

PROBLEME 1 : CONDUCTION ET RAYONNEMENT THERMIQUES



I.	<u>Régime permanent</u>	
1.	Considérons une tranche de la barre de longueur dy. En régime permanent, la somme des puissances thermiques qu'elle reçoit par conduction à travers ses deux faces d'abscisses y et $y+dy$ est nulle: $[j_Q(y) - j_Q(y+dy)] A = 0 \Rightarrow -\frac{dj_Q}{dy} = 0.$ Or $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ d'où $\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$ $\Rightarrow T(y) = ay + b$. les C.L : $T(y=0)=T_1$ et $T(y=d)=T_2$ imposent: $T(y) = \frac{T_2 - T_1}{d} y + T_1$	0.25 0.5
2.a	Entre t et $t+dt$, la matière contenue dans la tranche de la barre reçoit les quantités de chaleur $\delta Q(y)$ et $\delta Q(y+dy)$ par conduction à travers ses deux faces d'abscisses y et $y+dy$ portées respectivement aux températures $T(y)$ et $T(y+dy)$: $\delta Q(y) = j_Q(y) A dt = -\lambda \frac{dT(y)}{dy} A dt = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} A dt$ $\delta Q(y+dy) = -j_Q(y+dy) A dt = \lambda \frac{dT}{dy}(y+dy) A dt = \lambda \frac{T_2 - T_1}{d} A dt$ L'entropie d'échange de cette tranche s'écrit donc : $\delta S_e = \frac{\delta Q(y)}{T(y)} + \frac{\delta Q(y+dy)}{T(y+dy)} = \lambda \frac{T_2 - T_1}{d} \left[\frac{1}{T(y+dy)} - \frac{1}{T(y)} \right] A dt$ $\delta S_e = -\lambda \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)^2 \frac{dy}{T^2(y)} A dt$	0.5 0.5
2.b	Le transfert thermique se fait du corps chaud vers le corps froid: c'est une transformation irréversible qui s'accompagne donc d'une création d'entropie.	0.25
2.c	Puisque le régime est permanent, l'entropie de cette tranche est constante. L'entropie créée δS_c par unité de temps compense donc exactement l'entropie d'échange δS_e par unité de temps : $\delta S_c = -\delta S_e$. L'entropie créée par unité de temps et par unité de volume s'écrit alors : $\dot{S}_{v,c} = \lambda \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)^2 \frac{1}{T^2(y)}$	0.25 0.25
2.d	$\dot{S}_{v,c}$ est maximale pour $T(y) = T_2 < T_1$. Ce résultat était prévisible puisque, pour un flux de chaleur δQ donné, la variation d'entropie est d'autant plus grande que la température du thermostat est plus faible.	0.25 0.25

II.	<u>Régime variable</u>	
1.	Entre t et $t+dt$, la matière contenue dans la tranche reçoit la chaleur par conduction à travers ses deux faces d'abscisses: y: $\delta Q(y,t) = j_Q(y,t) A dt$, $y+dy$: $\delta Q(y+dy,t) = -j_Q(y+dy,t) A dt$ d'où: $\delta Q(y,t) - \delta Q(y+dy,t) = \rho c A dy dT \Rightarrow$ $[j_Q(y,t) - j_Q(y+dy,t)] A dt = \rho c A dy dT$ $\Rightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial y} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = 0$ En posant $\theta = T - T_e$ et $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$, on obtient : $a^2 \frac{\partial^2 \theta(y,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial t} = 0$	0.5 0.25
2.	On pose $\theta(t) = f(y) g(t)$ dans l'équation précédente, on obtient : $\frac{g'(t)}{g(t)} = a^2 \frac{f''(y)}{f(y)} = v, \text{ d'où :}$ $g'(t) - v g(t) = 0 : (1) \quad \text{et} \quad f''(y) - \frac{v}{a^2} f(y) = 0 : (2)$	0.25 0.5
3.	Une solution de (1) est de la forme: $g(t) = E e^{vt}$, où E est une constante. Comme nous cherchons une solution tel que l'écart de température θ décroît lorsque le temps augmente, alors la constante v doit être nécessairement négative. On pose $v = -k^2$.	0.25 0.5
4.	La solution de (2) est de la forme $f(y) = C \cos(\frac{k}{a} y) + D \sin(\frac{k}{a} y)$, C et D sont des constantes. Enfin : $\theta_k(y,t) = T(y,t) - T_e = [A_k \cos(\frac{k}{a} y) + B_k \sin(\frac{k}{a} y)] e^{-k^2 t}$ Soit : $\alpha = \frac{k}{a}$ et $\beta = -k^2$. $J_Q(\Pi_1) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{y=0} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big _{y=0} \Rightarrow J_Q(\Pi_1) = -\lambda \frac{k}{a} B_k e^{-k^2 t}$	0.25 0.5 0.5
5.	$J_Q(\Pi_1) = J_{Qa}$ traduit la continuité du flux thermique sur l'interface entre les deux milieux. $-\lambda \frac{k}{a} B_k e^{-k^2 t} = -h(T_e - T_1) = h \theta_k(y=0,t) = h A_k e^{-k^2 t}$ $B_k = -\frac{ha}{\lambda k} A_k$	0.25 0.25

