



Concours Mathématiques et Physique  
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 11 Juin 2015      Heure : 8 H      Durée : 4 H      Nb pages : 9  
Barème : Problème 1 : 13 pts      Problème 2 : 7 pts

Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

Une présentation claire et soignée des copies est vivement recommandée. Une numérotation claire et précise des réponses aux questions est indispensable. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

**Données utiles :**  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) - \Delta \vec{u}$  ;  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\langle \vec{E} \wedge \vec{B}^* \rangle}{\mu_0} \right]$$

**Problème 1 : Ondes électromagnétiques et interférences lumineuses**

Le problème est composé de deux parties : la première partie traite des ondes électromagnétiques dans le vide et du critère de cohérence temporelle des sources lumineuses pour obtenir le phénomène d'interférence, alors que la deuxième partie traite de l'interféromètre de Michelson et quelques unes de ses applications : Détermination de l'indice de réfraction d'une lame de verre - Etude de l'effet d'un défaut de planéité sur la figure d'interférence.

Pour tout le problème, on se place dans les conditions de l'approximation de Gauss et l'indice de réfraction de l'air sera pris égal à 1.

**I-Ondes électromagnétiques dans le vide : Passage du modèle vectoriel de la lumière au modèle scalaire et critère de cohérence temporelle.**

1. Rappeler les équations locales de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants. En déduire les équations de propagation vérifiées par les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ .

2. Qu'appelle-t-on onde plane ?

3. Soit, dans le vide, une onde électromagnétique plane de pulsation  $\omega_1$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ , dont le champ électrique, en notation complexe, en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), s'écrit:

$$\vec{E}_1(M,t) = E_{01} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$$

$E_{01}$  est une constante positive .

3-a. Caractériser cette onde.

3-b. Déterminer son champ magnétique  $\vec{B}_1(M,t)$ .

3-c. Déterminer son vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}_1$ . En déduire sa valeur moyenne temporelle.

4-. Deux ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , polarisées rectilignement se propagent dans le vide dans la même direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{e}_u$  et dans le même sens. Les champs électriques des ondes (1) et (2) s'écrivent respectivement :  $\vec{E}_1(M,t) = E_{01} e^{i[\omega_1 t - \varphi_1(M,t)]} \vec{e}_1$ ,  $\vec{E}_2(M,t) = E_{02} e^{i[\omega_2 t - \varphi_2(M,t)]} \vec{e}_2$ ,

4-a. Montrer que la valeur moyenne temporelle  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  du vecteur de Poynting de l'onde résultante s'écrit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle + \frac{\vec{e}_u}{\mu_0 c} E_{01} E_{02} \langle \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi(M,t)] \rangle \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$$

$\varphi(M,T)$  est le déphasage entre les deux ondes (1) et (2).

4-b. A quelles conditions a-t-on  $\langle \vec{\Pi} \rangle \neq \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle$  ? De quel phénomène s'agit-il ?

4-c. Dans le cas où les directions de polarisation des deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont voisines, on peut utiliser l'approximation du modèle scalaire de la lumière en remplaçant ces champs par des vibrations scalaires. En déduire de la question précédente que l'intensité  $I(M)$  (qui n'est autre que le module de la valeur moyenne du vecteur de Poynting) due à l'interférence des deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  d'intensités  $I_1$  et  $I_2$ , provenant d'une source primaire  $S$  ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  s'écrit :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)$$

$\delta(M)$  est la différence de marche en un point  $M$  du champ d'interférence. Quel est l'intérêt de choisir deux sources telles que  $I_1 = I_2$  ? Justifier.

