



République Tunisienne

Signature des
enseignants

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DES
TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
ET DE LA COMMUNICATION

**Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs**

Session : **Juin 2014**

**Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs**

Concours : **Mathématiques et Physique
&
Physique et Chimie**

Session : **Juin 2014**

Concours : **MP & PC**

Epreuve de : **Sciences et Techniques
de l'Ingénieur**

Epreuve de : **Sciences et Techniques de l'Ingénieur**

Durée : **3 Heures**

Nom :

Prénom

Date & lieu de naissance :

Etablissement d'origine :

N° C.I.N ou N° du Passeport pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--

Série :

--	--	--

Identifiant :

--	--	--	--	--	--

NE PAS ÉCRIRE ICI

Nombre de
Cahiers
remis

01

Nombre de
Cahiers remis

01

NE PAS ÉCRIRE ICI

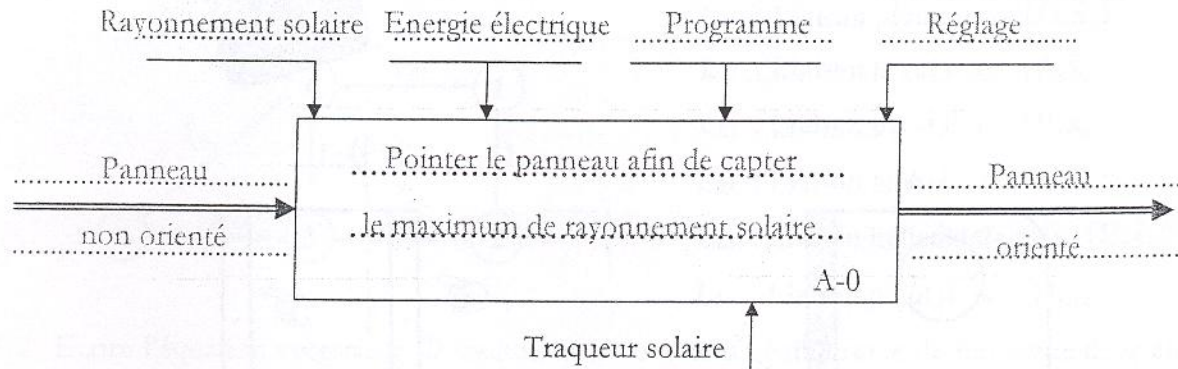
DOSSIER DOCUMENT REPONSES

- ✓ Ce dossier comporte 18 pages numérotées de 1 à 18
 - Partie A - Technologie de conception : Pages 1/18 à 2/18 ;
 - Partie B - Mécanique des solides indéformables : Pages 3/18 à 10/18 ;
 - Partie C - Automatique : Pages 11/18 à 18/18 ;
- ✓ Un seul dossier document réponses est fourni au candidat et doit être rendu, en totalité, même sans réponses à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

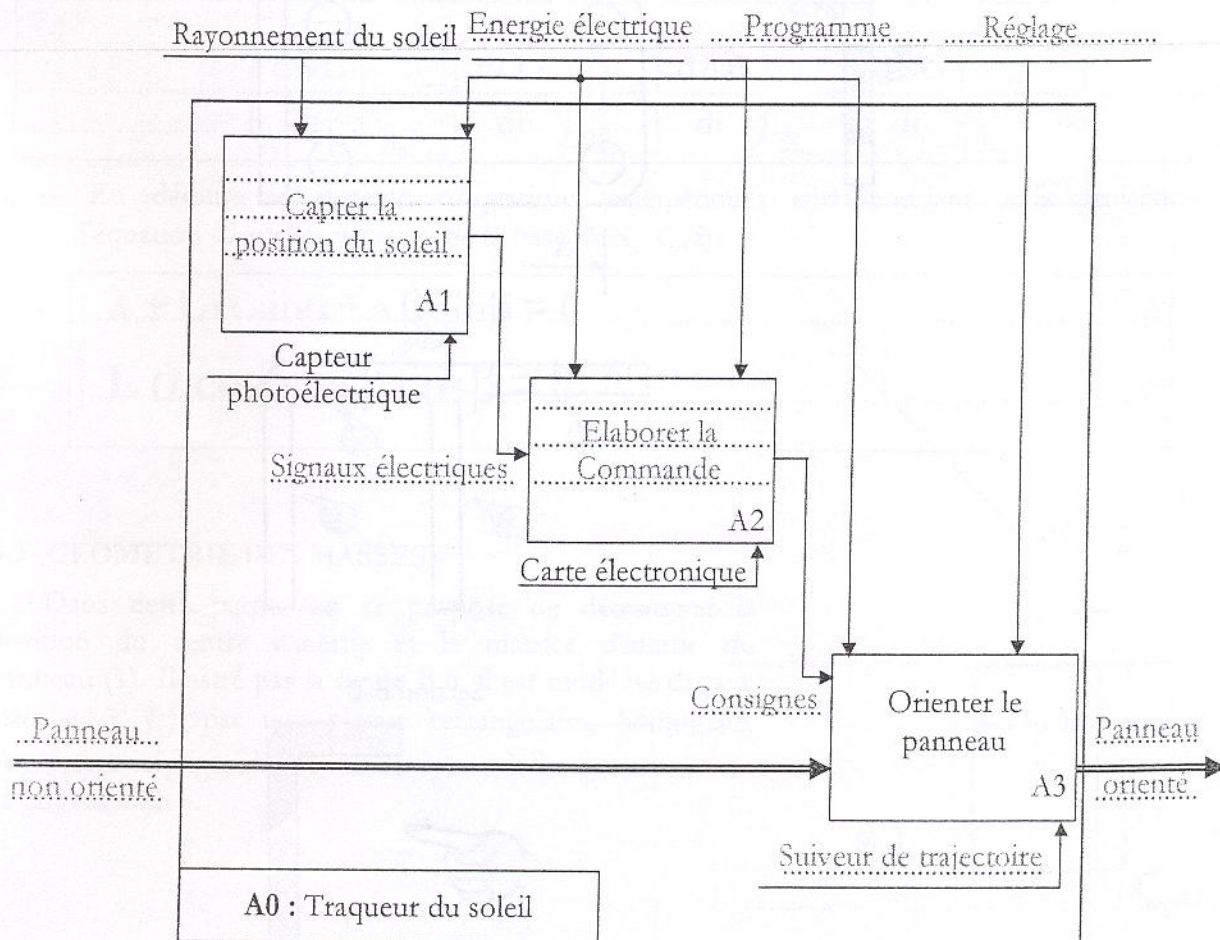
PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

A.1- ANALYSE FONCTIONNELLE

A.1.1- Indiquer, dans l'actigramme niveau A-0, la fonction globale du traqueur solaire.



