit le résultat trouvé.



Concours

Biologie & Géologie

Correction de l'épreuve de Physique

Date : 02 Juin 2025

Heure : 8 H00

Durée : 3H

- Cette épreuve comporte 14 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte cinq parties.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses.

Q1. Un gaz parfait subit une détente de Joule-Gay-Lussac qualifiée de détente irréversible iso-énergétique. La variation de son entropie ΔS est :

☐ $\Delta S < 0$

☐ $\Delta S = 0$

☒ $\Delta S > 0$

Q2. 1 kg d'eau liquide, pris à $T=90^\circ\text{C}$, reçoit à pression atmosphérique une quantité de chaleur $Q=2315 \text{ kJ}$. On donne : l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100°C : $\ell_v = 2315 \text{ kJ kg}^{-1}$, la capacité thermique massique de l'eau liquide saturant : $c_\ell = 4,18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Dites si :

☐ l'eau va s'évaporer totalement☒ la quantité majeure va s'évaporer☐ seule une petite quantité va s'évaporer

Q3. Une machine motrice diatherme fonctionne selon le cycle idéal de Carnot. T_1 est la température de la source chaude. T_2 celle de la source froide. Le rendement η de cette machine est :

☐ $1 - \frac{T_1}{T_2}$

☒ $1 - \frac{T_2}{T_1}$

☐ $1 + \frac{T_1}{T_2}$

☐ $1 + \frac{T_2}{T_1}$

Q4. On considère un gaz qui traverse une tuyère horizontale, rigide et calorifugée. ρ , h et v sont la masse volumique, l'enthalpie massique et la vitesse du gaz. Les indices 'e' et 's' réfèrent aux paramètres à l'entrée et à la sortie de la tuyère. Le régime est stationnaire et l'écoulement est incompressible. La vitesse à la sortie, $v_s \gg v_e$, est :

☐ $v_s = \sqrt{2\rho(h_s - h_e)}$

☐ $v_s = \sqrt{2(h_s - h_e)}$

☐ $v_s = \sqrt{2(h_s - h_e)/\rho}$

☒ $v_s = \sqrt{2(h_e - h_s)}$

Q5. Laquelle des formes d'équations suivantes décrit un phénomène de transport diffusif ?

☒ $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$

☐ $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + P_{cr}$

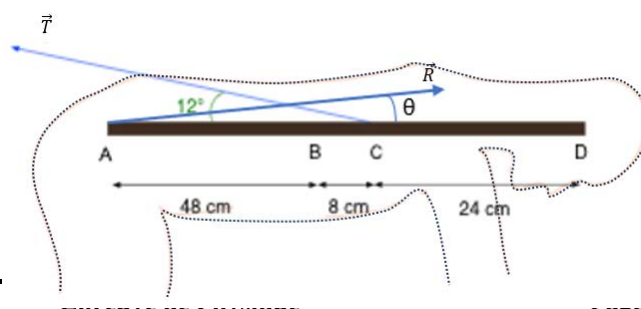
☐ $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = A \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} + P_{cr}$

Q6. Dans un modèle simplifié, la colonne vertébrale peut être assimilée à un levier prenant appui sur le sacrum (A). Les différents muscles du dos sont équivalents à un muscle unique agissant en C. L'ensemble tronc-bras a son centre de gravité situé en B et représente 60% du poids de l'individu, qui pèse 80 kg. La tête représente 7% du poids de l'individu. $\vec{R}$ la réaction du point d'appui A.

Que vaut la force T exercée par les muscles dorsaux ? $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

☐ $T = 235 \text{ N}$

☐ $T = 1150 \text{ N}$



☒ $T = 2315 \text{ N}$

Q7. Deux pendules simples sont constitués d'un fil de 1 m auquel est attaché une masse de 1 kg pour le premier et 2 kg pour le deuxième. Les deux pendules sont en oscillations libres de faibles amplitudes et de fréquences f_1 et f_2 , respectivement. Dites si :

☐ $f_1 = 2 f_2$

☐ $f_2 = 2 f_1$

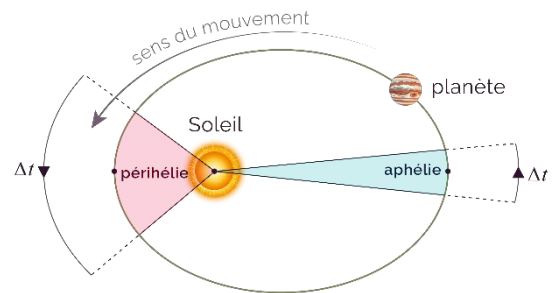
☒ $f_1 = f_2$

Q8. On considère une planète ayant une trajectoire elliptique autour du soleil. Sa vitesse est:

☐ la même partout sur la trajectoire.

☐ maximale en aphélie.

☒ maximale en périhélie.



Deuxième Partie : Mécanique des fluides réels et écoulements sanguins

Le système cardiovasculaire a pour rôle d'approvisionner les tissus et les organes en oxygène et en nutriments essentiels à leur bon fonctionnement, tout en éliminant les déchets produits par leur métabolisme. Il doit donc assurer la circulation du sang depuis les artères jusqu'aux capillaires.

La circulation du sang dans une artère peut être modélisée par l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans une conduite cylindrique de rayon R et de longueur L (**Figure 1**). On suppose que l'écoulement est laminaire et que le régime permanent est atteint.

