REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

MP

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Physique

Durée : 4 heures	**Date : 7 juin 2000**	**Heure : 8 h**	**Nb pages : 7**
Barème : Partie I : 5,25/20;	Partie II : 5/20;	Partie III : 4,5/20;	Partie IV : 5,25/20

L'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le problème comporte différentes parties **indépendantes** entre elles, les candidats peuvent les résoudre dans l'ordre qui leur convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

La spectroscopie est un moyen d'analyse de la répartition spectrale d'un rayonnement. Elle a connu un essor prodigieux dans les années 186O, avec l'identification de nouveaux éléments chimiques à partir de leur spectre caractéristique. Actuellement, elle est très utilisée dans différents domaines : physique de la matière condensée, physique des plasmas, chimie organique, biologie...
Les appareils permettant cette analyse, c'est à dire la répartition de l'intensité de la lumière en fonction de la longueur d'onde, sont appelés spectroscopes.

Dans les deux premières parties de ce problème, on s'intéresse à l'étude de deux types de spectroscopes :
- les spectroscopes à réseaux
- les spectroscopes interférentiels utilisant l'interféromètre de Michelson.

La troisième partie est consacrée à l'étude d'un moteur (à courant continu) utilisé pour commander la translation du miroir mobile de l'interféromètre de Michelson.

La nécessité d'un verre anticalorique, placé à l'entrée du Michelson, sera justifiée dans la quatrième partie.

I- Monochromateur à réseau

Préliminaire

Pour réaliser un spectroscope, il faut un 'disperseur' qui est un dispositif permettant l'étalement des différentes longueurs d'onde du spectre dans des directions différentes.

☐ 1. Donner le schéma de principe d'un spectroscope utilisant un prisme et expliquer, sans calcul, l'origine de la dispersion de la lumière.

Diffraction par un miroir plan

Un miroir rectangulaire plan de largeur ε et de longueur Λ est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ, sous l'angle d'incidence i_1. On observe la lumière diffractée à l'infini par ce miroir dans le demi-espace contenant l'onde incidente.
La longueur Λ est suffisamment grande pour ne pas considérer la diffraction dans la direction correspondante.

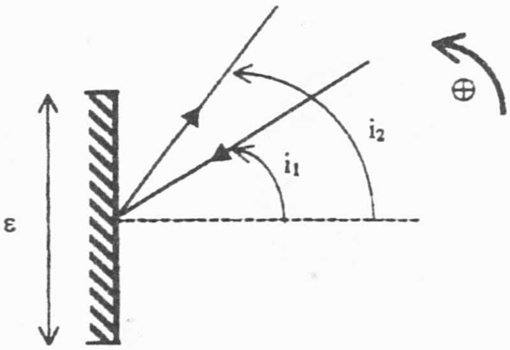

Figure 1.a

☐ 2. Déterminer l'expression de l'amplitude $\mathcal{A}$ de l'onde diffractée par le miroir dans la direction faisant l'angle i_2 avec la normale du miroir. Les angles i_1 et i_2 sont comptés à partir de la normale au miroir, positivement dans le sens trigonométrique (cf figure l.a).

On posera $u = \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}(\sin i_1 + \sin i_2)$

Diffraction par un réseau plan

Un réseau plan est constitué de N miroirs parallèles identiques de largeur ε, séparés les uns des autres par une distance h, dite pas du réseau. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ, sous l'angle d'incidence i_1 (cf figure 1.b).

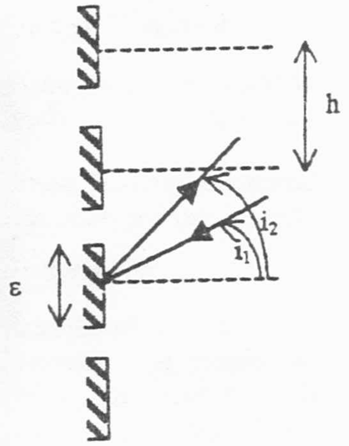

Figure 1.b

☐ 3. Montrer que l'intensité de l'onde diffractée à l'infini par l'ensemble du réseau dans la direction faisant l'angle i_2 peut s'écrire sous la forme :

$$I_R = I_{R0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right]^2 .$$

Exprimer φ en fonction de λ, h et ($\sin i_1 + \sin i_2$). Que représente I_{R0} ?