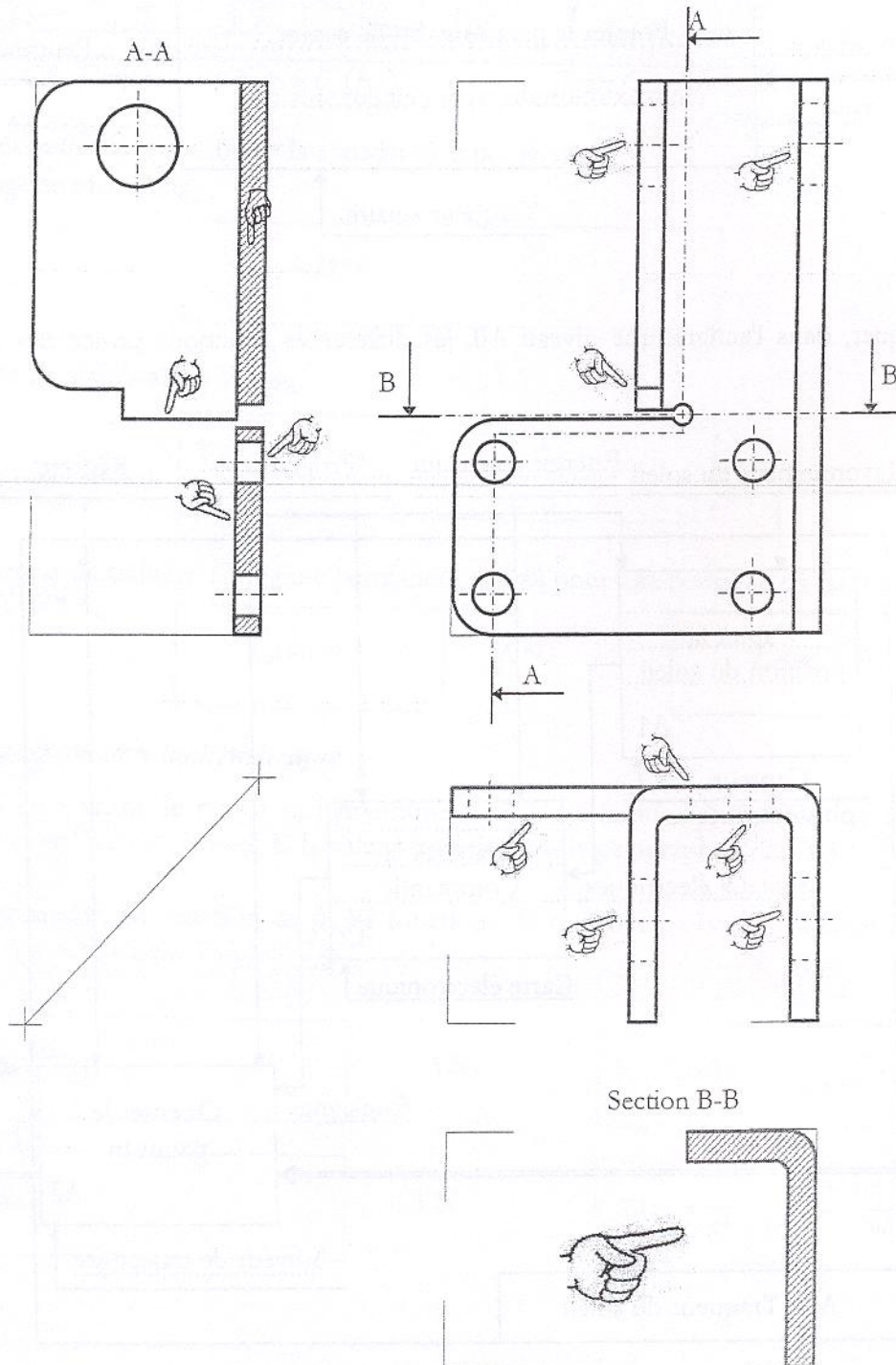
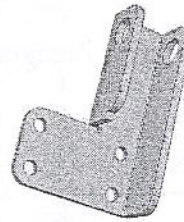
A.1.2- Indiquer, dans l'actigramme niveau A0, les différentes fonctions principales du traqueur solaire.



A.2- ETUDE GRAPHIQUE

On donne le dessin en perspective de la chape du vérin en acier. Compléter le dessin de définition de cette pièce par :

- La vue de face ;
- La vue de dessus ;
- La vue de droite en coupe A-A ;
- La section sortie B-B.

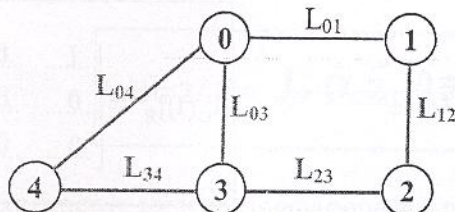


PARTIE B : MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

B.1- ETUDE DES CHAINES CINEMATiques

B.1.1- Compléter le graphe et identifier les liaisons du mécanisme.