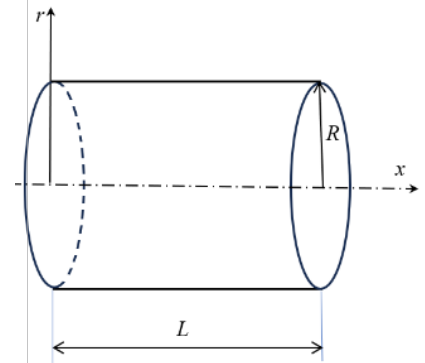


Figure 1

Pour les applications numériques la masse volumique du sang est $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et la viscosité dynamique $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

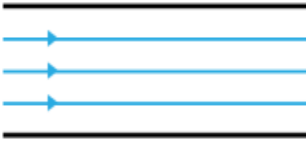
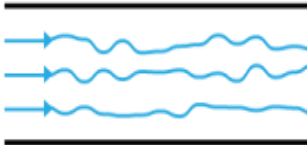
Mécanique des fluides visqueux

Q9. On donne l'expression du nombre de Reynolds ; $Re = L U / \mu$ où L et U sont identiques à une longueur et une vitesse caractérisant, respectivement, la géométrie et la cinématique de l'écoulement. $\mu = \eta / \rho$ est la viscosité cinématique du fluide et ρ la masse volumique du fluide. Donner la signification physique de Re .

Re est le rapport entre le transport de matière par convection et par diffusion visqueuse :

$$Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}}$$

Q10. Donner l'expression de Re pour un écoulement dans une conduite cylindrique de diamètre d ainsi que les différents régimes d'écoulement qui s'établissent selon les valeurs de Re . Schématiser l'allure de l'écoulement dans chaque cas.

$Re = d v / \mu$; v la vitesse moyenne		
$Re < 2000$: laminaire	$2000 < Re < 3000$: critique	$Re > 3000$: turbulent
		
Couches parallèles	Peu perturbé	Totalement perturbé

Dans une telle conduite, l'expression de la vitesse d'un fluide *newtonien* et *incompressible* en écoulement *laminaire* et *stationnaire* est :

$$\vec{v}(r) = \vec{v}_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1)$$

où $\vec{v}_{max} = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \vec{u}_x$ est la vitesse maximale du fluide dans la section de la conduite ; $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$ est la perte de pression le long de la conduite ; r est la variable cylindrique.

Q11. Définir un fluide newtonien, un écoulement laminaire et un écoulement stationnaire. Que représente le rapport $\left(\frac{\Delta P}{L} \right)$?

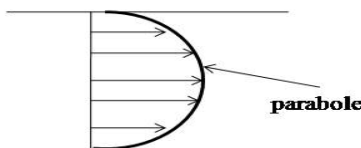
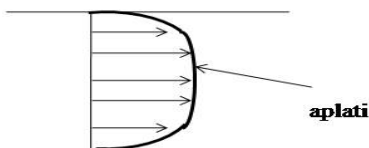
Fluide newtonien ; η et une constante par rapport à la contrainte de déformation.

Ecoulement laminaire : les couches du fluide glissent les unes sur les autres sans se mélanger.

Ecoulement stationnaire : vitesses indépendantes du temps.

$\frac{\Delta P}{L}$: la perte de charge (pression) linéique (par unité de longueur).

Q12. Préciser les conditions aux limites que vérifie l'expression (1). Tracer les profils de vitesse dans ce cas et dans le cas d'écoulement turbulent.

Conditions aux limites	Laminaire	Turbulent
$v(r = R) = 0$ $\left. \frac{dv}{dr} \right _{r=0} = 0$		

Q13. Définir et exprimer le débit volumique Q (loi de Poiseuille) en fonction de v_{max} et R .

$$Q = \frac{dV}{dt} = \iint_S v ds = \int_0^R v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = 2\pi v_{max} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = \frac{\pi}{2} v_{max} R^2$$

Q14. Le nombre de Re s'exprime en fonction de la vitesse moyenne, v_{moy} , du fluide dans la conduite. Exprimer cette vitesse en fonction de v_{max} .

$$Q = v_{moy} S \Rightarrow v_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{\pi}{2} v_{max} R^2}{\pi R^2} \Rightarrow v_{moy} = \frac{v_{max}}{2}$$

Q15. Définir la résistance hydraulique, R_H , de la conduite et l'exprimer en fonction de Q et Δp . En déduire son expression en fonction de R , L et η .

$R_H = \frac{\Delta P}{Q}$: C'est la résistance de la conduite à l'écoulement du fluide.

$$Q = \frac{\pi}{2} v_{max} R^2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2 R^2 = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^4 \Rightarrow R_H = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8\eta L}{R^2 S}$$

Q16. Trouver une analogie avec le phénomène de conduction électrique (préciser les différentes grandeurs d'analogie).

Analogie	
Hydraulique	Electrique
Gradient de pression : ΔP	ddp : $\Delta V = U$
Débit volumique : Q	Intensité de courant : I
Résistance hydraulique $R_H = \frac{\Delta P}{Q}$	Résistance électrique : $R_{elec} = \frac{\Delta V}{I}$
Tube cylindrique : $R_H = \frac{8\eta L}{R^2 S}$ On peut considérer que $\frac{8\eta}{R^2}$ est une résistivité hydraulique.	Conducteur cylindrique : $R_{elec} = \rho \frac{L}{S}$ avec ρ est la résistivité électrique

Modélisation d'une sténose

Q17. Une artère saine étant modélisée par un tube cylindrique de rayon R et de longueur L soumis à Δp . Calculer le débit Q , puis la vitesse moyenne du sang, v_{moy} , dans cette artère. Calculer Re et conclure sur la nature de l'écoulement.