	$\theta_k(y,t) = A_k \left\{ \cos\left(\frac{k}{a} y\right) - \frac{ha}{\lambda k} \sin\left(\frac{k}{a} y\right) \right\} e^{-k^2 t}$	0.25
6.	Le plan $\Pi_2(y=-e)$ est en contact avec un thermostat de température T_e. Nous avons donc : $T(\Pi_2) = T(-e,t) = T_e \Rightarrow T(-e,t) - T_e = \theta_k(-e,t) = 0$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{ke}{a}\right) + \frac{ha}{\lambda k} \sin\left(\frac{ke}{a}\right) = 0$ $\operatorname{tg}\left(\frac{ke}{a}\right) = -\frac{\lambda k}{ha} \quad (3)$ qui se met sous la forme : $\operatorname{tg}X = -\frac{\lambda}{he} X$ avec $X = \frac{ke}{a}$ Les intersections des courbes des fonctions $F = \operatorname{tg}X$ et $G = -\frac{\lambda}{he} X$ donnent les solutions de l'équation (3).	0.5 0.25
III	<u>Bilan radiatif</u>	
1.a	$M = \sigma T^4$	0.25
1.b	$P_a = \sigma A T_1^4 + \sigma A T_2^4$ $P_r = \sigma A T^4 + \sigma A T^4 = 2 \sigma A T^4$	0.25 0.25
1.c	A l'équilibre $P_a = P_r$ Ainsi $T_e = \left[\frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right]^{1/4}$ AN. $T_e = 278,13 \text{ K}$.	0.5 0.25
1.d	$\lambda_m T_e = 2898 \mu\text{m} \Rightarrow \lambda_m = 10,42 \mu\text{m}$. A la température d'équilibre T_e, l'écran émet un rayonnement dans l'infrarouge.	0.25 0.25
2.a	$\delta Q_1 = [\sigma A T_1^4 - \sigma A T^4] dt = \sigma A [T_1^4 - T^4] dt$	0.25
2.b	On pose $\Delta T = T_1 - T$ avec $\Delta T \ll T_1$. $T^4 = (T_1 - \Delta T)^4 = T_1^4 \left(1 - \frac{\Delta T}{T_1} \right)^4 \approx T_1^4 \left(1 - 4 \frac{\Delta T}{T_1} \right) \Rightarrow$ $\delta Q_1 \approx 4 \sigma A T_1^3 (T_1 - T) dt = \gamma_1 (T_1 - T) dt \quad \text{avec } \gamma_1 = 4 \sigma A T_1^3.$	0.5
2.c	$\delta Q_2 \approx 4 \sigma A T_2^3 (T_2 - T) dt = \gamma_2 (T_2 - T) dt \quad \text{avec } \gamma_2 = 4 \sigma A T_2^3.$	0.25
2.d	$\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma \Rightarrow$ $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = \gamma (T_1 + T_2 - 2T) dt$	0.25