Graphe de liaisons



identification des liaisons

L_{01} : Liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$

L_{12} : Liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$

L_{23} : Liaison pivot d'axe $(B, \vec{x}_0)$

L_{03} : Liaison glissière d'axe $(C, \vec{y}_0)$

L_{34} : Liaison hélicoïdale d'axe $(E, \vec{y}_0)$

L_{04} : Liaison pivot d'axe $(H, \vec{y}_0)$

B.1.2- Ecrire l'équation vectorielle ① traduisant la condition géométrique de fermeture de la chaîne cinématique (01230) :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \quad \text{①}$$

B.1.3- La dérivée temporelle de l'équation ① par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ s'écrit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} \quad \text{②}$$

B.1.4- En déduire le système d'équations cinématiques correspondant à la projection de l'équation ② sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + L \dot{\alpha} \sin \alpha + a \dot{\beta} \sin \beta = 0 & \text{③} \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha - a \dot{\beta} \cos \beta = 0 & \text{④} \end{cases}$$

B.2- GEOMETRIE DES MASSES

Dans cette partie, on se propose de déterminer la position du centre d'inertie et la matrice d'inertie du panneau (1). Illustré par la figure B.6, il est modélisé dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ par une plaque rectangulaire, homogène, d'épaisseur négligeable, de masse « m », de longueur « L » et de largeur « 2h ».

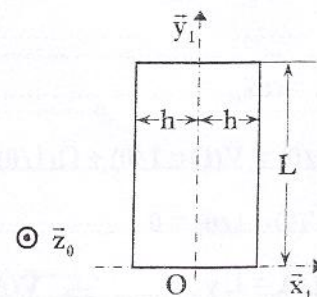


Figure B.6 : Modèle du panneau (1) dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

B.2.1- Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_1$, le vecteur position $\overline{OG_1}$ du centre d'inertie G_1 du panneau (1).

$$\overline{OG_1} = \frac{L}{2} \vec{y}_1$$

B.2.2- Le moment d'inertie du panneau (1) par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_1)$ sera désigné par la lettre « I » : $I = I_{/(O, \vec{x}_1)}(1)$. Donner et justifier la forme générale de la matrice d'inertie, au point O dans la base $\mathcal{B}_1$, du panneau (1).

Les plans $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ sont les

deux plans de symétrie matérielle $\Rightarrow D \equiv E \equiv F \equiv 0$

En plus : $A \equiv I_{/(O, \vec{x}_1)}(1) \equiv I$

$$[I_O(1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

B.2.3- Le panneau (1) est-il statiquement et dynamiquement équilibré par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$? Justifier votre réponse.

Le panneau (1) est dynamiquement équilibré ssi :

* (1) est statiquement équilibré c.à.d. que G_1 appartient à l'axe de rotation $(O, \vec{x}_0)$

* L'axe $(O, \vec{x}_0)$ est un axe principal d'inertie

Or : $G_1 \notin (O, \vec{x}_0) \Rightarrow (1)$ n'est ni statiquement ni dynamiquement équilibré

en fonction de m et L

B.2.4- Déterminer le moment d'inertie « I » du panneau (1) en fonction de m, L et h.

$$I \equiv \int_{(1)} (y^2 + z^2) dm \equiv \int_{(1)} y^2 dm$$

$$dm \equiv \frac{m}{2hL} dx dy, x \in [-h, h] \text{ et } y \in [0, L]$$

$$I \equiv \frac{m}{2hL} \int_{-h}^h dx \int_0^L y^2 dy \equiv \frac{m L^2}{3}$$

$$I = \frac{m L^2}{3}$$

B.3- ETUDE CINEMATIQUE

B.3.1- Déterminer le torseur cinématique, au point A, du panneau (1) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$* \vec{\Omega}(1/0) \equiv \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$* \vec{V}(A \in 1/0) \equiv \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{OA}$$

$$\vec{V}(O \in 1/0) \equiv \vec{0}$$

$$\overline{OA} = L \vec{y}_1 \Rightarrow \vec{V}(A \in 1/0) \equiv L \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}(1/0) \equiv \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\left\{ \mathcal{V}(1/0) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{x}_0 \\ L \dot{\alpha} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$$

B.3.2- En déduire le vecteur vitesse du point B de la bielle (2) dans son mouvement par rapport au support (0) : $\vec{V}(B \in 2/0)$.

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overline{AB} \quad \text{Or: } \vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{V}(A \in 1/0)$$

$$\vec{V}(A \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$\overline{AB} = a \vec{y}_2 \Rightarrow \vec{V}(B \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 - a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\beta} \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 - a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

B.3.3- Exprimer le torseur cinématique, au point E, de la tige (3) dans son mouvement par rapport à la vis (4) en fonction de $\dot{\theta}$ et du pas réduit de l'hélice « p » (en mm/rad).

$$* \vec{V}(E \in 3/4) = p \vec{\Omega}(3/4)$$

$$* \vec{\Omega}(3/4) = \vec{\Omega}(3/0) - \vec{\Omega}(4/0)$$

$$\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(4/0) = \dot{\theta} \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{\Omega}(3/4) = -\dot{\theta} \vec{y}_0$$

$$\{v^{(3/4)}\}_E = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \vec{y}_0 \\ -p \dot{\theta} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_E$$

B.3.4- Déterminer le vecteur vitesse du point E de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0) : $\vec{V}(E \in 3/0)$.

$$\vec{V}(E \in 3/0) = \left(\frac{d\overline{OE}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overline{OC}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overline{CB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overline{BE}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}$$

$$\left(\frac{d\overline{OC}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overline{BE}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\overline{CB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

$$\vec{V}(E \in 3/0) = \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

B.3.5- En déduire une relation entre les paramètres $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.

$$\vec{\Omega}(4/0) = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(4/0) \wedge \overline{HE} = \vec{0} \text{ car colinéaires} \Rightarrow \vec{V}(E \in 4/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(E \in 3/4) = -p \dot{\theta} \vec{y}_0 = \vec{V}(E \in 3/0) - \vec{V}(E \in 4/0) = \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

$$\dot{\lambda} = -p \dot{\theta}$$

B.3.6- Déterminer le vecteur vitesse du point B de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0): $\vec{V}(B \in 3/0)$ en fonction du paramètre $\dot{\lambda}$.