On donne $R=6$ mm, $L=8$ cm et $\Delta p = 40$ Pa.

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) R^4 = \frac{\pi}{8 \times 4 \cdot 10^{-3}} \frac{40}{8 \cdot 10^{-2}} (6 \cdot 10^{-3})^4 = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = 0,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Re = \frac{\rho}{\eta} 2R v_{moy} = 1700 < 2000 \Rightarrow \text{L'écoulement est laminaire.}$$

Une sténose est un rétrécissement de l'artère (et des vaisseaux sanguins), généralement dû à une athérosclérose (accumulation de graisse et calcium dans la paroi). Cette accumulation forme une plaque qui s'épaissit progressivement et affecte la circulation du sang (**Figure 2**). Une modélisation simple est représentée sur la **Figure 3**.

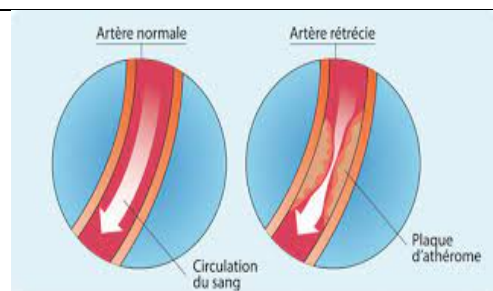
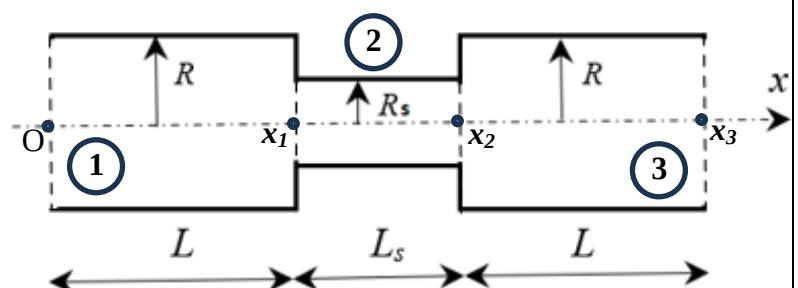


Figure 2



On donne $R=6$ mm, $R_s=2$ mm, $2L=7$ cm, $L_s=1$ cm.

Figure 3

Q18. Le régime étant stationnaire, que peut-on dire des débits volumiques Q_1 , Q_2 , Q_3 dans les zones ①, ② et ③ et Q dans l'artère. Comparer, en le justifiant, les vitesses moyennes de l'écoulement dans les 3 zones.

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, fluide incompressible en régime stationnaire.

$Q = v_{moy} S$: on a $S_1 = S_3 \Rightarrow v_{moy,1} = v_{moy,3}$

tandis que $S_2 < S_1 \Rightarrow v_{moy,2} > v_{moy,1}$

Q19. Calculer la résistance, $R_{H,2}$ de la zone sténosée (zone 2) et la résistance $R_{H,1} + R_{H,3}$ somme des résistances des zones 1 et 3.

$$R_{H,2} = \frac{8\eta L_s}{\pi R_s^4} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

$$R_{H,1} + R_{H,3} = \frac{8\eta 2L}{\pi R^4} = 5,5 \cdot 10^5 \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

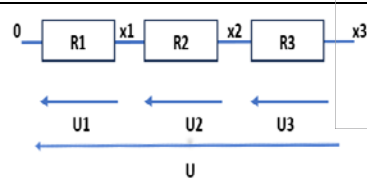
Q20. Exprimer la résistance hydraulique totale, $R_{H,t}$, en fonction de Q et de $\Delta p = p(x=0) - p(x=x_3)$, puis l'exprimer en fonction de $R_{H,1}$, $R_{H,2}$ et $R_{H,3}$. Calculer $R_{H,t}$.

$$R_{H,t} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$\Delta p = [p(0) - p(x_1)] + [p(x_1) - p(x_2)] + [p(x_2) - p(x_3)] = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3$$

$$\frac{\Delta p}{Q} = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3}{Q} \Rightarrow R_{H,t} = R_{H,1} + R_{H,2} + R_{H,3} \quad \text{A.N. } R_{H,t} = 6,9 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

Q21. Proposer une analogie électrique avec cette situation. Qu'appelle-t-on le circuit proposé ? En déduire l'expression de la différence de pression, $\Delta p_s = p(x_1) - p(x_2)$, au niveau de la sténose en fonction des résistances hydrauliques des 3 zones $R_{H,1}$, $R_{H,\text{sténose}} = R_{H,2}$, $R_{H,3}$ et Δp .



C'est un diviseur de tension.

$$\Delta p_s = \frac{R_{H,2}}{R_{H,1} + R_{H,2} + R_{H,3}} \Delta p$$

Q22. En utilisant l'analogie proposée, expliquer l'effet de la sténose sur la circulation sanguine si le système cardio-vasculaire maintient le même gradient de pression $\Delta p = p(0) - p(x_3) = 40 \text{ Pa}$ (valeur sans sténose).

$$U = \Delta V = RI = cte \Rightarrow R \nearrow, I \searrow$$

$$\Delta P = R_H Q = cte \Rightarrow R_H \nearrow, Q \searrow$$

La sténose a pour effet d'augmenter la résistance hydraulique. Si le système maintient Δp constant, le débit sanguin va diminuer

Q23. Dans la réalité, le cœur doit assurer les mêmes besoins en oxygène et en nutriments demandés par l'organisme. De ce fait il doit maintenir le même débit volumique du sang circulant dans le système sain. Dire comment ceci affecte le cœur (il est possible d'analyser la situation par analogie avec l'électricité)

$Q = \frac{\Delta p}{R_H} = cte \Rightarrow R_H \nearrow, \Delta p \nearrow \Rightarrow$ le cœur doit augmenter la pression $\Rightarrow$ fournir plus de puissance $\Rightarrow$ surcharge.