2.e	$\delta Q = mcdT \Rightarrow \gamma(T_1 + T_2 - 2T) dt = \rho A e c dT$ $\Rightarrow \frac{dT}{T - \frac{T_1 + T_2}{2}} = -\frac{2\gamma}{\rho A e c} dt = \frac{8\sigma T_1^3}{\rho e c} dt = -\frac{dt}{\tau}$ avec $\tau = \frac{\rho e c}{8\sigma T_1^3}$ En utilisant la condition initiale $T(t=0) = T_0$, on obtient: $T(t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \left(T_0 - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$ AN. $\tau = 237,73 \text{ s} = 3,96 \text{ min} \approx 4 \text{ mn.}$	0.5 0.25 0.25 0.25
2.f	Comme $t \gg \tau$, la température finale s'écrit alors : $T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$ AN. $T_f = 278 \text{ K.}$ Le bilan thermique approché donne pour la température finale $T_f = 278 \text{ K}$, qui est la température d'équilibre, une valeur très proche de la température exacte $T_e = 278,13 \text{ K}$ calculée en 1.c). Les approximations utilisées sont donc valables.	0.25 0.25 0.25
3.	Les écrans limitent les échanges thermiques entre les deux parois. En effet, en régime permanent, la puissance émise par la paroi P_1 est : • sans écran : $\Phi_0 = \gamma (T_1 - T_2) = 10 \gamma$ • avec 1 écran : $\Phi_1 = \gamma (T_1 - T_e) = 5 \gamma$ • avec 2 écrans : $\Phi_2 = \gamma (T_1 - T_e) < \Phi_1$	0.25 0.5

PROBLEME 2

I
1.a $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}_i) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}_i) - \Delta \vec{E}_i = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B}_i = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2} ; i=1,2$ 0,5

$$\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2} \quad i=1,2 \quad -k_1^2 \vec{E}_i = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_i$$

$$\Delta \vec{E}_i \quad k_1^2 = k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 ; k_0 = \frac{\omega}{c}.$$
 0,25

1.b $\vec{E}_1 = k_0 [\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_y]$ 0,25

$$\vec{E}_2 = k_0 [\sin \alpha \vec{u}_z + \cos \alpha \vec{u}_y]$$
 0,25

1.c $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = e^{i(\omega t - k_0 z \sin \alpha)} \frac{1}{x} \left[E_{01} e^{i k_0 y \cos \alpha} - i k_0 y + E_{02} e^{-i k_0 y \cos \alpha} \right]$

on pose $k_g = k_0 \sin \alpha$ et $\beta = k_0 \cos \alpha$

$$\vec{E} = \left(E_{01} e^{i \beta y} + E_{02} e^{-i \beta y} \right) e^{i(\omega t - k_g z)} \vec{u}_x$$

$\vec{u}_x$ terme de propagation
 k_g représente le nbre d'onde dans le guide.

 0,25

1.d le champ électrique résultant est tangent aux surfaces $y=0$ et $y=d$; il est donc continu à la traversée de chaque surface. Ainsi 0,25

en $y=0$ $(E_{01} + E_{02}) e^{i(\omega t - k_g z)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)}$ 0,25

en $y=d$ $(E_{01} e^{i \beta d} + E_{02} e^{-i \beta d}) e^{i(\omega t - k_g z)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)}$ 0,25

avec $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)}$ et $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)}$ représentent le champ des les plans conducteurs. Comme il s'agit de conducteurs parfaits $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)} = 0$. 0,25

Ainsi

$$(E_{01} + E_{02}) e^{i(\omega t - k_g z)} = 0 \quad \forall t \text{ et } \forall z$$

$$\text{et } (E_{01} e^{i \beta d} + E_{02} e^{-i \beta d}) e^{i(\omega t - k_g z)} = 0$$

$$\begin{cases} E_{01} = -E_{02} \\ \text{et } \sin(\beta d) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{01} = -E_{02} \\ \beta d = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 0,25

$$\boxed{E_{01} = -E_{02}} ; \boxed{\beta = \frac{n\pi}{d} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$
 0,25

1.e le champ résultant vérifie l'équation d'onde
 $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (l'équation d'onde est linéaire donc le thm de superposition est applicable).