☐ 4. a - Simplifier l'expression donnant I_R pour une largeur ε des miroirs très petite ($\varepsilon << \lambda$).

L'étude de cette fonction simplifiée montre l'existence de :

- maxima secondaires d'intensité négligeable,
- maxima principaux pour $\varphi = 2p\pi$ où p est un entier (appelé **ordre**),
- minima nuls pour $\varphi = m\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ où m est un entier différent de pN.

b- Donner alors l'allure de $I_R(\varphi)$.

☐ 5. En tenant compte du fait que $N >> 1$, quelle valeur $(\delta i_2)_{1/2}$ peut-on adopter pour la demi-largeur angulaire d'un maximum principal d'ordre p ?
Exprimer $(\delta i_2)_{1/2}$ en fonction de i_2, N, h et λ.

☐ 6. Pour une longueur d'onde $\lambda-\delta\lambda$ voisine de λ, la direction d'un maximum principal d'ordre p varie de $(\delta i_2)_{Max}$ par rapport à celle correspondant à λ dans le même ordre.
Exprimer $(\delta i_2)_{Max}$ en fonction de p, $\delta\lambda$, h et i_2

☐ 7. La lumière incidente contient en fait deux radiations de longueurs d'onde λ et $\lambda-\delta\lambda$. Quel est le plus petit écart $\Delta\lambda_{min}$ de longueur d'onde que l'on peut détecter dans la région d'un maximum principal d'ordre p ? Exprimer alors le pouvoir de résolution théorique du réseau $R_{th} = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}$, en fonction de p et N.

On supposera que la limite de résolution est atteinte si le maximum principal correspondant à la longueur d'onde $\lambda-\delta\lambda$ se forme dans la direction du premier minimum nul correspondant à la longueur d'onde λ (critère de Rayleigh).

☐ 8. On utilise une lampe à vapeur de mercure, munie d'un filtre jaune qui ne laisse passer que deux radiations très voisines d'égale intensité et de longueurs d'onde λ_1 = 577 nm et λ_2 = 579 nm (doublet jaune du mercure). Le réseau utilisé, comportant 400 miroirs par millimètre, est éclairé sur une largeur L = 1 cm.
Ce doublet du mercure est-il résolu dans le spectre d'ordre 1 ?

II- Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson, réglé en **lame à faces parallèles**, est constitué :

- de deux miroirs M_1 et M_2 : M_1 est fixe alors que M_2 peut subir un mouvement de translation suivant l'axe (Ox), perpendiculairement au plan de sa surface. La translation est commandée par un moteur et les plans contenant les deux miroirs restent orthogonaux.
- d'une lame semi-réfléchissante S (dite séparatrice), inclinée de 45° par rapport à l'axe (Ox).
- d'une lame compensatrice C placée contre la séparatrice.

On suppose dans la suite que la lame ainsi compensée n'introduit aucun déphasage supplémentaire et que les ondes qui interfèrent ont la même intensité. La lumière utilisée est monochromatique de longueur d'onde λ.