5. Un paquet d'onde ou train d'onde est un ensemble d'ondes monochromatiques qui s'étale sur un domaine de fréquence  $\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$ . Ce paquet d'onde possède une durée  $\tau$



appelé temps de cohérence et une longueur de cohérence  $L_c = c \tau = \frac{c}{\Delta\nu}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

**5-a** Quelle est la longueur de cohérence d'une onde monochromatique ?

**5-b.** Compléter le tableau ci-dessous où sont consignés les temps de cohérence de certaines sources. Parmi ces sources quelle est celle qui se rapproche le mieux d'une source monochromatique ? On donne :  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

| Source          | $\tau(s)$    | $L_c(m)$ | $\Delta\nu(Hz)$ |
|-----------------|--------------|----------|-----------------|
| Lampe Hg        | $10^{-9}$    |          |                 |
| Laser He-Ne     | $10^{-4}$    |          |                 |
| Lumière blanche | $3.10^{-15}$ |          |                 |

**5-c.** Quelle condition doit satisfaire la différence de marche  $\delta$ , comparée à  $L_c$ , pour qu'il y ait interférence constructive? Justifier votre réponse.

## II- Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice et de deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  parfaitement plans, perpendiculaires entre eux et faisant un angle de  $45^\circ$  avec la séparatrice.

Pour tout le reste du problème, on notera  $I_0$  l'intensité de chacune des deux ondes qui interfèrent en un point du champ d'interférence.

Pour les deux parties II-1 et II-2 suivantes, on ne tiendra pas compte du déphasage supplémentaire  $\varphi_s = \pi$  introduit par la séparatrice.

### II-1. Eclairage de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air par une source étendue

L'interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air, est éclairé à l'aide d'une source étendue placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente  $L_1$  de distance focale  $f_1'$ . On assimile la source à un disque lumineux de diamètre  $d$ . Cette source est supposée monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ . On observe à l'aide d'une deuxième lentille convergente  $L_2$  de distance focale  $f_2'$ , une figure d'interférence sur un écran d'observation placé dans le plan focal image de cette lentille (**Fig.1**). Le miroir  $M_1$  peut effectuer un mouvement de translation suivant la direction Ox, alors que le miroir  $M_2$  reste fixe.

Partant de la situation initiale où le miroir  $M_2$  est confondu avec  $M_1'$  image de  $M_1$  par la séparatrice, ce dernier subit une translation de longueur  $e$  le long de l'axe Ox dans le sens positif tel que :  $OO_1 = OO_2 + e$ .

**6.** Représenter le schéma équivalent du montage en lame d'air en faisant apparaître son épaisseur  $e$  et en précisant les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ .

7. Déterminer la différence de marche  $\delta(i)$  en fonction de  $e$  et de l'angle d'incidence  $i$ . Quelle est la forme des franges ? Sont-elles localisées ou délocalisées ?

8. Dans le cas d'une source ponctuelle est-il indispensable de placer l'écran dans le plan focal image de  $L_2$  ? Justifier. Quel lien existe-t-il entre la taille de la source et la localisation des franges ? On donnera une explication qualitative.

9. On choisit pour les lentilles convergentes  $L_1$  et  $L_2$  respectivement les distances focales.  $f'_1 = 10 \text{ cm}$  et  $f'_2 = 100 \text{ cm}$ . Justifier un tel choix.

10. Etablir, l'expression de l'ordre d'interférence  $p(r)$  à la distance  $r$  du centre de la figure d'interférence (Fig. 1).

11. Pour  $e = 0,5 \text{ mm}$ , la courbe donnant l'évolution de l'ordre d'interférence  $p$  en fonction de la distance  $r$ , est donnée par la figure 2.

Déterminer l'ordre d'interférence  $p_0$  au centre de la figure d'interférence. Conclure. En déduire la valeur de la longueur d'onde  $\lambda_0$ . A quelle couleur correspond cette longueur d'onde ?

12. Déterminer les rayons  $r_1$  et  $r_2$  des deux premiers anneaux sombres. Quel est le nombre total d'anneaux sombres observés sur l'écran ?