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \vec{u}_x \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = -(\beta^2 + k_g^2) E_x \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x \vec{u}_x \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow k_g^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

$$1.d \rightarrow \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \Rightarrow \left\| \left(\frac{1}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{n}{2d} \right)^2 \right. \\ \left. n \in \mathbb{N}^+ \right.$$

0,5

1.f Pour qu'il y ait propagation dans le guide k_g doit être réel $\Rightarrow k_g^2 > 0 \Rightarrow \omega^2 > \beta^2 c^2 = \left(\frac{n\pi c}{d} \right)^2$

$$\omega > \omega_n = \frac{n\pi c}{d} ; f_{cn} = \frac{\omega_{cn}}{2\pi} = \frac{nc}{2d}$$

$f > f_{cn} = \frac{nc}{2d} ; f_{cn}$ fréquence de coupure du guide.

0,5

$$1.g \quad v_g = \frac{\omega}{k_g} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2/c^2 - (n\pi/d)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f} \right)^2}}$$

0,25

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f} \right)^2}$$

0,25

$$v_p \cdot v_g = c^2$$

0,25

v_p dépend de f ; le milieu est donc dispersif.

0,25

$$2.a \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad -i\omega \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ B_z = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\underline{B}_x = 0 \quad \underline{B}_y = \frac{k_g}{\omega} \underline{E}_x \quad ; \quad \underline{B}_z = \frac{2\beta\epsilon_0}{\omega} \cos(\beta y) e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$$\underline{B}_x = 0$$

$$\underline{B}_y = 2i \frac{k_g}{\omega} E_{01} \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$$\underline{B}_z = \frac{2n\pi}{d\omega} E_{01} \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$$\underline{B}_z \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \text{ n'est pas transverse}$$

$$\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} \text{ est transverse}$$

Il s'agit d'une onde transverse électrique qui a un caractère progressif dans la direction des z et stationnaire suivant la direction des y .

$$2.b \quad \vec{R} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E_x & 0 \\ 0 & B_y \\ 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -E_x B_z \\ E_x B_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_{01}^2 n\pi}{\omega d} \sin\left(\frac{2n\pi y}{d}\right) \sin(2(\omega t - k_g z)) \\ \frac{4E_{01}^2 k_g}{\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \sin^2(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{2E_{01}^2 k_g}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \vec{u}_z \quad \text{car}$$

$$\langle \sin^2(\omega t - k_g z) \rangle = 0$$

0,5

0,25

0,25

0,5

$$P = \frac{2E_{01}^2 k_g}{\mu_0 \omega} l \int_0^d \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) dy \quad \text{or:}$$

$$\int_0^d \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^d \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi y}{d}\right)\right] dy \right]$$

$$= \frac{d}{2}$$

Ainsi

$$P = \frac{E_{01}^2 k_g l d}{\mu_0 \omega} = \frac{E_{01}^2 l d}{\mu_0 v_\phi}$$

0,5

2.c

$$\langle u_{em} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2/2 \rangle + \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle$$

$$= \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} \sin^2(\beta y) + \left(\frac{k_g}{\omega}\right)^2 \sin^2(\beta y) + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \cos^2(\beta y) \right]$$

or $\frac{\beta^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega}\right)^2$ (relation de dispersion)

Donc

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega}\right)^2 (\cos^2(\beta y) - \sin^2(\beta y)) \right]$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega}\right)^2 \cos(2\beta y) \right]$$

0,5

$$\beta = \frac{n\pi}{d}$$

2.d

Pendant dt , l'énergie moyenne qui traverse la section $S = ld$ est celle qui est contenue dans le volume $ld v_e dt$

L'énergie moyenne qui traverse la section S est:

$$P dt = \frac{E_{01}^2 l d}{\mu_0 v_\phi} dt$$

l'énergie moyenne contenue dans le volume
d.l $v_g dt$ est $U_{em} = \int_{x=0}^L \int_{y=0}^d \int_{z=0}^{\infty} \langle u_{em} \rangle dx dy dz$

$$= \frac{E_{01}^2}{\mu_0} L v_g dt \int_{y=0}^d \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_z}{\omega} \right)^2 \cos^2(\beta y) \right] dy$$

or $\int_{y=0}^d \cos^2(\beta y) dy = \int_{y=0}^d \cos\left(\frac{2m\pi y}{d}\right) dy = 0$

