Corrigé de l'épreuve de physique
Concours Mathématiques et Physique
Session Juin 2012

Problème I (45/100)
PINCES AMPEREMETRIQUES

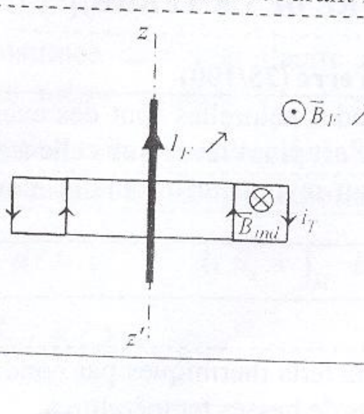
1ère partie : Pince ampèremétrique pour le courant continu (22,5/100)

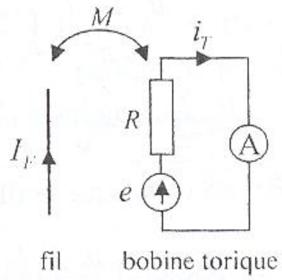
Q	Réponse	Barème
1-a)	$\vec{j} = n\,q\,\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = -\dfrac{j}{n\,e}\,\vec{u}_x$	1
1-b)	$\vec{f}_m = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = \dfrac{j}{n}\,\vec{u}_x \wedge B\,\vec{u}_z = -\dfrac{j\,B}{n}\,\vec{u}_y$	1
	Cette force fait dévier les électrons libres de leur trajectoire rectiligne ce qui entraîne une accumulation des électrons sur la face 2 qui devient chargée négativement par contre un déficit d'électrons apparait sur la face 1 qui devient chargée positivement.	1
1-c)	$\vec{E}_H$ est dirigé de la face 1 vers la face 2 donc il est porté selon $(-\vec{u}_y)$	0,5
1-d)	Lorsque le régime permanent s'établit on a : $q\,\vec{E}_H = -\vec{f}_m \Rightarrow \vec{E}_H = -\dfrac{j\,B}{n\,e}\,\vec{u}_y$	1
2-	$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H \\ \vec{E}_H = -\dfrac{j\,B}{n\,e}\,\vec{u}_y \\ \vec{j} = \gamma\,\vec{E}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H = \dfrac{j}{\gamma}\,\vec{u}_x - \dfrac{j\,B}{n\,e}\,\vec{u}_y$	2
3-a)	$\left.\begin{array}{l} U_H = V_M - V_N = \int_M^N \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_M^N E_H \cdot dy\,\vec{u}_y = \int_{\ell/2}^{-\ell/2} -\dfrac{j\,B}{n\,e}\,\vec{u}_y\cdot dy\,\vec{u}_y = \dfrac{j\,B\,\ell}{n\,e} \\ I_0 = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = j\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy = j\,h\,\ell \end{array}\right\} \Rightarrow$	1 1
	$U_H = \dfrac{I_0\,B}{n\,e\,h} = -R_H\,\dfrac{I_0\,B}{h}$	1
	U_H est appelé tension de Hall.	0,5
3-b)	Pour le Cu on a : $R_H = -\dfrac{1}{10^{28}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = -6{,}25\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m^3\,C^{-1}}$	1
	Pour le InSb on a : $R_H = -\dfrac{1}{10^{21}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = -6{,}25\,10^{-3}\ \mathrm{m^3\,C^{-1}}$	1
	Entre deux plaques, l'une constituée de Cu et l'autre de InSb, ayant les mêmes dimensions, parcourues par le même courant I_0 et soumises au même champ magnétique extérieur $\vec{B}$. On choisit celle constituée de InSb car R_H est beaucoup plus important d'où la tension de Hall mesurée sera plus importante.	1
3-c)	$U = \int_M^N \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_M^N \left(\dfrac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H\right)\cdot\vec{d\ell} = \int_x^{x+\delta} \dfrac{\vec{j}}{\gamma}\cdot dx\,\vec{u}_x + \int_M^N \vec{E}_H\cdot dy\vec{u}_y = \dfrac{j\,\delta}{\gamma} + U_H \Rightarrow$ $\Delta U_H = \dfrac{j\,\delta}{\gamma} = \dfrac{I_0\,\delta}{h\,\ell\,\gamma} \Rightarrow \delta = \dfrac{\Delta U_H\,h\,\ell\,\gamma}{I_0}$	2