13. Etablir l'expression du rayon  $r_k$  correspondant au  $k$ -ième anneau sombre.

14. Montrer que les rayons  $r_k$  des anneaux sombres sur l'écran sont tels que :

$$r_{k+1} - r_k = \frac{B}{r_{k+1} + r_k},$$

où  $B$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $f'_2$ ,  $\lambda_0$  et  $e$ .

15. Exprimer l'intensité  $I(r)$  en fonction du rayon  $r$  et des autres données du problème.

Tracer l'allure de la courbe  $\frac{I}{I_0}$  en fonction de  $r$ . Commenter.

16. On modifie le réglage de l'interféromètre en translatant doucement le miroir  $M_1$  mobile.

Qu'observe-t-on si on diminue l'épaisseur de la lame d'air équivalente ? Justifier votre réponse.

17. La taille de la source a-t-elle une influence sur le contraste des anneaux ? Justifier votre réponse.

18. Calculer le diamètre  $d$  de la source étendue  $S$ .

19. Qu'appelle-t-on contact optique ? Comment procéder pour régler l'interféromètre au contact optique ? Décrire l'aspect de l'écran dans cette position. Que se passe-t-il si l'on dépasse le contact optique en translatant le miroir  $M_1$  dans le sens des  $x$  négatifs ?



## II-2. Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air : Mesure de l'indice de réfraction d'une lame de verre

On considère l'interféromètre de Michelson réglé au contact optique. A partir de cette situation, on fait tourner le miroir  $M_1$  d'un angle  $\alpha$  très petit autour de son axe. On éclaire, sous incidence quasi-normale le système par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$  (raie verte du mercure) de telle sorte que l'on observe des franges rectilignes d'égale épaisseur localisées au niveau du coin d'air. La figure d'interférence est projetée sur un écran à l'aide d'une lentille convergente. On mesure sur l'écran un interfrange  $i_E = 4 \text{ mm}$ .

20. Comment doit-on procéder pour obtenir une incidence quasi-normale ?
21. Etablir l'expression de l'interfrange  $i$  au niveau du coin d'air en fonction de  $\lambda_0$  et  $\alpha$ . Calculer  $i$  et  $\alpha$  sachant que le grandissement de la lentille vaut  $|\gamma| = 4$ .
22. Combien observe-t-on de franges si les miroirs ont une largeur  $L = 2 \text{ cm}$  ?
23. On remplace la source monochromatique par une source de lumière blanche.
- 23-a. Décrire ce qu'on observe sur l'écran.
- 23-b. On place une petite lame de verre à faces parallèles (lame de microscope), d'épaisseur  $e_v = (160,0 \pm 0,5) \mu\text{m}$  devant  $M_1$ , parallèlement à celui-ci et d'indice de réfraction  $n$  supposé indépendant de la longueur d'onde. Expliquer pourquoi les franges disparaissent et sont remplacées par une teinte plate blanche (blanc d'ordre supérieur).
- 23-c. Justifier que les franges réapparaissent si on translate  $M_1$  d'une distance  $\ell$  convenable et dans un sens que l'on précisera. Exprimer l'indice  $n$  en fonction de  $\ell$  et  $e_v$ . Sachant que  $\ell = (82,5 \pm 0,3) \mu\text{m}$ , calculer au troisième chiffre après la virgule l'indice  $n$  et son incertitude absolue  $\Delta n$ .
- 23-d. Pourquoi a-t-on utilisé de la lumière blanche dans cette expérience au lieu de la source monochromatique utilisée précédemment ?

## II-3. Etude du défaut de planéité du miroir $M_1$ : Mesure du rayon de courbure d'un miroir sphérique

Le dispositif est un interféromètre de Michelson où le miroir  $M_1$  a été endommagé au niveau de sa surface ; ce miroir présente désormais un défaut de planéité. Ce défaut est modélisé par un miroir sphérique  $M$  de rayon de courbure  $R$  dont l'image par rapport à la séparatrice est  $M'$  (Fig. 3). Le miroir  $M_2$  reste intact. Le dispositif est éclairé dans les mêmes conditions expérimentales que dans la partie précédente et en utilisant la même source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ . Les miroirs sont tels que  $OO_1 = OO_2$ . La zone située entre le miroir plan  $M_2$  et le miroir  $M'$ , forme un coin d'air d'épaisseur  $e \ll R$  qui varie en fonction de la distance  $r$  à l'axe du système (Fig. 3).