D'où $U_{em} = \frac{E_{01}^2 L v_g dt}{\mu_0 c^2} d$

$$P_{01} dt = \frac{E_{01}^2 L v_g dt}{\mu_0} \frac{d}{c^2}$$

$$\frac{E_{01}^2 L d}{\mu_0 v_g} dt = \frac{E_{01}^2 L v_g d}{\mu_0 c^2} dt \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_g} = v_g$$

l'énergie se propage avec la vitesse de groupe v_g

2.e Si les parois étaient de conductivité finie on aura une dissipation de l'énergie par effet Joule dans les parois.

3.a $\vec{E}(y=d^-) = \vec{E}_{\text{cond}}(y=d^+) = \vec{0}$

Comme $E_{01} = -E_{02}$ il faut que le déphasage entre l'onde réfléchie et l'onde incidente en un pt de la surface ($y=d$) soit égal à $2m\pi$

3.b On a $\varphi_{\text{réf}}(R) = \varphi_{\text{réf}}(I)$ car R et I appartiennent au même plan d'onde (correspondant à l'onde réfléchie)

R et $F \in$ au m plan d'onde de l'onde incidente donc $\varphi_{\text{incid}}(R) = \varphi_{\text{incid}}(F)$

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi(E) &= \varphi_{\text{ref}}(E) - \varphi_{\text{incid}}(E) = \varphi_{\text{ref}}(I) - \varphi_{\text{incid}}(F) \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda_0} IF \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda_0} IJ = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N}^* \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{IJ = IF = m\lambda_0} \quad m \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

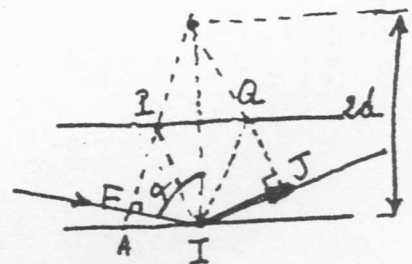
3.C

$$\cos\alpha = \frac{IF}{2d}$$

$$\Rightarrow IF = 2d \cos\alpha$$

$$\text{or } IF = m\lambda_0$$

$$\text{D'où } \boxed{\cos\alpha = \frac{m\lambda_0}{2d}}$$



$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{IF}{IA} \Rightarrow AI = \frac{IF}{\sin\alpha} = \frac{m\lambda_0}{\sin\alpha}$$

$$\frac{AI}{m} = \frac{\lambda_0}{\sin\alpha} \quad \text{or } k_g = k_0 \sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g} = \frac{\sin\alpha}{\lambda_0}$$

$$\text{D'où } \frac{AI}{m} = \lambda_g \text{ longueur d'onde dans le guide.}$$

$$\text{On a } \sin\alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad \text{et } \cos\alpha = \frac{m\lambda_0}{2d}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{m\lambda_0}{2d}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_0^2} - \left(\frac{m}{2d}\right)^2$$

$$\text{Soit } k_g^2 = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$$

II

Cavité résonante

$$1.a \quad \vec{E}_1^+ = -\sqrt{R}\sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t - ky)} e^{-ikd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$1.b \quad \vec{E}_{2n+1}^+ = -\sqrt{R}\sqrt{T} R^n E_0 e^{i(\omega t - ky)} e^{-i(2n+1)kd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$2.a \quad \begin{aligned} \vec{E}_2^- &= R\sqrt{T} E_0 e^{i\omega t} e^{-2ikd} e^{-ik(d-y)} \vec{u}_x \\ &= R\sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t + ky)} e^{-3ikd} \vec{u}_x \end{aligned} \quad 0,5$$