	$\delta = \dfrac{10^{-2}\cdot 0,3\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{3}}{10^{-1}} = 1,2\ 10^{-3}\ \text{m} = 1,2\ \text{mm}$	1
3-d)	$U_H = \dfrac{I_0\ B\ e^{-a\theta}}{n(0)\ e\ h} \Rightarrow \dfrac{dU_H}{d\theta} = \dfrac{-a\ I_0\ B\ e^{-a\theta}}{n(0)\ e\ h} = -a\ U_H \Rightarrow \dfrac{\Delta U_H}{U_H} = a\ \Delta\theta$	1,5
	$\dfrac{\Delta U_H}{U_H} = 0,014\cdot 10 = 0,14$	1
	L'effet de la température est important sur l'incertitude de la mesure.	0,5
4-a)	$U_H = \dfrac{\mu_0\ I_0}{n\ e\ h^2}\ I$	1
	U_H est proportionnel à I donc une mesure de la tension U_H permet de déterminer l'intensité I du courant inconnu : on a un capteur linéaire du courant électrique.	1
4-b)	$U_H = \dfrac{\mu_0\ I_0}{n\ e\ h^2}\ I = \dfrac{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-1}\cdot 10^{3}}{10^{21}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot (0,3)^2\cdot 10^{-6}} = 8,7\ \text{V}$	1
4-c)	$s = \dfrac{\Delta U_H}{\Delta I} = \dfrac{\mu_0\ I_0}{n\ e\ h^2}$ d'où pour augmenter la sensibilité de la pince il faut diminuer h ou augmenter I_0.	0,5

2ème partie : Pince ampèremétrique pour le courant alternatif (22,5/100)

Q	Réponse	Barème
1-	Dans le cadre de l'ARQS les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_{V(\Sigma)} \dfrac{\rho\ d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{\text{int}\Sigma}}{\varepsilon_0}$: théorème de Gauss $div\vec{B} = 0 \leftrightarrow \oiint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$: équation de conservation du flux magnétique $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -\iint_{S(\Gamma)} \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS} = -\dfrac{d}{dt}\iint_{S(\Gamma)} \vec{B}\cdot\vec{dS} \Rightarrow e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$: Loi de Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\ \vec{j} \leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} \vec{j}\cdot\vec{dS} = \mu_0\ I_{enlace\,\Gamma}$: théorème d'Ampère	0,75 0,75 0,75 0,75
2-a)	La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz donc B_T est indépendant de θ. Soit M un point quelconque de l'espace, le plan $(\text{M},\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie donc $\vec{B}_T(\text{M},t)\perp(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z) \Rightarrow \vec{B}_T(\text{M},t) = B(r,z,t)\ \vec{u}_\theta$	1
2-b)	Appliquons le théorème d'Ampère. On choisit Γ un cercle orientée d'axe Oz et de rayon r. $\oint_\Gamma \vec{B}_T\cdot\vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} B(r,z,t)\ \vec{u}_\theta\cdot r\ d\theta\ \vec{u}_\theta = 2\ \pi\ r\ B(r,z,t)$ $\left.\begin{array}{l}\text{Si } r\rangle b \text{ et } 0\langle z\langle h \text{ alors } I_{enlace\,\Gamma} = N\ I_T - N\ I_T = 0\\ \text{Si } z\langle 0 \text{ ou } z\rangle h \text{ et } \forall\ r \text{ alors } I_{enlace\,\Gamma} == 0\\ \text{Si } r\langle a \text{ et } 0\langle z\langle h \text{ alors } I_{enlace\,\Gamma} == 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{B}_{ext} = \vec{0}$ Si $a\langle r\langle b$ avec $0\langle z\langle h$ alors $I_{enlace\,\Gamma} = N\ I_T \Rightarrow \vec{B}_T(M,t) = \dfrac{\mu_0\ N\ I_t}{2\ \pi}\dfrac{1}{r}\ \vec{u}_\theta$	1 1