$I = \frac{U}{R} = cte \Rightarrow R \nearrow, U \nearrow \Rightarrow$ le générateur doit avoir une tension plus importante $\Rightarrow \mathcal{P} = UI$ doit augmenter.

Q24. Calculer le nouveau gradient de pression, $\Delta p'$, assurant le débit nécessaire Q . En déduire la chute de pression, Δp_s , dans la zone de sténose. Calculer la vitesse moyenne, $v_{moy,s}$, correspondante, puis calculer Re dans cette zone. Conclure en se qui concerne le régime d'écoulement qui s'établit.

$$\Delta p' = QR_{H,t};$$

$$\text{A.N. } \Delta p' = 6,4 \cdot 10^{-5} \times 6,9 \cdot 10^6 = 440 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_s = \frac{R_{H,2}}{R_{H,t}} \Delta p';$$

$$\text{A.N. } \Delta p_s = \frac{6,4 \cdot 10^6}{6,9 \cdot 10^6} \times 440 = 410 \text{ Pa}$$

$$v_{moy,s} = \frac{1}{8\eta} \left(\frac{\Delta p_s}{L_s} \right) R_s^2;$$

$$\text{A.N. } v_{moy,s} = 5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

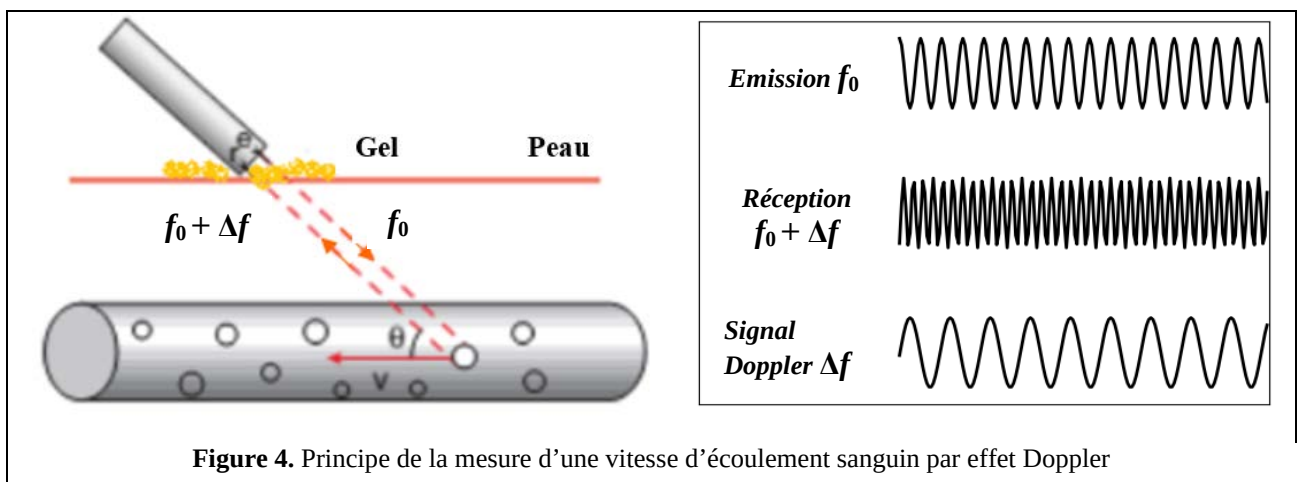
$$Re = \frac{\rho}{\eta} 2R_s v_{moy,s};$$

$$\text{A.N. } Re = 5100 > 3000 \Rightarrow \text{Régime turbulent}$$

Troisième Partie : Mesure de la vitesse par effet Doppler

La détection d'une sténose chez un patient passe par une estimation de la vitesse d'écoulement du sang. Une technique de mesure de la vitesse du sang est l'échographie Doppler. Le principe de cette technique repose sur le décalage de fréquence d'une onde reçue/émise par un récepteur/émetteur mobile, ici les hématies (globules rouges).

Une sonde à ultrason, jouant le rôle d'émetteur et de récepteur en même temps, est positionnée sur la peau et émet des ultrasons de célérité c et de fréquence f_0 . L'onde incidente fait un angle θ avec le vaisseau à explorer (**Figure 4**). Cette onde est reçue par les hématies, circulant à la vitesse $v \ll c$ dans les artères, puis réfléchi vers la sonde. La mesure du décalage total de fréquence entre les ondes émises et reçues (par réflexion sur l'hématie) permet d'estimer la vitesse v .



On considère que pendant la période T_0 de l'onde ultrasonore ;

- L'angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entre le faisceau d'ultrasons et le vecteur vitesse $\vec{v}$, reste constant et par suite seule la composante de vitesse $v \cdot \cos(\theta)$ contribue à la variation de la distance sonde-hématie.