$\vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(E \in 3/0)$ Car la tige (3) est en translation par rapport au support (0)

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

B.3.7- Ecrire la condition cinématique au centre B de la liaison pivot entre la bielle (2) et la tige (3) :

$$\vec{V}(B \in 3/2) = \vec{V}(B \in 3/0) - \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{0}$$

Déduire, par projection dans la base $\mathcal{B}_0$, le système d'équations qui en découlent.

$$\vec{V}(B \in 3/0) - \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(B \in 2/0)$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} \vec{y}_0 = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 + a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = -\sin \alpha \vec{y}_0 + \cos \alpha \vec{z}_0 \\ \vec{z}_2 = \sin \beta \vec{y}_0 + \cos \beta \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = -\sin \alpha \vec{y}_0 + \cos \alpha \vec{z}_0 \\ \vec{z}_2 = \sin \beta \vec{y}_0 + \cos \beta \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + L \dot{\alpha} \sin \alpha + a \dot{\beta} \sin \beta = 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha - a \dot{\beta} \cos \beta = 0 \end{cases}$$

B.4- ETUDE CINEMATIQUE

B.4.1- Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique au point O du panneau (1) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$* \vec{R}_O(1/0) = \vec{P}(1/0) = m \vec{V}(G_1/0) = \frac{m L \dot{\alpha}}{2} \vec{z}_1$$

$$* \vec{\sigma}_O(1/0) = [I_O(1)] \cdot \vec{\Omega}(1/0) = I \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\{\mathcal{E}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & I \dot{\alpha} \\ -(m L \dot{\alpha} / 2) \sin \alpha & 0 \\ (m L \dot{\alpha} / 2) \cos \alpha & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$* \vec{R}_O(1/0) = m \vec{\gamma}(G_1/0) = \frac{m L}{2} (\ddot{\alpha} \vec{z}_1 - \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1)$$

$$* \vec{\delta}_O(1/0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_O(1/0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} = I \ddot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\{\mathcal{D}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & I \ddot{\alpha} \\ -\frac{m L}{2} (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) & 0 \\ \frac{m L}{2} (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

B.4.2- Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique au point B de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$* \bar{R}_e(3/0) = \bar{P}(3/0) = M \bar{V}(G_3/0) = M \dot{\lambda} \bar{y}_e$$

$$* \bar{\sigma}_B(3/0) = \bar{0}$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$* \bar{R}_d(3/0) = M \bar{\gamma}(G_3/0) = M \ddot{\lambda} \bar{y}_e$$

$$* \bar{\delta}_B(3/0) = \left(\frac{d\bar{\sigma}_B(3/0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + M \bar{V}(B/0) \wedge \bar{V}(G_3/0) = \bar{0}$$

$$\{\mathcal{D}(3/0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M \ddot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{Car } \bar{V}(B/0) \text{ et } \bar{V}(G_3/0) \text{ sont colinéaires}$$

B.4.3- En déduire le torseur dynamique au point O du système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au support (0).

$$* \bar{R}_d(S/0) = m \bar{\gamma}(G_1/0) + M \bar{\gamma}(G_3/0) = \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \bar{z}_1 - \dot{\alpha}^2 \bar{y}_1) + M \ddot{\lambda} \bar{y}_e = f_1 \bar{y}_e + f_2 \bar{z}_e$$

$$f_1 = M \ddot{\lambda} - \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)$$

$$* \bar{\delta}_O(3/0) = \bar{\delta}_B(3/0) + M \overline{OB} \wedge \bar{\gamma}(G_3/0) = \bar{0}$$

$$* \bar{\delta}_O(S/0) = \bar{\delta}_O(1/0) + \bar{\delta}_O(3/0) = I \ddot{\alpha} \bar{x}_e$$

$$\{\mathcal{D}(S/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & I \ddot{\alpha} \\ f_1 & 0 \\ f_2 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

B.4.4- Déterminer l'énergie cinétique $E_c(S/0)$ du système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au support (0).

$$E_c(S/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0) + E_c(4/0)$$

$$* E_c(2/0) = E_c(4/0) = 0 \text{ car les deux solides sont de masses négligeables.}$$

$$* E_c(1/0) = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}(1/0)\}_O \cdot \{\mathcal{V}(1/0)\}_O = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2$$

$$* E_c(3/0) = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}(3/0)\}_B \cdot \{\mathcal{V}(1/0)\}_B = \frac{1}{2} M \dot{\lambda}^2$$

$$E_c(S/0) = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\lambda}^2$$

B.5- MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES

B.5.1- Montrer que le torseur correspondant à l'action du vent sur le panneau (1) s'écrit, au point O,

sous la forme : $\{\tau(\text{vent} \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & M_0 \\ F_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$.

En déduire les composantes F_0 et M_0 en fonction de q , L et α .

$$\{\tau(\text{vent} \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) \\ \bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) \end{Bmatrix}_O$$

$$* \bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell \quad \text{et} \quad * \bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \overline{OM} \wedge \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell$$

Où : M un point quelconque du panneau (1) tel que : $\overline{OM} = y \cdot \bar{y}_0$, $d\ell = dy$ et $\bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) = q \cdot \bar{y}_0$

$$* \bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell = \int_0^L (q \cdot \bar{y}_0) dy = q \cdot L \cdot \bar{y}_0$$

$$* \bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \overline{OM} \wedge \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell = -q \sin \alpha \left(\int_0^L y \cdot dy \right) \bar{x}_0 = -\frac{q L^2}{2} \sin \alpha \bar{x}_0$$

$$F_0 = q \cdot L$$

$$M_0 = -\frac{q L^2}{2} \sin \alpha$$

B.5.2- La liaison entre (0) et (3) au point C est une liaison avec frottement de glissement de coefficient « f ». Enoncer la première loi de Coulomb en cas de glissement.