Dans la suite, on tiendra compte du déphasage supplémentaire  $\varphi_s = \pi$  introduit par la séparatrice.



24. Exprimer l'épaisseur d'air  $e(P)$  entre  $M'$  et  $M_2$  en fonction de  $r$  et  $R$ . On suppose  $r \ll R$ .
25. Montrer que le déphasage  $\varphi(P)$  entre les deux ondes (1) et (2) se met sous la forme :
- $$\varphi(P) = K r^2 + \pi$$
- $K$  est une constante que l'on exprimera.
26. En déduire la nature des franges localisées dans la zone entre  $M'$  et  $M_2$ . Déterminer l'ordre d'interférence  $p_0$  au centre. Conclure.
27. Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point  $P$  en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $\lambda_0$  et  $I_0$ .
28. En déduire l'expression du rayon  $r_k$  du  $k$ -ième anneau sombre.
29. La figure d'interférence sur le coin d'air est projetée sur un écran par l'intermédiaire d'une lentille convergente  $L'$  de centre  $C'$  et de distance focale  $f' = 10 \text{ cm}$ . On donne  $\overline{C'O_2} = -15 \text{ cm}$ .
- 29.a. Soit  $O_2'$  l'image de  $O_2$  par la lentille  $L'$  (Fig.3). Calculer la distance  $C'O_2'$  à laquelle on doit positionner l'écran par rapport à cette lentille.
- 29.b. Calculer le grandissement  $\gamma$  de  $L'$ .
30. Une photographie du champ d'interférence est donnée par la figure 4. Déterminer, en exploitant cette photographie, le rayon de courbure  $R$  du miroir sphérique.

## **Problème 2 : Induction et transferts thermiques**

### **I- Courants de Foucault : chauffage par induction et influence du feuilletage**

Un barreau cylindrique métallique de rayon  $a$ , d'axe  $Oz$ , de longueur  $L$  très grande devant  $a$ , et de conductivité électrique  $\gamma$  est immobile dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$  variant dans le temps de manière sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  (Fig.5-a).

1. Justifier l'apparition d'un champ électrique variable  $\vec{E}$ . Déterminer sa direction en un point  $M$  quelconque du barreau repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et les variables dont il dépend.

En déduire, en utilisant la loi de Faraday, l'expression de  $\vec{E}$ .

2. Déterminer la densité volumique du courant induit  $\vec{j}(r, t)$  au point  $M$ . On suppose que le champ magnétique créé par ce courant induit est négligeable devant le champ inducteur  $\vec{B}$ .



3. Exprimer la puissance volumique  $p_v$  dissipée en M. En déduire que la puissance moyenne totale dissipée dans l'ensemble du barreau conducteur s'écrit :  $\langle P_J \rangle = K_0 B_0^2 \omega^2$  où  $K_0$  est un coefficient que l'on exprimera en fonction des données du problème.

4. On remplace le barreau métallique par un grand nombre  $N$  de petits barreaux cylindriques isolés, du même métal, de même longueur  $L$  et de rayon  $r_N$  (Fig. 5-b), telle que la section totale des  $N$  petits barreaux soit celle du barreau de rayon  $a$ . Déterminer la puissance dissipée dans tous les petits barreaux. Commenter. Quelle application peut suggérer ce résultat ?