- La vitesse v reste constante et l'hématie est animée par un mouvement rectiligne

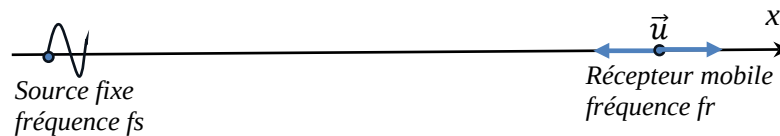


Figure 5

uniforme

On considère la situation de la **Figure 5** : une source fixe à l'origine de l'axe Ox émet une onde de fréquence f_s et de célérité c . Un récepteur mobile à la vitesse *algébrique*, très inférieur à c et supposée constante, perçoit cette onde à la fréquence f_r . Posons $\vec{u} = u\vec{e}_x$: si $u > 0$ le récepteur s'éloigne et si $u < 0$ il se rapproche.

Q25. Montrer que la fréquence perçue par le récepteur s'écrit $f_r = f_s \left(1 - \frac{u}{c}\right)$. On rappelle le développement limité de premier ordre $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ quant $\varepsilon \rightarrow 0$.

$t_o = 0$ début de l'onde à la source $t_o^f = T_o$ fin de l'onde à la source	reception de début de l'onde $t_r^d = \frac{x(t_o)}{c}$ reception de fin de l'onde $t_r^f = T_o + \frac{x(T_o)}{c}$	
Période de la réception $T_r = t_r^f - t_r^d = T_o + \frac{x(T_o)}{c} - \frac{x(t_o)}{c} = T_o + \frac{x(T_o) - x(t_o)}{c}$ $x(T_o) - x(t_o)$ est la distance parcourue par le récepteur mobile à la vitesse $u = \text{cte}$ $\Rightarrow x(T_o) - x(t_o) = u(T_o - t_o) = uT_o$ $\Rightarrow T_r = T_o \left(1 + \frac{u}{c}\right) \Rightarrow f_r = \frac{1}{T_o \left(1 + \frac{u}{c}\right)} = f_o \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} = f_o \left(1 - \frac{u}{c}\right)$ pour $u \ll c$		

Q26. En déduire l'expression de la fréquence, f_1 , perçue par l'hématie et l'expression de la fréquence, f_2 , de l'onde reçue par la sonde en provenance de l'hématie en fonction de, f_1 . Montrer alors que :

$$f_2 = f_0 \left(1 - \frac{2v \cos(\theta)}{c}\right).$$

$v < 0$, rapprochement ; $v > 0$, éloignement

Seule la composante $v \cos(\theta)$ affecte la distance source-récepteur $\Rightarrow u \equiv v \cos(\theta)$ $\Rightarrow f_1 = f_o \left(1 - \frac{v \cos(\theta)}{c}\right)$ (1) L'hématie (source) se rapproche de la sonde (récepteur) $\Rightarrow f_2 = f_1 \left(1 - \frac{v \cos(\theta)}{c}\right)$ (2) Relations (1) et (2) $\Rightarrow f_2 = f_o \left(1 - \frac{v \cos(\theta)}{c}\right) \left(1 - \frac{v \cos(\theta)}{c}\right) = f_o \left(1 - \frac{v \cos(\theta)}{c}\right)^2$ Avec $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow f_2 = f_o \left(1 - 2 \frac{v \cos(\theta)}{c}\right)$	
---	--

Q27. Discuter le signe du décalage Doppler $\Delta f = f_2 - f_0$ suivant que l'hématie s'éloigne ou se rapproche de la sonde.

$\Delta f = f_2 - f_0 = -2f_0 \frac{v \cos(\theta)}{c}$ - Se rapproche $v < 0 \Rightarrow \Delta f > 0 \Rightarrow f_2 > f_0$ - S'éloigne $v > 0 \Rightarrow \Delta f < 0 \Rightarrow f_2 < f_0$	
---	--

Q28. Calculer Δf dans l'artère saine et dans la zone de sténose dans le cas d'un rapprochement à la sonde. Commenter.

On donne $c = 1,5 \text{ km.s}^{-1}$; $f_0 = 4 \text{ MHz}$; $\theta = 20^\circ$.

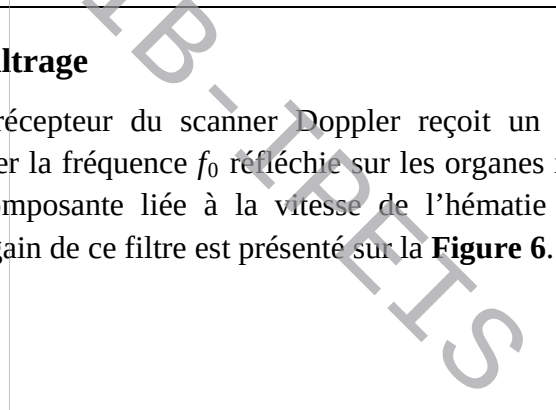
Saine : $\Delta f = +2f_0 \frac{v_{\text{moy}} \cos(\theta)}{c}$	A.N. $\Delta f = 3 \text{ kHz}$	
Sténose : $\Delta f_s = +2f_0 \frac{v_{\text{moy},s} \cos(\theta)}{c}$	A.N. $\Delta f_s = 25 \text{ kHz}$	

Q29. L'analyse spectrale des fréquences Doppler peut conduire à différents types de signaux : aucun signal, un spectre fréquentiel très large, un spectre étroit. Décrire la situation de santé du patient dans chaque cas.