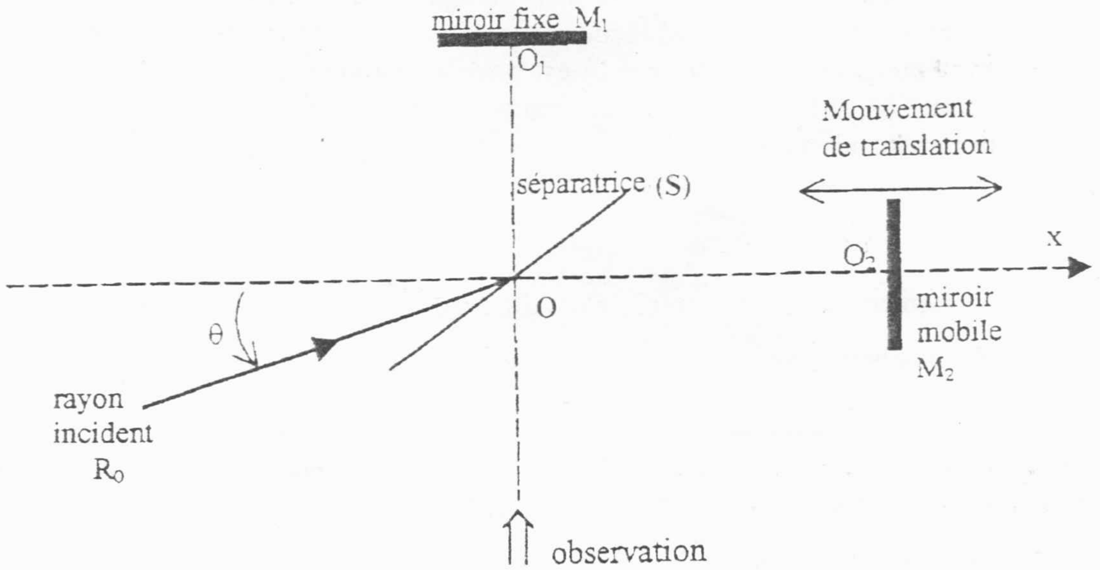

Figure 2

☐ 1. On considère un rayon incident R_0 issu de la source (cf figure 2) et qui fait l'angle θ avec l'axe (Ox). Faire une figure soignée et montrer qu'un tel rayon, dédoublé par la séparatrice, donnera à la sortie deux rayons parallèles ① et ②.

☐ 2. Montrer, qu'au point de vue différence de marche, le schéma de la figure 2 est équivalent à celui représenté sur la figure 3 où M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice et $d = OO_2 - OO_1$.

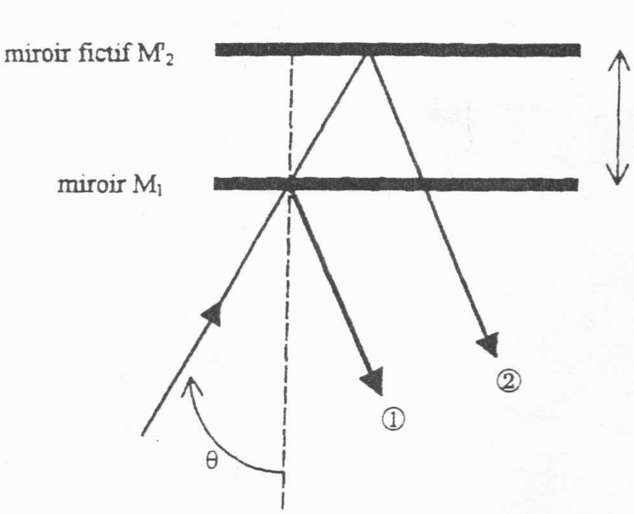

Figure 3

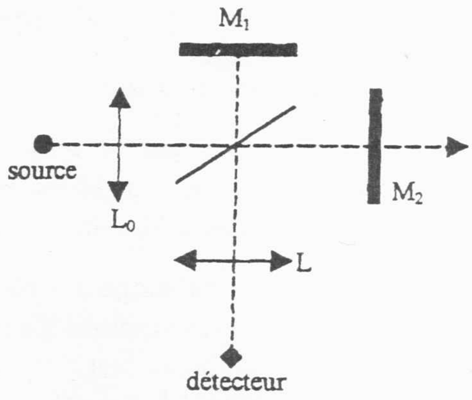

Figure 4

☐ 3. a- Expliquer pourquoi les rayons ① et ② peuvent interférer.
b- Dans quelle région de l'espace observe-t-on cette interférence?
c- Calculer, en fonction de θ et d, la différence de marche δ entre ces deux rayons.
d- Donner alors l'expression de l'intensité I de l'onde résultante.
On notera I_0 l'intensité obtenue pour $\delta = 0$.

☐ 4. L'interféromètre est éclairé maintenant avec une source ponctuelle placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_0) d'axe (Ox). Le faisceau sortant du Michelson est focalisé par une lentille (L) sur un photo-détecteur placé au foyer image de celle-ci (cf figure 4).
a- Donner l'expression de l'intensité I reçue par le détecteur en fonction de I_0, d et λ.
b- Sachant que l'origine des temps (t = 0) est prise au moment du contact optique (d = 0) et que le miroir M_2 est entraîné par un moteur avec une vitesse constante v_0, exprimer l'intensité I en fonction de I_0, v_0, t et λ.

Application

☐ 5. On utilise maintenant une source munie d'un filtre qui laisse passer deux radiations de même intensité et de nombres d'onde $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ et $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ où λ_1 et λ_2 désignent les deux longueurs d'onde. Sachant que le détecteur délivre un courant électrique d'intensité i proportionnelle à l'intensité de lumière qu'il reçoit, donner l'expression de i en fonction de v_0, t, σ_1, σ_2 et i_0, où i_0 désigne l'intensité du courant délivré par le détecteur à t = 0.