2-c)	$\Phi = \iint_{bobinage} \vec{B}_T \cdot \vec{dS}_T$. Les spires sont identiques et parcourues par le même courant donc $\Phi = N \iint_{spire} \vec{B}_T \cdot \vec{dS}_{spire} \Rightarrow$	0,5
	$\Phi = N \dfrac{\mu_0\, N\, I_T}{2\,\pi} \int_a^b \dfrac{dr}{r} \int_0^h dz = \dfrac{\mu_0\, N^2\, I_T}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$	1
	$\Phi = L\, I_T \Rightarrow L = \dfrac{\mu_0\, N^2}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$	0,5
2-d)	$E = \iiint_{espace} \dfrac{B_T^2}{2\,\mu_0}\, d\tau = \dfrac{\mu_0\, N^2\, I_T^2}{8\,\pi^2} \int_a^b \dfrac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \dfrac{\mu_0\, N^2\, I_T^2}{4\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$	1
	$E = \dfrac{1}{2}\, L\, I_T^2 \Rightarrow L = \dfrac{\mu_0\, N^2}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$	0,5
2-e)	$\Phi_{tore \to fil} = \iint_{fil} \vec{B}_T \cdot \vec{dS}_{fil}$ puisque le fil se ferme à l'infini et $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$ alors $\left.\begin{array}{l} \Phi_{tore \to fil} = \iint_{spire} \vec{B}_T \cdot \vec{dS}_{spire} = \dfrac{\mu_0\, N\, I_T}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a} \\ \Phi_{tore \to fil} = M_{tore \to fil}\; I_T \end{array}\right\} \Rightarrow M_{tore \to fil} = \dfrac{\mu_0\, N}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$	1
3-a)	La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz. Le fil étant infini donc la distribution de courant est invariante par translation le long de Oz donc B_F ne dépend que de r. Soit M un point quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie donc $\vec{B}_F(M,t) \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \Rightarrow \vec{B}_F(M,t) = B(r,t)\, \vec{u}_\theta$	1
	Appliquons le théorème d'Ampère. On choisis Γ un cercle d'axe Oz et de rayon r. $\left.\begin{array}{l} \oint_\Gamma \vec{B}_F \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} B(r,t)\, \vec{u}_\theta \cdot r\, d\theta\, \vec{u}_\theta = 2\,\pi\, r\, B(r,t) \\ I_{enlace\,\Gamma} = I_F \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{B}_F = \dfrac{\mu_0\, I_F}{2\,\pi}\, \dfrac{1}{r}\, \vec{u}_\theta$	1
3-b)	$\Phi_{fil \to tore} = \iint_{tore} \vec{B}_F \cdot \vec{dS}_T$. Les spires sont identiques, chacune est contenue dans un plan radial et elles sont équidistantes au fil donc $\Phi_{fil \to tore} = N \iint_{spire} \vec{B}_F \cdot \vec{dS}_{spire}$	0,5
	$\left.\begin{array}{l} \Phi_{fil \to tore} = N\, \dfrac{\mu_0\, I_F}{2\,\pi} \int_a^b \dfrac{dr}{r} \int_0^h dz = \dfrac{\mu_0\, N\, I_F}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a} \\ \Phi_{fil \to tore} = M_{fil \to tore}\; I_F \end{array}\right\} \Rightarrow M_{fil \to tore} = \dfrac{\mu_0\, N}{2\,\pi}\, h\, Ln\dfrac{b}{a}$ $M_{fil \to tore} = M_{tore \to fil}$	1
3-c)	Le bobinage torique est un conducteur immobile dans un champ magnétique variable $\vec{B}_F(M,t)$ donc il subit l'induction de Newman. Puisque les deux extrémités du bobinage torique sont reliées entre elles donc un courant induit $i_T(t)$ apparaît.	0,5 0,5
		1