$$\begin{cases} \bar{T}(0 \rightarrow 3) \wedge \bar{V}(C \in 3/0) = \vec{0} \\ \bar{T}(0 \rightarrow 3) \cdot \bar{V}(C \in 3/0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{La composante tangentielle et la vitesse de glissement} \dots$$

$$\dots \text{ sont colinéaires et de sens opposé.}$$

$$\text{En plus : } \|\bar{T}(0 \rightarrow 3)\| = f \|\bar{N}(0 \rightarrow 3)\| \quad f \text{ est le coefficient de frottement de glissement}$$

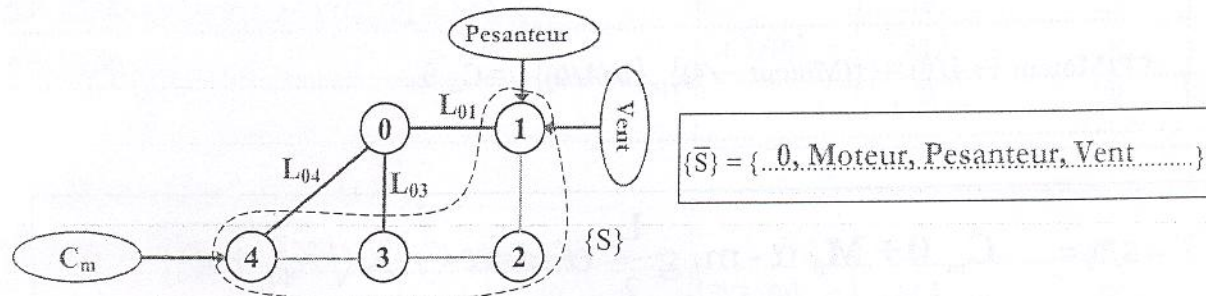
$$\bar{V}(C \in 3/0) = \dot{\lambda} \cdot \bar{y}_0 \quad \text{Si la liaison glissière est parfaite } \bar{R}(0 \rightarrow 3) = \bar{N}(0 \rightarrow 3) = X_{03} \cdot \bar{x}_0 + Z_{03} \cdot \bar{z}_0$$

$$\text{Alors : } \bar{T}(0 \rightarrow 3) = f \cdot \|\bar{N}(0 \rightarrow 3)\| \cdot \bar{y}_0 = f \cdot \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} \cdot \bar{y}_0$$

En déduire le torseur : $\{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C$.

$$\{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ -f \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix}_C$$

B.5.3- Compléter le graphe d'interaction et faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Ecrire, au point O et dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\} : \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O$.



$$*\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O = \{\tau(0 \rightarrow S)\}_O + \{\tau(\bar{P}_1 \rightarrow 1)\}_O + \{\tau(\text{Vent} \rightarrow 1)\}_O + \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 4)\}_O$$

$$\{\tau(\text{Vent} \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & M_0 \\ F_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0} \quad \{\tau(\bar{P}_1 \rightarrow 1)\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{G_1}^{\mathcal{B}_0} \quad \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 4)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\tau(0 \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0} \quad \{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}_0} \quad \{\tau(0 \rightarrow 4)\}_H = \begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{Bmatrix}_H^{\mathcal{B}_0}$$

$$*\bar{M}_O(0 \rightarrow 3) = \bar{M}_C(0 \rightarrow 3) + \overline{OC} \wedge \bar{R}(0 \rightarrow 3)$$

$$*\bar{M}_O(\bar{P}_1 \rightarrow 1) = \overline{OG_1} \wedge \bar{P}_1$$

$$*\bar{M}_O(0 \rightarrow 4) = \bar{M}_H(0 \rightarrow 4) + \overline{OH} \wedge \bar{R}(0 \rightarrow 4)$$

On pose : $\overline{OC} = b_1 \vec{y}_0$ et $\overline{OH} = b_2 \vec{y}_0$

$$\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{01} + X_{04} & L_{03} + L_{04} + M_{01} + b_1 Z_{02} + b_2 Z_{02} - \frac{mgl}{2} \cos \alpha \\ Y_{01} + Y_{02} + Y_{03} + F_0 - f \sqrt{X_{02}^2 + Z_{02}^2} & M_{01} + M_{03} + C_m \\ Z_{01} + Z_{03} + Z_{04} - mg & N_{01} + N_{03} + N_{04} - b_1 X_{04} \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0}$$

B.6- EQUATIONS DYNAMIQUES

B.6.1- Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures exercées sur le système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au support (0).

$$*P(\bar{S} \rightarrow S/0) = P(0 \rightarrow S/0) + P(\bar{P}_1 \rightarrow 1/0) + P(\text{Vent} \rightarrow 1/0) + P(\text{Moteur} \rightarrow 4/0)$$

$$*P(0 \rightarrow S/0) = P(0 \rightarrow 1/0) + P(0 \rightarrow 4/0) = 0$$

En effet : $P(0 \rightarrow 1/0) = P(0 \leftrightarrow 1) - \overline{P(1 \rightarrow 0/0)} = 0$ car la liaison L_{01} est parfaite.