On posera $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ avec $\Delta\sigma \ll \sigma_0$.

6. Le relevé du signal électrique délivré par le détecteur s'effectue grâce à une table traçante. La courbe donnant (i/i_0) en fonction du temps (t en secondes) est donnée par la figure 5.
Déterminer, à partir de cet interférogramme, $\Delta\sigma$ et σ_0.
En déduire, en µm, l'écart $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. On donne $v_0 = 1\,\mu m.s^{-1}$.

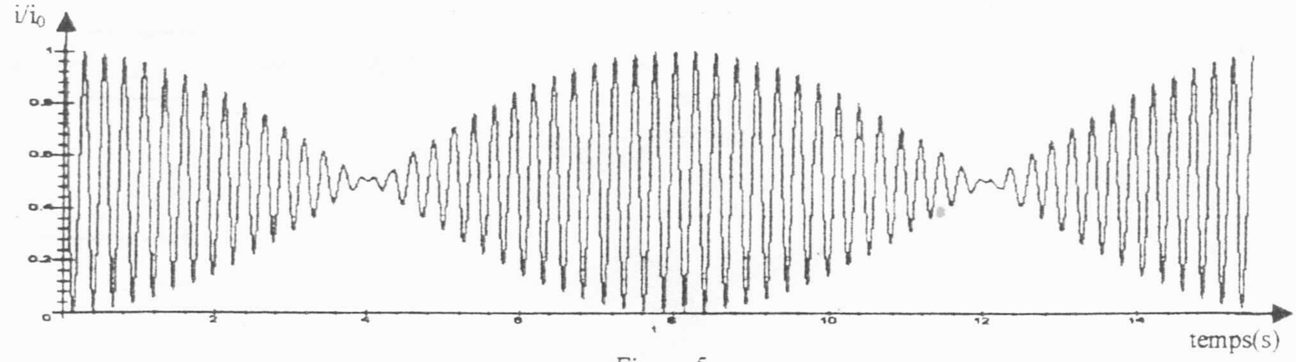

Figure 5

III – Moteur à courant continu

Le rotor du moteur entraînant le miroir mobile du Michelson est constitué d'un cylindre d'axe (z'oz), de rayon a et de hauteur b sur lequel on enroule un fil conducteur formant ainsi une spire rectangulaire. L'ensemble étant placé dans un champ magnétique permanent créé par un dispositif auxiliaire.

L'expression de ce champ est : $\vec{B} = B_0\,\vec{u_r}$ du côté (1) et $\vec{B} = -B_0\,\vec{u_r}$ du côté (2), (cf figures 6.a et 6.b).