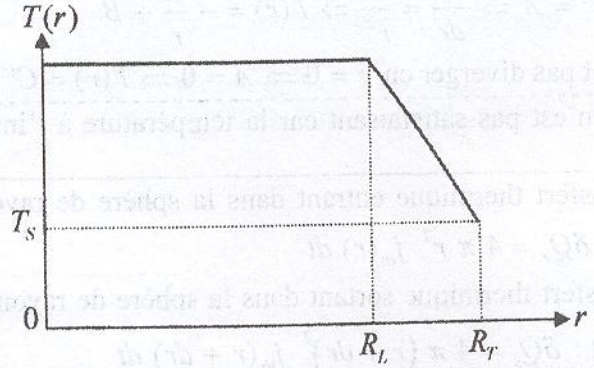
	Lorsque le courant $I_F(t)$ croit alors en un point M d'une spire $\vec{B}_F$ croit donc $\Phi_{fil\to tore}$ croit. D'après la loi de Lenz le sens du courant induit doit être tel que par ses effets il s'oppose à l'augmentation du flux donc ce courant induit crée un champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$ dont le sens doit être opposé à celui de $\vec{B}_F$. Connaissant le sens de $\vec{B}_{ind}$ à l'intérieur d'une spire on déduit le sens du courant induit $i_T(t)$ en utilisant la règle du tire bouchon.	1
4-a)	Le schéma électrique équivalent du dispositif est : $M_{fil\to tore} = M_{tore\to fil} = M$ 	1
	Appliquons la loi des mailles sur le bobinage torique : $e - R\, i_T = 0$ avec $e = -\frac{d\Phi_{total}}{dt} = -\frac{d\Phi_{tore\to tore}}{dt} - \frac{d\Phi_{fil\to tore}}{dt} = -L\frac{di_T}{dt} - M\frac{dI_F}{dt}$: c'est la f.e.m induite qui apparait entre les bornes du bobinage torique donc $L\frac{di_T}{dt} + M\frac{dI_F}{dt} + R\, i_T = 0$	1,5
	En notation complexe on a : $(R + j\, L\, \omega)\, \underline{i}_T + j\, M\, \omega\, \underline{I}_F = 0 \Rightarrow$ $\underline{i}_T = \frac{-j\, M\, \omega}{R + j\, L\, \omega}\, \underline{I}_F = -\frac{M}{L}\, \underline{I}_F = -\frac{\underline{I}_F}{N} \Rightarrow i_{Teff} = \frac{I_0}{N}$	1
	La mesure de i_{Teff} permet de déterminer la valeur efficace I_0 du courant inconnu qui traverse le fil. Le dispositif est un capteur de courant. N étant élevé alors cette pince permet la mesure des courants de forte intensité.	0,5
4-b)	$i_T = 0$ d'où la tension aux bornes de la bobine torique est : $u(t) = M\,\frac{dI_F}{dt}$ d'où la tension efficace indiquée par le voltmètre est : $u_{eff} = M\, I_0\, \omega$	1
	Connaissant M et ω on peut par simple mesure de la tension u_{eff} déterminer la valeur efficace I_0 du courant inconnu qui traverse le fil. Le dispositif est un capteur de courant. M étant proportionnel à N alors cette pince permet la mesure des courants de faible intensité.	0,5

Problème II (55/100)
TEMPERATURE DE LA TERRE

1ère partie : Température à l'intérieur de la Terre (25/100)

1-	Les volcans, les geysers, les sources chaudes naturelles sont des exemples qui prouve que la température à l'intérieur de la Terre est plus élevée que celle à sa surface.	0,5
	Si la température de la Terre était due au rayonnement solaire alors elle serait plus faible qu'en sa surface.	0,5
2-a)	$\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \overrightarrow{dS}\, dt$	0,5
2-b)	$\vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$	0,5
	Le signe moins traduit le faite que les transferts thermiques par conduction se font des régions de hautes températures aux régions de basses températures.	0,5