$$2.b \quad \vec{E}_{2n}^- = R^n \sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t + ky)} e^{-(2n+1)ikd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$3. \quad \vec{E}_{-2m+1}^+ + \vec{E}_{-2n}^- = E_0 \sqrt{T} R^n e^{-i(2n+1)kd} e^{i\omega t} \left[e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \right]$$

$$\vec{E} = E_0 \sqrt{T} e^{i\omega t} \left[e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \right] \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{-i(2n+1)kd} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = E_0 \sqrt{T} e^{i\omega t} \left(e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \right) \frac{e^{-ikd}}{1 - R e^{-2ikd}} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \frac{E_0 \sqrt{T} e^{-ikd}}{1 - R e^{-2ikd}} e^{i\omega t} \left(e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \right) \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(y) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow B_x = 0; B_y = 0; B_z = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$B_z = \frac{k}{\omega} \frac{E_0 \sqrt{T} e^{i(\omega t - kd)}}{1 - R e^{-2ikd}} \left(e^{iky} + \sqrt{R} e^{-iky} \right) \quad 0,5$$

$$2. \quad \langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle u_e \rangle &= \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\vec{E} \vec{E}^*) \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \frac{E_0^2 T \left[1 + R - 2\sqrt{R} \cos(2ky) \right]}{1 + R^2 - 2R \cos(2kd)} \end{aligned}$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{B} \underline{B}^*)$$

$$= \frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 E_0^2 T \frac{1}{1+R^2 - 2R \cos(2kd)} (1+R + 2\sqrt{R} \cos 2ky)$$

$$= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{T (1+R + 2\sqrt{R} \cos 2ky)}{1+R^2 - 2R \cos(2kd)}$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{T \cdot 2 (1+R)}{1+R^2 - 2R \cos 2kd} \text{ or } T = 1-R$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{1-R^2}{1+R^2 - 2R \cos 2kd}$$

$\langle u_{em} \rangle$ est indépendante de y , elle est uniforme.

5.b $\langle u_{em} \rangle = \langle u_{em} \rangle S_d$

$$= \frac{S_d \epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{1-R^2}{1+R^2 - 2R \cos 2kd}$$

6 $\langle u_{em} \rangle$ est maximale si $1+R^2 - 2R \cos 2kd$ est minimale ie si $\cos 2kd = +1$ ie

$$2kd = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow kd = m\pi \quad m \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{2\pi d f}{c} = m\pi \Rightarrow \underline{f_m = \frac{mc}{2d} \quad m \in \mathbb{N}^*}$$

$$\langle u_{em} \rangle (f = f_m) = \underline{U_{Max} = \frac{\epsilon_0 S_d E_0^2}{2} \frac{1+R}{1-R}}$$

• $f_m = f_{c,m}$

les fréquences de résonance f_m coïncident avec les fréquences de coupure du guide formé par les plans conducteurs parfaits (et donc avec les fréquences propres du guide formé par les plans conducteurs parfaits)

7.a $f_1 = \frac{c}{2d}$; $2kd = 2 \cdot \frac{2\pi}{c} f_1 d = \frac{2\pi f_1}{f_1}$

Ainsi $\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1-R^2}{1+R^2-2R \cos\left(\frac{2\pi f_1}{f_1}\right)}$ 0,25

7.b $f = \Delta f + f_m$

$\frac{f}{f_1} = \frac{\Delta f}{f_1} + n \Rightarrow \cos\left(2\pi \frac{f}{f_1}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{2\pi \Delta f}{f_1}\right)$
 $= \cos\left(\frac{2\pi \Delta f}{f_1}\right)$
 $\approx 1 - 2\left(\frac{\pi \Delta f}{f_1}\right)^2$ 0,25

Alors

$\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1-R^2}{1+R^2-2R + 4R \left(\frac{\pi \Delta f}{f_1}\right)^2}$
 $= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{(1-R^2)/(1-R)^2}{1 + \frac{4\pi^2 R}{(1-R)^2} \left(\frac{\Delta f}{f_1}\right)^2}$