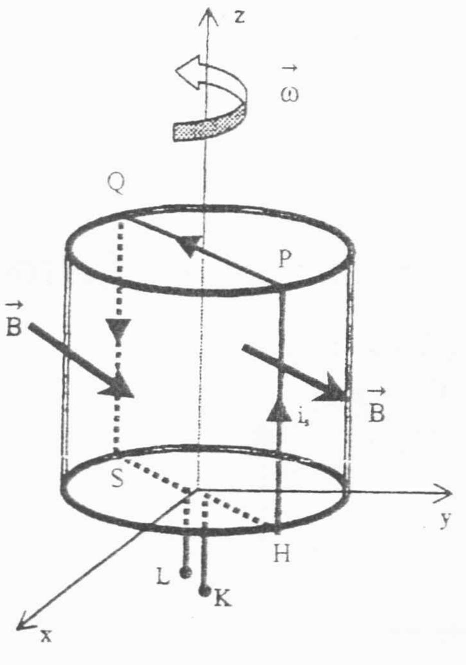

Figure 6.a

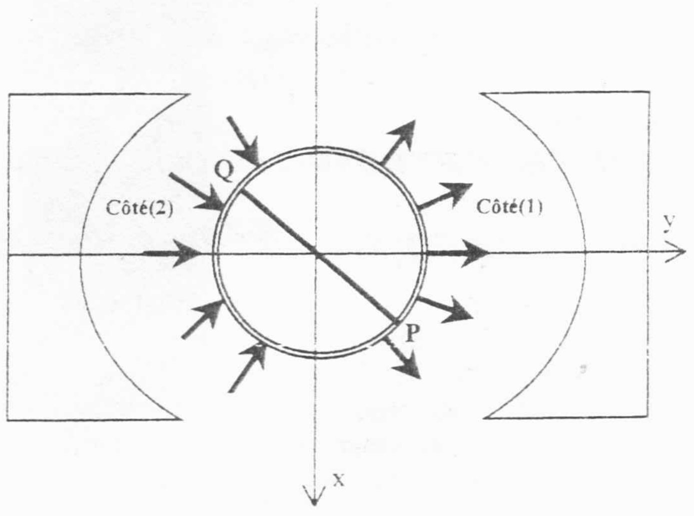

Figure 6.b

On désigne par $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u_z}$, le vecteur rotation du rotor (spire + cylindre) et par i_s le courant qui circule dans la spire suivant le sens indiqué sur la figure 6.a . La base $\left(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}\right)$ est orthonormée directe.

1. Montrer que la résultante des actions qui s'exercent sur la spire, parcourue par le courant i_s et placée dans le champ $\vec{B}$, se réduit à un couple de moment $\vec{C} = 2\,i_s\,a\,b\,B_0\,\vec{u_z}$.

2. Lors de la rotation, le rotor est soumis en plus à un couple résistant $\vec{C_r} = -C_0\,\vec{u_z}$, ($C_0 > 0$).
En désignant par J le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe (z'oz) et en utilisant les lois de la mécanique, établir l'équation, dite mécanique (EM), reliant ω, i_s, J, a, b, B_0 et C_0.

☐ 3. Montrer que la force électromotrice ($e = e_{KL}$), induite par la rotation de la spire dans le champ permanent $\vec{B}$, peut s'écrire sous la forme : $e = -2\,\omega\, a\, b\, B_0$.
On négligera le phénomène d'auto-induction dans la spire.

☐ 4. La spire de résistance R, est connectée par l'intermédiaire des deux points K et L à un générateur de tension de f.e.m constante E. Le montage électrique équivalent est représenté sur la figure 7.
Déterminer l'équation dite électrique (EE), reliant E, i_s, R, a, b, ω et B_0.

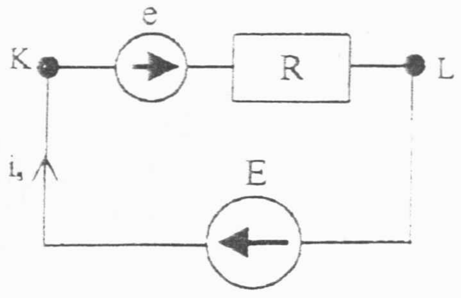

Figure 7

☐ 5. a- A partir des équations (EM) et (EE), établir une équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω.

b- Sachant qu'à $t = 0$, le rotor est immobile, chercher la loi de variation de ω en fonction du temps. On posera $\tau = \dfrac{J R}{4 a^2 b^2 B_0^2}$ et on supposera que $C_0 < \dfrac{2 a b E B_0}{R}$.

c- Tracer la courbe donnant ω en fonction du temps.

☐ 6. Sachant que pour un tour effectué par le rotor, le miroir mobile de l'interféromètre de Michelson se déplace d'une distance ℓ.

a- Donner l'expression de la vitesse limite v_0 atteinte par le miroir en fonction des données du problème E, ℓ, R, a, b, ω, C_0 et B_0.

b- Au bout de combien de temps Δt, la vitesse de translation du miroir atteint-elle 99 % de sa valeur limite v_0 ? On exprimera ce temps Δt en fonction de τ.

IV - Protection de la séparatrice et des miroirs du Michelson

Puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur

Une onde plane progressive se propageant suivant les z croissants dans le demi-espace vide $z < 0$, arrive sous incidence normale sur le plan (xOy).
Le métal utilisé, de conductivité électrique constante γ, de constantes électrique et magnétique (ε_0, μ_0), occupe le demi-espace $z > 0$ (cf figure 8).