$P(0 \rightarrow 4/0) = P(0 \leftrightarrow 4) - \overline{P(4 \rightarrow 0/0)} = 0$ car la liaison L_{04} est parfaite.

$$*P(0 \rightarrow 3/0) = \{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C \cdot \{v(3/0)\}_C = -f \dot{\lambda} \sqrt{X_{02}^2 + Z_{02}^2}$$

$$* P(\bar{P}_1 \rightarrow 1/0) = \{\tau(\bar{P}_1 \rightarrow 1)\}_{\bar{O}} \cdot \{\dot{\lambda}(1/0)\}_{\bar{O}} = -m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha$$

$$* P(\text{Vent} \rightarrow 1/0) = \{\tau(\text{Vent} \rightarrow 1)\}_{\bar{O}} \cdot \{\dot{\lambda}(1/0)\}_{\bar{O}} = M_0 \dot{\alpha}$$

$$* P(\text{Moteur} \rightarrow 4/0) = \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 4)\}_{\bar{H}} \cdot \{\dot{\lambda}(4/0)\}_{\bar{H}} = C_m \dot{\theta}$$

$$P(\bar{S} \rightarrow S/0) = C_m \dot{\theta} + M_0 \dot{\alpha} - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \dot{\lambda} \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

B.6.2- Ecrire l'équation qui découle de l'application du théorème de l'énergie cinétique au système $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au support (0).

$$\text{T.E.C. : } \frac{dE(S/0)}{dt} = P(\bar{S} \rightarrow S/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

$$* \mathcal{P}_{\text{int}} = P(1 \leftrightarrow 2) + P(2 \leftrightarrow 3) + P(3 \leftrightarrow 4) = 0 \text{ car les liaisons } L_{12}, L_{23} \text{ et } L_{34} \text{ sont parfaites.}$$

$$I \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \dot{\lambda} \ddot{\lambda} = C_m \dot{\theta} + M_0 \dot{\alpha} - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \dot{\lambda} \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

B.6.3- En déduire l'expression du couple moteur C_m en fonction de F_0 et les paramètres cinématiques.

$$\dot{\lambda} = -p \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-\dot{\lambda}}{p} \quad M_0 = \frac{-q L^2}{2} \sin \alpha; F_0 = q L \Rightarrow M_0 = \frac{-F_0 L}{2} \sin \alpha$$

$$I \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \dot{\lambda} \ddot{\lambda} = \frac{-\dot{\lambda} C_m}{p} - \frac{F_0 L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \dot{\lambda} \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

$$C_m = -\frac{p}{\dot{\lambda}} \left(I \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + \frac{F_0 L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha + f \dot{\lambda} \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} \right)$$

PARTIE C : AUTOMATIQUE

C.1- DISPOSITIF D’AFFICHAGE DE LA POSITION D’UN HELIOSTAT

C.1.1- Principe du décodeur optique

C.1.1.1- Etablir la table de vérité (Tableau.1) décrivant le fonctionnement de ce codeur optique.

C.1.1.2- Quelles sont les propriétés de ce code ?

C'est un code binaire réfléchi ou cyclique ou de Gray sans position d'arrêt.

C.1.2- Décodeur

C.1.2.1- Etablir la table de vérité (Tableau.2) décrivant l'état des LED (a, b, c, d, e, f et g) en fonction de (x_3, x_2, x_1, x_0).

Position	Code				Etats des LED de l'afficheur						
	x_3	x_2	x_1	x_0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
3	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1

Tableau 1: Table de vérité du codeur optique.

Tableau 2: Table de vérité de l'afficheur.

C.1.2.2- Déterminer les équations simplifiées des LED (a, b, c, d, e, f et g) à l'aide de minimum des portes.

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	x_3x_2				
	00	01	11	10	
00	0	0	1	0	a
01	0	1	1	0	
11	0	1	1	0	
10	1	0	1	1	
$a = \overline{x_2} + x_3 + x_0$					

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	x_3x_2				
	00	01	11	10	
00	0	1	0	0	b
01	0	1	0	0	
11	0	1	1	0	
10	1	1	1	1	
$b = \overline{x_3} + x_1$					

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
01	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
11	$\emptyset$	0	1	$\emptyset$
10	1	1	1	1

$$c = x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$$

c

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\emptyset$	0	1	$\emptyset$
01	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
11	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$
10	1	0	1	1

$$d = \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_1} + (x_3 \oplus x_0)$$

d

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\emptyset$	0	0	$\emptyset$
01	$\emptyset$	0	1	$\emptyset$
11	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$
10	1	0	1	0

$$e = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_0 \cdot (x_3 \oplus x_1)$$

e

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
01	$\emptyset$	0	1	$\emptyset$
11	$\emptyset$	0	0	$\emptyset$
10	1	0	1	1

$$f = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_3 \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_0})$$

f

ou

$$f = \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_0} + \overline{x_1} \cdot (x_3 + \overline{x_0})$$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
01	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$
11	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$
10	0	0	1	1

$$g = \overline{x_1} + (x_3 \oplus x_0)$$

g

C.2- ASSERVISSEMENT DE POSITION DE LA MONTURE D'UN HELIOSTAT**C.2.1- Modélisation du moteur**

C.2.1.1- Déterminer l'expression de la fonction de transfert du moteur $M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$, la mettre

sous forme canonique : $M(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$.

$$U(p) = R I(p) + E(p) \quad (1)$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p) \quad (2)$$

$$C_m(p) = K_c I(p) \quad (3)$$

$$J p \Omega_m(p) = C_m(p) \quad (4)$$

$$M(p) = \frac{K_c}{K_c K_e + R J p} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_c K_e} p}$$

C.2.1.2- En déduire les expressions puis les valeurs de K_m et de τ_m .

$$K_m = \frac{1}{K_e}$$

$$\tau_m = \frac{R J}{K_c K_e}$$

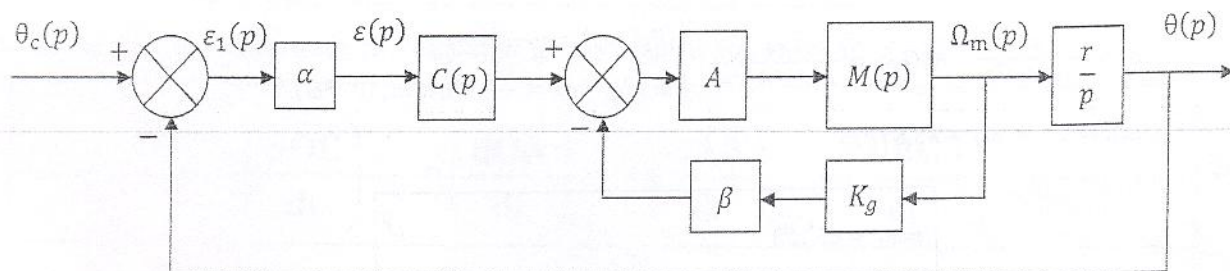
A.N :

$$K_m = 50$$

$$\tau_m = 10^{-2} s$$

C.2.2- Asservissement de position de la monture de l'héliostat

C.2.2.1- Transformer le schéma fonctionnel de la figure C.4 sous forme d'un système à retour unitaire.