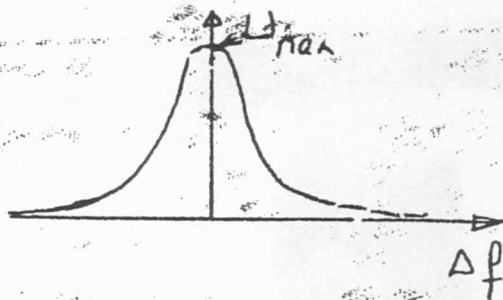
$U_{Max} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1+R}{1-R}$

$F^2 = \frac{\pi^2 R}{(1-R)^2} \rightarrow F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$ 0,5

Ainsi

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{max}}{1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2} \quad \text{avec} \quad F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

7.c



0,5

7.d

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{max}}{2} \Rightarrow 2 = 1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f_{1/2}}{f_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4F^2} = \left(\frac{\Delta f_{1/2}}{f_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow |\Delta f_{1/2}| = \frac{f_1}{2F}$$

0,5

Ainsi $\Delta \nu = \frac{f_1}{F} \rightarrow \frac{\Delta \nu}{f_1} = \frac{1}{F} = \frac{1-R}{\pi \sqrt{R}}$

$R=0,9 \quad F=29,8 \quad ; \quad \frac{\Delta \nu}{f_1} = 3,36 \cdot 10^{-2}$

$R=0,95 \quad F=61,2 \quad ; \quad \frac{\Delta \nu}{f_1} = 1,63 \cdot 10^{-2}$

$R=0,99 \quad F=312,6 \quad ; \quad \frac{\Delta \nu}{f_1} = 3,2 \cdot 10^{-3}$

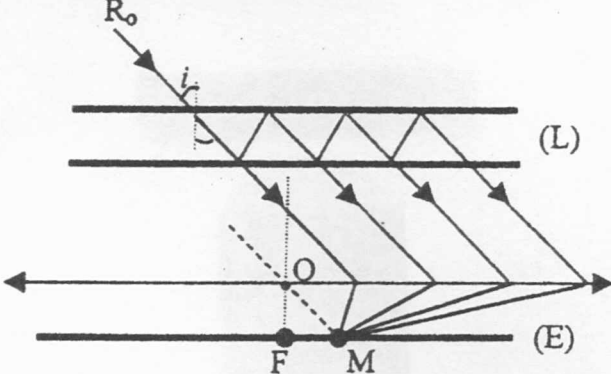
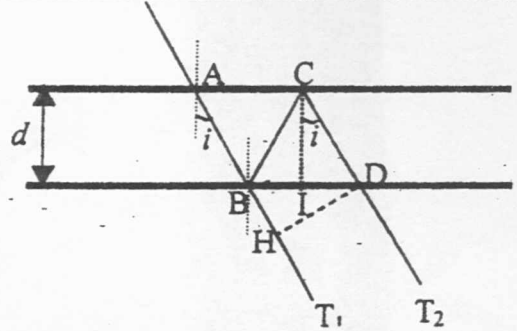
0,75

Plus le coefficient de réflexion en puissance est grand, plus l'énergie électromagnétique est concentrée sur f_1 . En augmentant R on réduit l'étendue spectrale de la répartition de l'énergie.

0,5

Application : Réalisation des sources fortement cohérentes.

III- Interférences à deux ondes

1.	$I_1 = T^2 I_0$; $I_2 = R^2 T^2 I_0 = R^2 I_1$; $I_3 = R^4 T^2 I_0 = R^4 I_1$; $I_4 = R^6 T^2 I_0 = R^6 I_1$ AN. $R = 0.4$ et $T = 0.6$. $I_1 = 0.0576 I_0$; $I_2 = 0.0092 I_1$; $I_3 = 0.0015 I_1$; $I_4 = 2.36 \cdot 10^{-4} I_1$. On remarque que I_3 et $I_4 \ll I_2$, on peut donc se limiter à un phénomène d'interférences à deux ondes associées aux rayons T_1 et T_2.	1 0.25
2.a		0.25
2.b	 La différence de marche δ entre deux rayons consécutifs T_1 et T_2 est : $\delta = (BCD) - (BH)$ $(BCD) = 2 BC = 2 \frac{IC}{\cos i} = 2 \frac{d}{\cos i}$ $(BH) = BH = BD \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = 2 BI \sin i = 2 d \tan i \sin i$ soit: $(BCD) - (BH) = \frac{2d}{\cos i} (1 - \sin^2 i) = 2d \cos i$ Ainsi, la différence de marche δ entre deux rayons transmis successifs est : $\delta = 2 d \cos i$	0.5
2.c	La figure d'interférences a F comme centre de symétrie et chaque cercle centré sur F représente l'ensemble des points de même ordre d'interférence: les franges obtenues sont donc des anneaux. Une frange d'interférences correspond à une différence de marche, $\delta = 2d \cos i = \text{constante}$, donc une valeur donnée de i: c'est pour cette raison que les franges ainsi obtenues sont appelées <i>franges d'égale inclinaison</i>.	0.25 0.25