- Aucun signal $\Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow f_2 = f_0 \Rightarrow$ vitesse du sang est nulle $\Rightarrow$ personne morte. - $\Delta f = \text{large} \Rightarrow$ large intervalle de $f_2 \Rightarrow$ large intervalle de $v \Rightarrow$ beaucoup d'irrégularité dans la section de l'artère $\Rightarrow$ zones sténosées. - $\Delta f = \text{étroit} \Rightarrow$ vitesse presque constante $\Rightarrow$ personne saine.	
---	--

Quatrième Partie : Filtrage

En pratique le récepteur du scanner Doppler reçoit un signal composé de différentes fréquences ; en particulier la fréquence f_0 réfléchiée sur les organes immobiles. Pour filtrer le signal et ne garder que la composante liée à la vitesse de l'hématie on utilise un filtre passif. Le diagramme de Bode en gain de ce filtre est présenté sur la **Figure 6**.



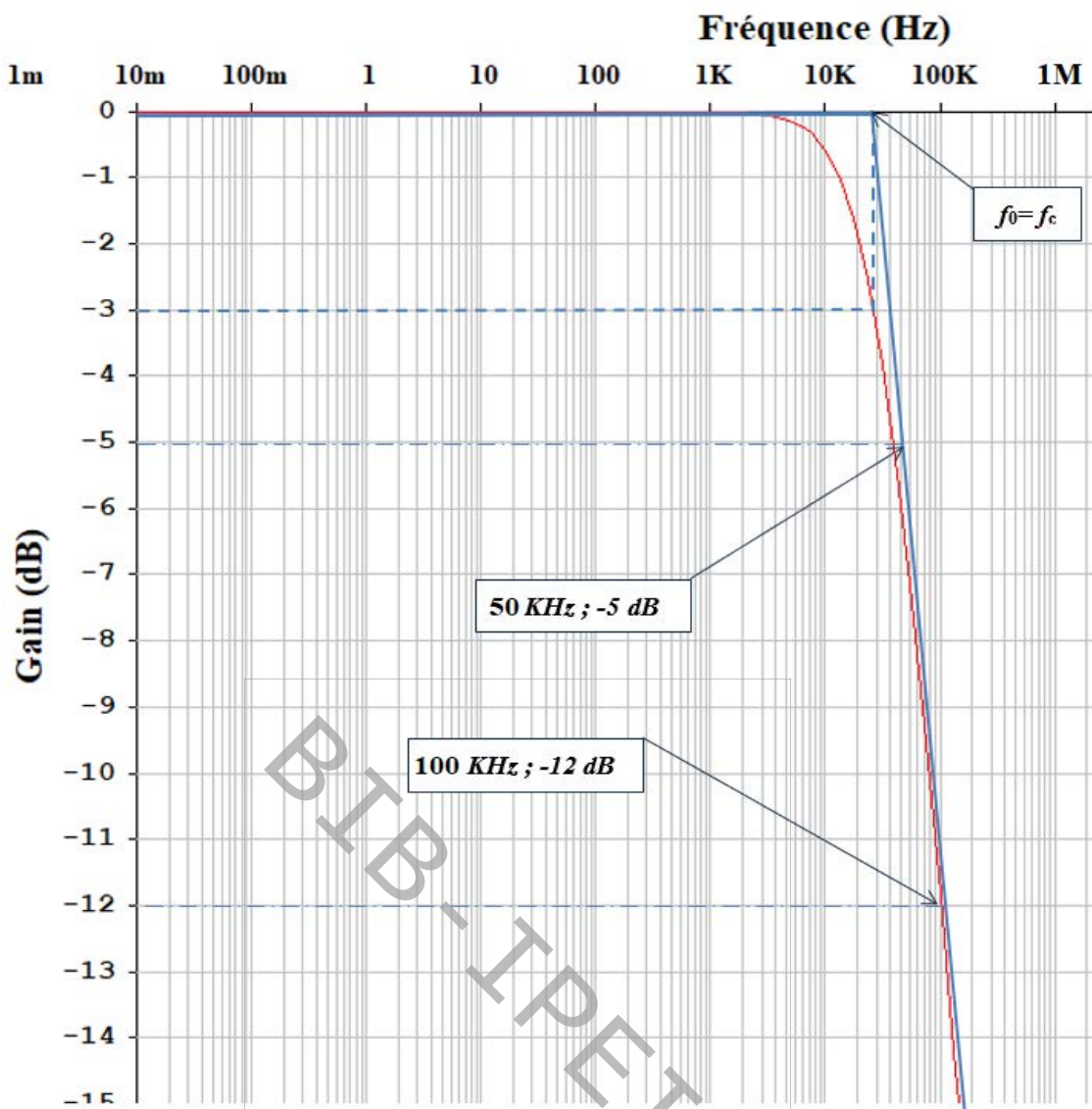


Figure 6

Q30. En déduire la nature du filtre correspondant. Donner les valeurs asymptotiques du G_{dB} et la valeur du gain maximal.

Filtre passe-bas

Asymptotes : $\omega = 0 \Rightarrow G_{dB} = 0$ et $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} = -\infty$

$G_{max} = 0$ dB

Q31. Tracer sur la **Figure 6** le digramme asymptotique. Déterminer l'ordre du filtre, les valeurs des fréquences propre, f_0 , et de coupure à $G_{dB}^{max} - 3$ dB, f_c . Donner la bande passante.

Pente de l'asymptote oblique : $\Delta = \frac{G_{dB}^2 - G_{dB}^1}{f_2 - f_1} = -23$ dB/décade $\Rightarrow$ premier ordre

$f_0 = 25 \div 26$ kHz ; $f_c = f_0$

Bande passante : $[0, \omega_c]$

Q32. Proposer un circuit électrique dont le gain correspond à celui de la **Figure 6** et donner l'expression de la fonction du transfert complexe $H(j\omega)$ correspondante.