**C.2.2.2- Sans correction tachymétrique**

Dans un premier temps, on fixe $\beta = 0$ ce qui revient à supprimer la correction par retour tachymétrique. On fixe $A = 1$.

Le correcteur proportionnel : $C(p) = K$ avec $K > 0$.

C.2.2.2.1- Déterminer, en fonction de K , la fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée notées respectivement $H_o(p)$ et $H_f(p)$.

$$H_o(p) = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K \cdot M(p)}{p} = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K \cdot K_m}{p(1 + \tau_m p)}$$

A.N.

$$H_o(p) = \frac{0,1K}{p(1 + 10^{-2}p)}$$

$$H_f(p) = \frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)}$$

A.N.

$$H_f(p) = \frac{10K}{p^2 + 100p + 10K}$$

C.2.2.2.2- Exprimer, en fonction de K, le gain statique (K_s), le facteur d'amortissement (m) et la pulsation propre (ω_0) du système en boucle fermée.

$$H_f(p) = \frac{K_s \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_s \omega_0^2 = 10K \\ 2m\omega_0 = 100 \\ \omega_0^2 = 10K \end{cases}$$

$$K_s = 1$$

$$m = \frac{50}{\sqrt{10K}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{10K}$$

C.2.2.2.3- Calculer la valeur de K garantissant une réponse indicielle en boucle fermée caractérisée par un facteur d'amortissement $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$K = 500$$

C.2.2.2.4- Pour cette valeur de K, Déterminer :

- La marge de phase $m\varphi_1$;

$$\begin{cases} |H_o(j\omega)| = 1 \\ m\varphi_1 = \pi + \arg H_o(j\omega_u) \end{cases} \Rightarrow \omega_u = ?$$

$$H_o(p) = \frac{50}{p(1+10^{-2}p)}, \quad H_o(j\omega) = \frac{50}{j\omega(1+j10^{-2}\omega)}, \quad \begin{cases} |H_o(j\omega)| = \frac{50}{\omega\sqrt{1+10^{-4}\omega^2}} \\ \arg H_o(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(10^{-2}\omega) \end{cases}$$

$$|H_o(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega_u = 45,5 \text{ rad/s}$$

$$m\varphi_1 = 65^\circ, 53$$

- Le temps de stabilisation approximatif $T_{s1\pm 5\%}$;

$$T_{s1} \approx \frac{3}{m\omega_0} \text{ et } \omega_0 = 70,71 \text{ rad/s}$$

$$T_{s1\pm 5\%} \approx 0,06 \text{ s}$$

- L'erreur de traînage en régime permanent $\varepsilon_{v1}(\infty)$ pour une consigne en rampe unitaire.

$$\begin{cases} H_o(p) \text{ est de classe 1} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{v1}(\infty) = \frac{\alpha}{0,1K} \quad \text{A.N.} \quad \varepsilon_{v1}(\infty) = 0,2\%$$

Le correcteur est maintenant du type proportionnel intégral : $C(p) = K_0(1 + \frac{1}{\tau_i p})$.

C.2.2.2.5- Déterminer, en fonction de K_0 et τ_i , la fonction de transfert en boucle ouverte notée $G_o(p)$.

$$C(p) = K_0 \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right),$$

$$G_o(p) = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot C(p) \cdot M(p)}{p} = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 (1 + \tau_i p)}{\tau_i p^2 (1 + \tau_m p)} \quad \text{A.N.}$$

$$G_o(p) = \frac{0,1 K_0 (1 + \tau_i p)}{\tau_i p^2 (1 + 10^{-2} p)}$$

C.2.2.2.6- En utilisant le critère de Routh, étudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de K_0 et τ_i .

L'équation caractéristique en boucle fermée : $\tau_i \tau_m p^3 + \tau_i p^2 + \alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 \tau_i p + \alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 = 0$

1^{ère} condition : Tous les a_i doivent être présents et de même signe $\Rightarrow \tau_i > 0$ et $K_0 > 0$

2^{ème} condition : Tous les termes de la 1^{ère} colonne de la table de Routh doivent être présents et de même signe.

Table de Routh :

p^3	$\tau_i \tau_m$	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 \tau_i$
p^2	τ_i	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0$
p^1	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 (\tau_i - \tau_m)$	
p^0	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0$	

$$K_0 > 0$$

$$\tau_i > \tau_m$$

A.N.

$$\tau_i > 10^{-2} s$$

C.2.2.2.7- Pour $K_0 = 500$ et $\tau_i = 0.1s$, on obtient les diagrammes de Bode (Figure C.5) de $G_0(j\omega)$ et la réponse indicielle unitaire (Figure C.6) du système en boucle fermée notée $G_f(p)$.

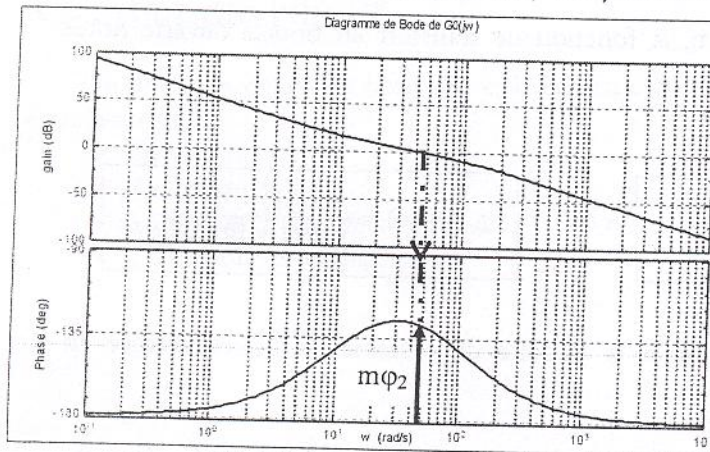


Figure C.5 : Diagrammes de Bode de $G_0(j\omega)$.