2-c)	δQ_e le transfert thermique entrant dans la sphère de rayon r entre les instants t et $t+dt$ est : $\delta Q_e = j_{th}(r)\, r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, dt = 4\,\pi\, r^2\, j_{th}(r)\, dt$	**1**
	δQ_s le transfert thermique sortant dans la sphère de rayon $r+dr$ entre les instants t et $t+dt$ est : $\delta Q_s = j_{th}(r+dr)\,(r+dr)^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, dt = 4\,\pi\,(r+dr)^2\, j_{th}(r+dr)\, dt$	**1**
2-d)	La Terre est indéformable $\Rightarrow \delta W = 0$, le régime est stationnaire $\Rightarrow dU = 0$ d'où le premier principe s'écrit :	**0,5**
	$dU = \delta Q_e - \delta Q_s = 0 \Rightarrow (r+dr)^2\, j_{th}(r+dr) - r^2\, j_{th}(r) = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2\, j_{th}(r)\right) = 0$	**1**
	$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2\, j_{th}(r)\right) = 0 \\ j_{th}(r) = -\lambda\, \dfrac{dT}{dr} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2\, \dfrac{dT}{dr}\right) = 0$	**1,5**
2-e)	$r^2\, \dfrac{dT}{dr} = C^{te} = A \Rightarrow \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\dfrac{A}{r} + B$	**1**
	$T(r)$ ne doit pas diverger en $r = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow T(r) = C^{te} = T(r = R_T) = T_s$	**1**
	Ce modèle n'est pas satisfaisant car la température à l'intérieur de la Terre n'est pas uniforme.	**0,5**
3-a)	δQ_e le transfert thermique entrant dans la sphère de rayon r entre les instants t et $t+dt$ est : $\delta Q_e = 4\,\pi\, r^2\, j_{th}(r)\, dt$	**0,5**
	δQ_s le transfert thermique sortant dans la sphère de rayon $r+dr$ entre les instants t et $t+dt$ est : $\delta Q_s = 4\,\pi\,(r+dr)^2\, j_{th}(r+dr)\, dt$	**0,5**
	δQ_{int} le transfert thermique crée à l'intérieur de l'enveloppe sphérique comprise entre les sphères de rayon r et $r+dr$ entre les instants t et $t+dt$ est : $\delta Q_{int} = p_v\, r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, dt = 4\,\pi\, r^2\, p_v\, dr\, dt$	**1**
	Le régime étant permanent et la Terre indéformable le premier principe s'écrit : $dU = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_{int} = 0 \Rightarrow$	**0,5**
	$4\,\pi\, r^2\, j_{th}(r)\, dt - 4\,\pi\,(r+dr)^2\, j_{th}(r+dr)\, dt + 4\,\pi\, p_v\, r^2\, dr\, dt = 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{d}{dr}\left(r^2\, j_{th}(r)\right) + p_v\, r^2 = 0 \\ j_{th}(r) = -\lambda\, \dfrac{dT}{dr} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2\, \dfrac{dT}{dr}\right) = -\dfrac{p_v}{\lambda}\, r^2$	**1,5**
3-b)	La continuité de la puissance thermique en $r = R_L$ s'écrit : $\left.\begin{array}{l} j_{th}(r = R_L^+) = j_{th}(r = R_L^-) \\ T(r \langle R_L) = C^{te} \Rightarrow j_{th}(r = R_L^-) = -\lambda \left(\dfrac{dT(r \langle R_L)}{dr}\right)_{r = R_L^-} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow j_{th}(r = R_L) = 0$	**1**
3-c)	$\dfrac{d}{dr}\left(r^2\, \dfrac{dT}{dr}\right) = -\dfrac{p_v}{\lambda}\, r^2 \Rightarrow r^2\, \dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v}{\lambda}\dfrac{r^3}{3} + C \Rightarrow \dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{p_v}{3\,\lambda}\, r + \dfrac{C}{r^2} \Rightarrow$ $T(r) = -\dfrac{p_v}{6\,\lambda}\, r^2 - \dfrac{C}{r} + D$	**2**