## II- Etude d'un fusible

Un coupe-circuit électrique à fusible est un système de sécurité dont le rôle est de couper un courant électrique (fusion du fusible) lorsque l'intensité électrique le traversant dépasse une certaine valeur donnée. Il est modélisé par un fil conducteur cylindrique d'axe Ox de longueur  $L = 2,5 \text{ cm}$ , de rayon  $b$  et de section droite d'aire  $\Sigma$ . Il possède une conductivité électrique  $\gamma = 4,85 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  et une conductivité thermique  $\lambda = 35,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Il est parcouru par un courant continu d'intensité  $I$ .

### II-1. Transfert thermique par conduction dans le fil conducteur

Dans une première étape, on considère que ce fil est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation électrique et thermique de sa surface latérale (Fig.6). Aux extrémités du fusible, la température ambiante est maintenue constante égale à  $T_0 = 300 \text{ K}$ . On se place en régime stationnaire.

5. Rappeler l'expression de la résistance électrique  $R$  d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique  $\gamma$ , de longueur  $L$  et de section  $\Sigma$ . Donner alors la puissance dissipée par effet Joule  $dP_J$  pour une tranche du fil conducteur de section  $\Sigma$  et de longueur  $dx$ . En déduire la puissance volumique dissipée en fonction de  $\gamma$ ,  $\Sigma$  et  $I$ .

6. Rappeler la loi de Fourier pour une densité volumique de courant thermique notée  $\vec{j}_{th}$ . Exprimer le flux (ou puissance) thermique  $\phi_{th}$  traversant une section droite  $\Sigma$  du fil.

7. Etablir, à l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire  $dx$  du fil conducteur, l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$ .

8. En déduire l'expression littérale de  $T(x)$  et la représenter graphiquement. Déterminer le point F du fusible où la fusion se produit en premier.

9. Le matériau constituant le fil fond à une température  $T_f = 600 \text{ K}$ . On veut fabriquer un fusible qui supporte une intensité  $I_0 = 10 \text{ A}$ . Déterminer la valeur du rayon  $b$ .

10. Pour un fil de section  $\Sigma = 0,4 \text{ mm}^2$ , de même longueur  $L$ , parcouru par un courant  $I = \frac{I_0}{2}$ , montrer, en utilisant un bilan entropique, que l'entropie  $S_{oc}$  créée par unité de temps

dans le fil s'écrit :  $S_{oc} = \frac{R I_0^2}{4 T_0}$ . Calculer  $S_{oc}$ .



## II-2. Echange thermique entre le fusible et le milieu extérieur

Dans une deuxième étape, on enlève la gaine isolante et on suppose maintenant que le fusible échange de la chaleur avec l'air environnant maintenu à la température  $T_0$ . On admet que la température est constante en tout point du fusible.

11. Quels sont les modes de transfert de chaleurs intervenant au cours de cet échange ? Donner une explication qualitative pour chacun des modes.

12. Les expressions des flux surfaciques thermiques par convection et rayonnement sont respectivement :

$$\varphi_{cc} = h(T - T_0) \quad ; \quad \varphi_r = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad ; \quad h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad ; \quad \sigma = 5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$$

12-a. Montrer qu'à des températures voisines de la température ambiante ( $T \simeq T_0$ ), le flux surfacique par rayonnement s'écrit sous la forme :  $\varphi_r \simeq h_r(T - T_0)$  où  $h_r$  est une constante que l'on exprimera. Calculer  $h_r$ . Comparer les flux surfaciques  $\varphi_{cc}$  et  $\varphi_r$ .

12-b. Calculer, à la température de fusion  $T = T_f$ , les deux flux surfaciques. Conclure.

13. On désire établir, à la température de fusion du fil métallique, la relation entre l'intensité  $I$  du courant et le rayon  $b$  du fusible. A partir d'un bilan thermique où on considère que tout le fusible est à la température  $T_f$ , exprimer le courant  $I$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\varphi_{cc}$ ,  $\varphi_r$  et  $b$ . Tracer l'allure de la courbe  $I = f(b)$ . Commenter.

**Fin de l'épreuve**