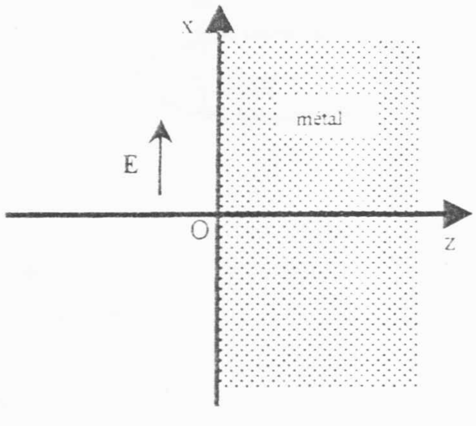

Figure 8

☐ 1. Pour une onde électromagnétique, dans le domaine visible ($f \approx 10^{15}$ Hz), montrer qu'on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.
On donne $\gamma = 10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$ et $\varepsilon_0 = 8,8\ 10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$.

☐ 2. Ecrire alors, pour un métal globalement neutre, les équations de Maxwell.

☐ 3. Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le métal.

☐ 4. Vérifier qu'un champ électrique qui s'écrit sous la forme $\vec{E} = E_{t0}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}\, \vec{u}_x$ peut exister dans le métal ; E_{t0} désigne l'amplitude du champ dans le métal en $z = 0$.
Donner l'expression de δ en fonction ω, γ et μ_0.

5. En partant de la densité volumique de puissance dissipée dans le conducteur, calculer la densité moyenne de puissance, puis la puissance moyenne P_{moy} dissipée dans un conducteur cylindrique de section S et de hauteur z infinie.

Lampe à incandescence

Lors du réglage de l'interféromètre de Michelson et afin d'obtenir le contact optique, on utilise une source de lumière blanche. Pour cela, on éclaire l'interféromètre avec une lampe à incandescence qui émet une puissance relativement élevée (de l'ordre de 100 W), essentiellement dans l'infrarouge.
Cette énergie va être dissipée dans un petit volume (surface d'un miroir est de l'ordre du cm^2, δ est de l'ordre du μm). Tout ceci conduirait à un échauffement trop important de la couche métallique à la surface d'un miroir et donc à sa destruction.
Dans ce qui suit, on montrera que la partie visible du rayonnement émis par une lampe à incandescence ne constitue qu'une fraction très petite de la totalité de la puissance rayonnée.

Le filament de tungstène de la lampe éclairant l'interféromètre de Michelson est assimilé à un corps noir convexe à la température T.
Un corps noir émet une puissance M par unité de surface (flux surfacique) dépendant de sa température T.
La loi de Planck donne le flux surfacique par intervalle de fréquence:

$$\frac{dM}{d\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} - 1}$$

$k_B = 1,38\ 10^{-23}\ J.K^{-1}$: constante de Boltzmann
$h = 6,63\ 10^{-34}$ J.S : constante de Planck

$c = 3\ 10^8\ m.s^{-1}$: célérité de la lumière dans le vide

T : température en Kelvin
ν : fréquence en Hertz

6. En sommant sur toutes les fréquences, montrer que le flux surfacique total émis par un corps noir est donné par la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$.
Donner la valeur numérique ainsi que l'unité de la constante de Stefan σ.
On donne : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$.

7. a- Exprimer le flux surfacique par intervalle de longueur d'onde $\dfrac{dM}{d\lambda}$ en fonction de λ.

b- En déduire que la valeur λ_M, pour laquelle $\dfrac{dM}{d\lambda}$ est maximale, obéit à la loi de déplacement de Wien. On pourra utiliser la valeur numérique x = 4,96 comme solution de l'équation suivante : $e^x(5 - x) = 5$.

8. Sachant que la puissance que consomme la lampe (P = 100 W) est totalement émise sous forme de rayonnement par le fil de tungstène ayant une surface totale $S = 4\ 10^{-5}\ m^2$, montrer que l'énergie qui parvient au Michelson est essentiellement concentrée dans l'infrarouge.

9. Calculer la puissance $P_{visible}$ rayonnée par la lampe dans le visible : $\lambda \in [0,4\ \mu m\ ;\ 0,8\ \mu m]$.

On donne, pour $x_R >> 1$ et $x_B \geq 2\,x_R$: $\displaystyle\int_{x_R}^{x_B} \frac{x^3}{e^x - 1}dx \approx e^{-x_R}\left(x_R^3 + 3x_R^2\right)$. Commenter.

La face d'entrée d'un Michelson (côté source) comprend un verre anticalorique qui est en fait un filtre qui laisse passer le visible mais coupe l'infrarouge. Il protège donc l'interféromètre contre le rayonnement infrarouge qui pourrait endommager la séparatrice et les deux miroirs.