	$j_{th}(r = R_L) = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{dT}{dr}\right)_{r=R_L} = 0 \Rightarrow -\dfrac{p_v}{3\,\lambda} R_L + \dfrac{C}{R_L^2} = 0 \Rightarrow C = \dfrac{p_v}{3\,\lambda} R_L^3$	1
	Continuité de la température en $r = R_T \Rightarrow T(r = R_T) = T_s \Rightarrow$ $T_s = -\dfrac{p_v}{6\,\lambda} R_T^2 - \dfrac{C}{R_T} + D \Rightarrow D = T_s + \dfrac{p_v}{6\,\lambda} R_T^2 + \dfrac{p_v\, R_L^3}{3\,\lambda\, R_T}$	1
	donc $T(r) = T_s + \dfrac{p_v}{6\,\lambda}(R_T^2 - r^2) + \dfrac{p_v\, R_L^3}{3\,\lambda}\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{r}\right)$	1
	$T(r = 0) = T(r = R_L) = T_s + \dfrac{p_v}{6\,\lambda}\left(R_T^2 - 3\,R_L^2 + \dfrac{2\,R_L^3}{R_T}\right)$	1
	$T(r = 0) = 290 + \dfrac{14\cdot 10^{-7}}{6\cdot 4}\left((6400)^2 - 3\cdot(6320)^2 + \dfrac{2\cdot(6320)^3}{(6400)}\right)10^6 = 1400\text{ K}$	1
3-d)		1
3-e)	$\left(\overrightarrow{grad}\,T\right)_{r=R_T} = \left(\dfrac{dT}{dr}\right)_{r=R_T} = \dfrac{p_v}{3\,\lambda}\left(\dfrac{R_L^3}{R_T^2} - R_T\right)$	1
	$\left(\overrightarrow{grad}\,T\right)_{r=R_T} = \dfrac{4\cdot 10^{-7}}{3\cdot 4}\left(\dfrac{(6320)^3}{(6400)^2} - 6400\right)10^3 = -7{,}9\ 10^{-3}\text{ K m}^{-1} = -7{,}9\text{ K km}^{-1}$	1

2$^{\text{ème}}$ partie : Refroidissement de la Terre par conduction (17,5/100)

1-	δQ_e le transfert thermique entrant dans le plan de côte z entre les instants t et $t + dt$ est : $\delta Q_e = j_{th}(z,t)\ S\ dt$	1
	δQ_s le transfert thermique sortant du plan de côte $z + dz$ entre les instants t et $t + dt$ est : $\delta Q_s = j_{th}(z + dz, t)\ S\ dt$	1
	La Terre étant indéformable le premier principe s'écrit : $dU = \delta Q_e - \delta Q_s = -\dfrac{\partial j_{th}}{\partial z}\,dz\ S\ dt$ avec $dU = dm\ c\ dT = \rho\ S\ dz\ c\ \dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt$	1
	donc $-\dfrac{\partial j_{th}}{\partial z} = \rho\ c\ \dfrac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = -\rho\ c\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$ La loi de Fourier donne $\vec{j}_{th} = -\lambda\ \overrightarrow{grad}\,T = -\lambda\ \dfrac{\partial T}{\partial z}\ \vec{u}_z$ On déduit l'équation différentielle vérifiée par j_{th} : $\dfrac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = \dfrac{\rho\ c}{\lambda}\dfrac{\partial j_{th}}{\partial t}$	2