Filtre RC sortie sur C ou filtre RL sortie sur R.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\omega_0}j} \text{ avec } \omega_0 = RC \text{ ou } \omega_0 = \frac{R}{L}$$

Q33. Quelle est l'utilité de ce filtre dans l'application actuelle (se rapporter à la question **Q28**).

Le décalage Doppler Δf est de faibles fréquences ; le filtre permet d'éliminer les signaux bruits (parasites) de grandes fréquences.

Cinquième Partie : Ondes acoustiques et échographie

Lors de l'échographie, plusieurs problèmes d'ordre technique peuvent être rencontrés. Parmi eux, la difficulté de propagation de l'onde ultrasonore à travers des couches de propriétés sonores très différentes. On se propose dans cette partie d'étudier l'origine du problème et la possibilité d'y remédier.

Propagation d'ondes acoustiques

On considère un fluide parfait au repos macroscopique, caractérisé par une pression P_0 et une masse volumique ρ_0 , tous deux uniformes. Le passage d'une onde sonore dans ce fluide perturbe cet état d'équilibre. Ainsi, les champs locaux de pression, de masse volumique et de vitesse deviennent en un point M du fluide et à chaque instant (pour un problème unidirectionnel suivant Ox),

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 + p(x, t) & p(x, t) &\ll P_0 \\ \rho(x, t) &= \rho_0 + \mu(x, t) & \mu(x, t) &\ll \rho_0 \\ \vec{v}(x, t) &= v(x, t)\vec{e}_x & v(x, t) &\ll c \end{aligned} \quad \text{avec}$$

où $p(x, t)$, $\mu(x, t)$ et $v(x, t)$ sont, respectivement, la surpression, la masse volumique et la vitesse acoustiques, causés par le passage de l'onde. c est la célérité de l'onde dans le fluide considéré.

Dans toute cette partie, on considère la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire.

Q34. Bien que l'OPPH soit une onde idéale, purement hypothétique, elle est d'un grand intérêt pour la physique des ondes. Donner l'expression d'une OPPH de surpression en notations réelle et complexe (définir chaque terme). Donner son utilité. Citer un exemple d'exploitation de cette onde.

En notation réelle : $p(x, t) = P_m \cos(\omega(t \pm \tau) + \varphi_0) = P_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

En notation complexe : $p(x, t) = \underline{P}_m \exp j(\omega t \pm kx)$

P_m : amplitude de l'onde ; $\underline{P}_m = e^{j\varphi_0}$: amplitude complexe ; φ_0 : phase initiale ; τ : retard temporel entre l'origine et le point M(x) ; $k = \frac{\omega}{c}$: module du vecteur d'onde.

Utilité : toute onde de n'importe quelle forme peut être décomposée en une série de OPPH (série de Fourier) moyennant un nombre suffisant de terme.

Exemple : analyse spectrale d'un son / d'une lumière par réseau de diffraction.

L'impédance acoustique complexe d'un milieu est définie par le rapport $\underline{Z} = \underline{p}(x, t) / \underline{v}(x, t)$.

Pour une OPPH elle peut se réduire à $\underline{Z} = \frac{p}{v} = \frac{P_m}{V_m} = \frac{P_m}{v_m}$. On montre la relation liant la surpression

acoustique à la vitesse 'acoustique' dues au passage de l'onde sonore : $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$ (équation d'Euler linéarisée).

Q35. Définir la notion d'impédance en physique. Pour une OPPH, l'impédance acoustique est purement réelle. Montrer qu'elle est égale à $Z = \pm \rho_0 c$, selon que la propagation se fait dans le sens des x croissants ou décroissants.

C'est la résistance/opposition d'un milieu au passage d'une grandeur physique donnée.

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \pm jk p(x, t)$$

$$\underline{v} = \int \pm \frac{jk}{\rho_0} p(x, t) dt \Rightarrow \underline{v} = \pm \frac{jk}{\rho_0} p(x, t) \frac{1}{j\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{p}{\underline{v}} = \frac{1}{\pm \frac{jk}{\rho_0} \frac{1}{j\omega}} = \pm \rho_0 c$$

Réflexion et transmission des ondes acoustiques

On considère deux milieux non dissipatifs d'impédances acoustiques $Z_1 = \rho_{01}c_1$ et $Z_2 = \rho_{02}c_2$, initialement au repos. La pression initiale est P_0 uniforme dans les deux milieux. Une OPPH incidente se propage dans le domaine $x < 0$ dans le sens des x croissants (**Figure 7**). Au niveau d'un dioptré acoustique imperméable, fixe en $x = 0$, cette onde subit une transmission dans le domaine $x > 0$ et une réflexion dans le domaine $x < 0$. $\{p_i(x, t), v_i(x, t)\}$, $\{p_t(x, t), v_t(x, t)\}$ et $\{p_r(x, t), v_r(x, t)\}$ sont les champs de pressions et de vitesses acoustiques associés à ces 3 ondes.