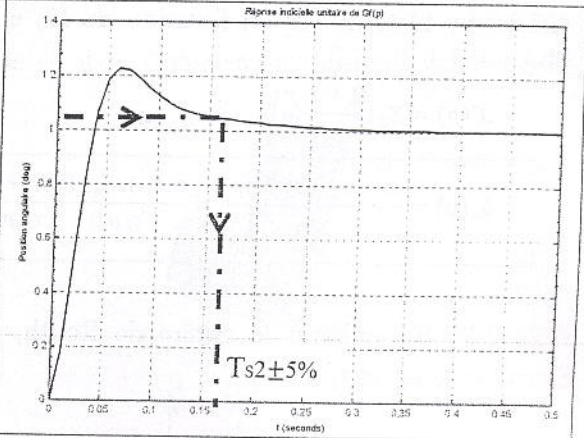


Figure C.6 : Réponse indicielle du système en boucle fermée de $G_f(p)$.

➤ Déterminer graphiquement (faire la construction nécessaire) :

- La marge de phase $m\phi_2$;

$$m\phi_2 \approx 52^\circ,9$$

- Le temps de stabilisation $T_{s2\pm5\%}$;

$$T_{s2\pm5\%} \approx 0.16 \text{ s}$$

➤ Calculer l'erreur de traînage en régime permanent $\varepsilon_{v2}(\infty)$ pour une consigne en rampe unitaire.

$$\begin{cases} G_0(p) \text{ est de classe 2} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{v2}(\infty) = 0$$

A.N.

$$\varepsilon_{v2}(\infty) = 0$$

C.2.2.3- Avec correction tachymétrique

On prend en compte le retour tachymétrique $\beta \neq 0$, on impose $A = 10$ et on considère un correcteur proportionnel : $C(p) = K$ avec K la valeur trouvée dans le paragraphe C.2.2.2.3.

C.2.2.3.1- Déterminer, en fonction de β , les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée notées respectivement $T_0(p)$ et $T_f(p)$.

$$T_0(p) = \frac{\alpha \tau A K K_m}{p(1 + \beta A K_g K_m + \tau_m p)}$$

A.N.

$$T_0(p) = \frac{500}{p(1 + 50\beta + 10^{-2}p)}$$

$$T_f(p) = \frac{T_0(p)}{1 + T_0(p)}$$

A.N.

$$T_f(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p^2 + 100(1 + 50\beta)p + 5 \cdot 10^4}$$

C.2.2.3.2- Montrer qu'il est possible de déterminer le gain β de façon que la réponse indicielle en boucle fermée soit caractérisée par un facteur d'amortissement $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$T_f(p) = \frac{K_s \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} K_s \omega_0^2 = 5 \cdot 10^4 \\ 2m\omega_0 = 100 (1 + 50\beta) \\ \omega_0^2 = 5 \cdot 10^4 \end{cases} \quad \omega_0 = 223,61 \text{ rd/s}$$

$$\beta = 0.043$$

Pour cette valeur de β , on donne sur la figure C.7 les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte $T_0(j\omega)$.

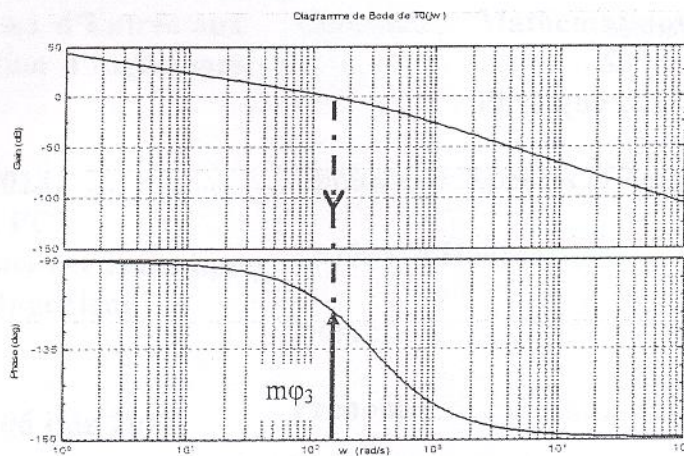


Figure C.7 : Diagrammes de Bode de $T_0(j\omega)$.

C.2.2.3.3- Déterminer, graphiquement, la marge de phase $m\phi_3$ (faire la construction nécessaire).

$$m\phi_3 = 65^\circ,2$$

C.2.2.3.4- Calculer :

- Le temps de stabilisation approximatif $T_{s3\pm 5\%}$;

$$T_{s3} \approx \frac{3}{m\omega_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 223.61 \text{ rd/s}$$

$$T_{s3\pm 5\%} \approx 0,02s$$

- l'erreur de traînage en régime permanent $\varepsilon_{v3}(\infty)$ pour une consigne en rampe unitaire.

$$\begin{cases} T_0(p) \text{ est de classe 1} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{v3}(\infty) = \frac{\alpha(1+50\beta)}{500}$$

A.N.

$$\varepsilon_{v3}(\infty) = 0,06\%$$

C.2.2.4- Conclure quant aux performances assurées par les deux configurations sans et avec retour tachymétrique.

Performances	Critère	$\beta = 0$		$\beta \neq 0$
		P	P.I.	P
Stabilité	$m\varphi$	65°,53	52°,9	65°,2
Précision	$\varepsilon_v(\infty)$ en %	0,2	0	0,06
Rapidité	$T_s \pm 5\%$ en s	0,06	0,16	0,02

La correction tachymétrique a un effet stabilisant tout en améliorant la précision et la rapidité du système en boucle fermée.