2-a)	$j_{th}(z,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$ à $t=0$ on a $T(z=0^+)=T_0 \rangle\rangle T(z=0^-)=T_s$ avec T_0 très élevé donc $j_{th}(z=0,t=0)\to -\infty$	0,5
	lorsque $t\to+\infty$ on a $T(z=0^+) = T_0 = T(z=0^-)$ donc $j_{th}(z=0,t\to+\infty)=0$	0,5
2-b)	à $t=0$ on a $T(z) = T_0\ \forall z \neq 0$ donc $j_{th}(z,t=0)=0$	0,5
	lorsque $t\to+\infty$ on a $T(z) = T_s\ \forall z$ donc $j_{th}(z,t\to+\infty)=0$	0,5
3-	La solution proposée est acceptable car : - elle vérifie l'équation différentielle en effet : $\dfrac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{A}{\sqrt{D\,t}}\,\dfrac{2\,z}{4\,D\,t}\,e^{-z^2/4\,D\,t}\right) = \dfrac{A}{2\,(D\,t)^{3/2}}\,e^{-z^2/4\,D\,t}\left(1-\dfrac{z^2}{2\,D\,t}\right)$ $\dfrac{\rho\,c}{\lambda}\dfrac{\partial j_{th}}{\partial t} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial j_{th}}{\partial t} = \dfrac{1}{D}\left[\dfrac{A\,D}{2\,(D\,t)^{3/2}}\,e^{-z^2/4\,D\,t} - \dfrac{A}{\sqrt{D\,t}}\left(\dfrac{z^2}{4\,D\,t^2}\right)e^{-z^2/4\,D\,t}\right] \Rightarrow$ $\dfrac{\rho\,c}{\lambda}\dfrac{\partial j_{th}}{\partial t} = \dfrac{A}{2\,(D\,t)^{3/2}}\,e^{-z^2/4\,D\,t}\left(1-\dfrac{z^2}{2\,D\,t}\right)$	1
	- elle vérifie les conditions aux limites en effet : $\lim\limits_{z\to 0} j_{th}(z,t) = -\dfrac{A}{\sqrt{D\,t}}$ donc si $t\to 0$ on a $j_{th}\to-\infty$ et si $t\to+\infty$ on a $j_{th}\to 0$	1
	$\lim\limits_{t\to+\infty} j_{th}(z,t) = 0$ donc $\forall z\ \ j_{th}\to 0$	1
4-	$\left.\begin{array}{l}[\lambda]=[j_{th}][L][T]^{-1}\\ [j_{th}]=[\delta Q][L]^{-2}[t]^{-1}\ \text{avec}\ [\delta Q]=[M][L]^2[t]^{-2}\end{array}\right\}\Rightarrow[\lambda]=[M][L][t]^{-3}[T]^{-1}$	1
	$[\rho]=[M][L]^{-3}$	0,5
	$\left.\begin{array}{l}[c]=[dU][M]^{-1}[T]^{-1}\\ [\delta Q]=[M][L]^2[t]^{-2}\end{array}\right\}\Rightarrow[c]=[L]^2[t]^{-2}[T]^{-1}$	1
	$\left.\begin{array}{l}j_{th}=-\dfrac{A}{\sqrt{D\,t}}\,e^{-z^2/4\,D\,t}\Rightarrow[A]=[j_{th}][D]^{1/2}[t]^{1/2}=[j_{th}][\lambda]^{1/2}[\rho]^{-1/2}[c]^{-1/2}[t]^{1/2}\\ [j_{th}]=[\delta Q][L]^{-2}[t]^{-1}\ \text{avec}\ [\delta Q]=[M][L]^2[t]^{-2}\end{array}\right\}\Rightarrow$ $[A]=[M][t]^{-3}[L]$ $A=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(T_0-T_S)^{\alpha}\,\lambda^{\beta}\Rightarrow[A]=[T]^{\alpha}[\lambda]^{\beta}=[M]^{\beta}[L]^{\beta}[t]^{-3\beta}[T]^{\alpha-\beta}$ Par identification on a : $\alpha=\beta=1$	1
5-	$\left(grad\,T\right)_{z=0} = -\dfrac{j_{th}(z=0,t)}{\lambda} = \dfrac{A}{\lambda\sqrt{D\,t}} = \dfrac{(T_0-T_S)}{\sqrt{\pi\,D\,t}} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\pi\,D}\dfrac{(T_0-T_S)^2}{\left[\left(grad\,T\right)_{z=0}\right]^2}$	2
	$t=\dfrac{1}{\pi\,10^{-6}}\,\dfrac{(1500)^2}{(30\cdot10^{-3})^2}\,\dfrac{1}{60\cdot60\cdot24\cdot365}=2{,}5\cdot10^{7}$ années	1
	Lord Kelvin a obtenu un refroidissement trop rapide car il a négligé l'énergie thermique produite par la radioactivité qui retarde le refroidissement de la Terre.	0,5
	L'âge de la Terre étant estimé à 4,5 milliards d'années donc on peut à l'échelle de la vie humaine considérer le régime stationnaire.	0,5