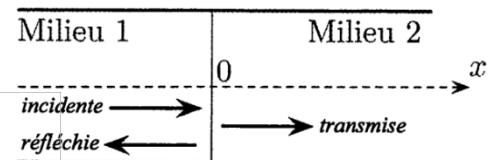


Figure 7

Q36. Exprimer les pressions et les vitesses acoustiques dans les milieux 1 et 2, $\{p_1(x, t), v_1(x, t)\}$ et $\{p_2(x, t), v_2(x, t)\}$, en fonction des pressions et des vitesses incidentes, transmises et réfléchies.

$$\begin{cases} p_1(x, t) = p_i(x, t) + p_r(x, t) \\ p_2(x, t) = p_t(x, t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1(x, t) = v_i(x, t) + v_r(x, t) \\ v_2(x, t) = v_t(x, t) \end{cases}$$

Q37. Donner, en le justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse et à la pression au niveau du dioptré en $x=0$. En déduire les équations qui en résultent.

$p_1(x = 0, t) = p_2(x = 0, t)$: le dioptré est fixe $\Rightarrow$ les forces de pression de part et d'autre sont directement opposées et par suite les pressions de part et d'autre le sont aussi.

$v_1(x, t) = v_2(x, t)$: continuité du débit volumique ($v_1 s = v_2 s$).

$$\begin{cases} p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \\ v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \end{cases}$$

Au niveau du dioptré acoustique, on définit les coefficients de réflexion, r_p , et de transmission, t_p , en amplitude de pression par : $r_p = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{P_{rm}}{P_{im}}$ et $t_p = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{P_{tm}}{P_{im}}$, où P_{im} , P_{rm} et P_{tm} sont les amplitudes des ondes incidente, réfléchie et transmise.

Q38. Exprimer r_p et t_p en fonction de Z_1 et Z_2 .

$$\begin{cases} p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \\ v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) & (1) \\ \frac{p_i(0, t)}{Z_1} - \frac{p_r(0, t)}{Z_1} = \frac{p_t(0, t)}{Z_2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + Z_1(2) \Rightarrow 2p_i = p_t \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \Rightarrow t_p = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$(1) - Z_2(2) \Rightarrow p_i \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) + p_r \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) = 0 \Rightarrow r_p = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Au niveau de dioptré acoustique on définit, aussi, les coefficients de réflexion, R , et de transmission, T , de l'énergie acoustique de l'onde incidente : $R = \frac{\langle \pi_r(0, t) \rangle}{\langle \pi_i(0, t) \rangle}$ et $T = \frac{\langle \pi_t(0, t) \rangle}{\langle \pi_i(0, t) \rangle}$ où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur le temps. On rappelle l'expression de la puissance surfacique acoustique $\pi(x, t) = p(x, t) \cdot v(x, t)$.

Q39. Exprimer $\langle \pi(x, t) \rangle$ en fonction de P_m et Z dans le cas d'une OPPH puis en déduire que R et T peuvent s'écrire, en termes de modules de pression, comme :

$$R = \left(\frac{P_{rm}}{P_{im}}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{P_{tm}}{P_{im}}\right)^2$$

$$\pi(x, t) = p(x, t) \cdot v(x, t) = p(x, t) \cdot \frac{p(x, t)}{Z} = \frac{p^2(x, t)}{Z} = \frac{1}{Z} P_m^2 \cos^2(\omega t \pm Kx + \varphi_0)$$

$$\langle \pi(x, t) \rangle = \frac{1}{Z} P_m^2 \langle \cos^2(\omega t \pm Kx + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{2Z} P_m^2$$

$$R = \left| \frac{-\frac{1}{2Z_1} P_{rm}^2}{\frac{1}{2Z_1} P_{im}^2} \right| = \left(\frac{P_{rm}}{P_{im}}\right)^2 ; \quad T = \left| \frac{\frac{1}{2Z_2} P_{tm}^2}{\frac{1}{2Z_1} P_{im}^2} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{P_{tm}}{P_{im}}\right)^2$$

Q40. Montrer que $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$ et $T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$. Calculer la somme $R+T$. Quel principe physique traduit le résultat trouvé.

$$R = \left(\frac{P_{mr}}{P_{mi}}\right)^2 = (r_p)^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$T = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{P_{mt}}{P_{mi}}\right)^2 = \frac{Z_1}{Z_2} (t_p)^2 = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$R + T = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 + \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1$$

Conservation de l'énergie dans un milieu non dissipatif.

Q41. Discuter les cas $Z_1 \gg Z_2$, $Z_1 \ll Z_2$ et $Z_1 = Z_2$. Commenter.

- $Z_1 \gg Z_2$ $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \sim \left(\frac{-Z_1}{Z_1} \right)^2 = 1$ $T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \sim \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1)^2} \rightarrow 0$	- $Z_1 \ll Z_2$ $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \sim \left(\frac{Z_2}{Z_2} \right)^2 = 1$ $T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \sim \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2)^2} \rightarrow 0$	- $Z_1 = Z_2$ $R = 0$ $T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{4Z_1^2}{(Z_1)^2} = 1$	
$Z_1 \gg Z_2$, $Z_1 \ll Z_2$: réflexion totale. $Z_1 = Z_2$: transmission totale, cad, les interfaces ne transmettent les ondes que si les impédances des milieux adjacents sont voisines.			

Q42. On donne $Z_{\text{air}} = 400 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et $Z_{\text{peau}} = 1.62. 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. Quel problème pratique peut être rencontré lors de l'utilisation médicale de l'échographie ? proposer une solution.

$Z_{\text{air}} \ll Z_{\text{peau}}$: réflexion totale $\Rightarrow$ les ondes ne peuvent pas pénétrer le corps $\Rightarrow$ pas d'imageries échographiques. Pour résoudre ce problème, il faut appliquer, entre la sonde et la peau, un gel d'impédance acoustique voisine de celle de la peau.	
--	--

Fin de l'Épreuve