3.	Le contraste est : $C = \frac{2R}{1+R^2}$ <table border="1"> <tr> <td>R</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>0,4</td> <td>0,55</td> <td>0,7</td> </tr> </table> Plus R est grand, plus la figure d'interférence est nette.	R	0,2	0,3	0,4	C	0,4	0,55	0,7	0.25 0.5 0.25
R	0,2	0,3	0,4							
C	0,4	0,55	0,7							
4.a	Au centre $i = 0$ et $\delta = 2d = p_0 \lambda_1 \Rightarrow p_0 = \frac{2d}{\lambda_1}$. AN. $p_0 = 18762$. Le centre est brillant puisque p_0 est un entier.	0.25								
4.b	Dans le cadre de l'approximation de Gauss, le rayon ρ_k du $k^{\text{ième}}$ anneau est : $\rho_k = F'M = f \tan i_k \approx f i_k$ L'ordre d'interférences $p_k = \frac{2d \cos i_k}{\lambda_1}$ décroît à partir du centre. Ainsi pour le $k^{\text{ième}}$ anneau brillant, l'ordre d'interférences est donné par : $p_k = p_0 - k \Rightarrow p_0 - p_k = k = \frac{2d}{\lambda_1} (1 - \cos i_k)$ L'angle i_k étant petit : $\cos i_k \approx 1 - \frac{i_k^2}{2}$ et par suite $k = \frac{d}{\lambda_1} i_k^2 \Rightarrow i_k = \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}$ finalement : $\rho_k = f \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}$	0.5								
4.c	La distance séparant le $k^{\text{ième}}$ anneau brillant du $(k+1)^{\text{ième}}$ anneau brillant : $\Delta \rho_k = \rho_{k+1} - \rho_k = f \sqrt{\frac{\lambda_1}{d}} \sqrt{k} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \approx \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{k d}}$ L'écart étant proportionnel à l'inverse de la racine carrée du numéro k de l'anneau, les rayons se resserrent de plus en plus si l'on s'éloigne du centre (k croît). On ne peut donc pas déterminer d'interfrange.	0.5 0.25								
5.a	Chaque anneau brillant de rayon ρ_k correspond à un ordre d'interférences p_k tel que : $\delta = 2d \cos i_k \approx 2d \left(1 - \frac{i_k^2}{2}\right) = p_k \lambda$ d'où : $\lambda = \frac{2d}{p_k} \left(1 - \frac{\rho_k^2}{2f^2}\right)$. En différenciant la relation précédente en maintenant f, p_k et d constantes on obtient : $\Delta \lambda = \frac{2d \rho_k}{p_k f^2} \Delta \rho_k$	0.5								
5.b	Pour qu'il n'y ait pas chevauchement entre le $k^{\text{ième}}$ et le $(k+1)^{\text{ième}}$ anneaux brillants il faut que $\Delta \rho_k > \Delta \ell_k$. Comme $\Delta \ell_k = \frac{p_k f^2}{2d \rho_k} \Delta \lambda = \frac{p_k f}{2d \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}} \Delta \lambda = \frac{p_k f}{2 \sqrt{k \lambda_1 d}} \Delta \lambda$. On a alors $\frac{p_k f}{2 \sqrt{k \lambda_1 d}} \Delta \lambda < \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{k d}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} < \frac{1}{p_k}}$	0.5								