3ème partie : Mesure de la température de la Terre (17,5/100)

1-a)	Un amplificateur opérationnel est dit parfait (ou idéal) si : * les courants de polarisation sont nuls $i^+ = i^-$ * La résistance d'entrée est infinie et la résistance de sortie est nulle * le gain différentiel statique est infini Si un amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire alors les potentiels de ces bornes inverseuse et non inverseuse sont égaux $\Rightarrow \varepsilon = V^+ - V^- = 0$	1
1-b)	A partir de la loi des mailles on obtient : $E - 2\,R_0\,i_1 + 2\,R_0\,i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = -\dfrac{E}{2\,R_0} + i_1$	1,5
1-c)	Le premier AO étant idéal, on obtient à partir de la loi des mailles : $2\,R_0\,i_3 - R_0\,i_1 + R_0\,i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = i_1 - 2\,i_3$	1,5
1-d)	A partir de la loi des nœuds on a : $i_0 = i_1 + i_2$ d'où on déduit : $i_0 = i_1 + i_1 + \dfrac{E}{R_0} - 2\,i_1 = \dfrac{E}{R_0} \Rightarrow K = \dfrac{1}{R_0}$	2
	Cette partie du montage joue le rôle d'un générateur de courant.	0,5
2-a)	Le deuxième AO étant idéal, on obtient à partir de la loi des mailles : $\left.\begin{array}{l} U_s - R_1\,i' - U_m = 0 \Rightarrow i' = \dfrac{U_s - U_m}{R_1} \\ U_m + (R_1 + R_2)\,i' - U_p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow U_m = U_p - (R_1 + R_2)\dfrac{U_s - U_m}{R_1} \Rightarrow$ $U_m = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\,U_s - \dfrac{R_1}{R_2}\,U_p$	3
2-b)	$U_s = R_s\,i_0 = E\,(1 + a\,\theta) \Rightarrow U_m = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\,E\,(1 + a\,\theta) - \dfrac{R_1}{R_2}\,U_p$	2
3-	$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\,E - \dfrac{R_1}{R_2}\,U_p \\ 2{,}5 = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\,E\,(1 + 100\,a) - \dfrac{R_1}{R_2}\,U_p \end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}5 = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\,100\,E\,a \Rightarrow$ $E = \dfrac{2{,}5\,R_2}{(R_1 + R_2)\,100\,a} \Rightarrow E = \dfrac{2{,}5\cdot 10\cdot 10^3}{(15 + 10)\cdot 10^3\,100\cdot 3{,}9083\cdot 10^{-3}} = 2{,}56\text{ V}$	2
	$U_p = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}\,E \Rightarrow U_p = \dfrac{(15 + 10)\cdot 10^3}{10\cdot 10^3}\,2{,}56 = 6{,}4\text{ V}$	2
4-	$\theta = \dfrac{R_2}{E\,a\,(R_1 + R_2)}\left(U_m + \dfrac{R_1}{R_2}\,U_p\right) - \dfrac{1}{a}$	1
	$\theta = \dfrac{10\cdot 10^3}{2{,}56\cdot 3{,}9083\cdot 10^{-3}\cdot 25\cdot 10^3}\left(3 + \dfrac{15}{10}\cdot 6{,}4\right) - \dfrac{1}{3{,}9083\cdot 10^{-3}} = 248\ ^\circ\text{C} = 521\text{ K}$	1