



Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 13 Juin 2019 Heure : 8 H Durée : 4 H Nombre de pages : 8

Barème : Problème 1: 7 pts , Problème 2: 13 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données

$$\begin{aligned} g_0 &= 9,81 \text{ m s}^{-2} & ; & \quad k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} & ; & \quad N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ e &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} & ; & \quad m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} & ; & \quad R = N_A k_B = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s} & ; & \quad m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} & ; & \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1} & ; & \quad \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} & ; & \quad \int_0^\infty \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Dans ce sujet on se propose d'étudier certains phénomènes physiques qui se produisent dans l'atmosphère, essentiellement dans la troposphère et l'ionosphère. Dans toute l'épreuve, l'étude sera faite dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ lié à la surface de la Terre. On notera $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire de la verticale ascendante Oz.

Problème 1

I. Propagation d'une onde plane

- 1) On se propose d'étudier les caractéristiques d'une onde électromagnétique plane progressive.
 - a) Ecrire l'équation de D'Alembert vérifiée par une grandeur physique ondulatoire $\Psi(z, t)$.
 - b) Donner sa solution générale.
 - c) Une grandeur $f(z, t)$ est dite onde plane progressive à la vitesse v dans la direction et le sens de l'axe Oz, si $f(z, t) = f(0, t - \frac{z}{v})$. Exprimer $f(z, t)$ si cette grandeur est sinusoïdale de pulsation ω , d'amplitude a et de phase à l'origine φ .
 - d) Définir la vitesse de phase v_φ de l'onde. Donner v_φ dans le vide et dans un milieu d'indice n .

- e) Montrer la transversalité des ondes électromagnétiques planes monochromatiques progressives suivant Oz dans le vide. Etablir pour cette onde la relation de structure entre le champ électrique, le champ magnétique et son vecteur d'onde $\vec{k}$.
- 2) Considérons une onde plane progressive monochromatique dont le champ électrique $\vec{E}$ d'amplitude E_0 est porté par l'axe Ox et le vecteur d'onde $\vec{k}$ fait un angle α avec l'axe Oz (Figure 1).
- a) Exprimer en notation complexe le champ électrique $\vec{E}$ de cette onde. En déduire son champ magnétique $\vec{B}$.
- b) Faire un schéma montrant les trois vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$.
- c) Exprimer le vecteur de Poynting de cette onde. Définir son intensité en précisant son unité ; l'exprimer en fonction de E_0 .
- d) Un laser émet un faisceau cylindrique de rayon 2 mm , et de puissance 400 W . Calculer l'amplitude E_0 associée à cette onde supposée plane monochromatique.

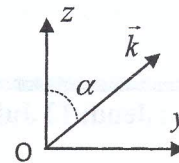


Figure 1

II. Propagation dans l'ionosphère

- 3) Le rayonnement ultraviolet du soleil entretient une structure ionisée de la haute atmosphère (l'ionosphère), située à une altitude de l'ordre de 500 km . A une telle altitude, la densité des particules chargées est $n_0 \approx 10^{11}\text{ m}^{-3}$. Le milieu considéré est supposé globalement neutre et peu dense. Ses propriétés électrique et magnétique sont assimilées à celles du vide. Dans la suite, toutes les vitesses sont considérées non relativistes et seront calculées dans un référentiel galiléen où règne une onde de champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k z)}$, ($i^2 = -1$) avec $E_0 = 6 \times 10^6\text{ V m}^{-1}$.
- a) Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron de masse m_e en mouvement à la vitesse $\vec{v}_e$, puis la même équation appliquée à un proton de masse m_p et de vitesse $\vec{v}_p$.
- b) Quels termes peut-on négliger dans ces équations ? Justifier.
- 4) Exprimer en notation complexe le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ lorsque les particules chargées oscillent avec la même pulsation que le champ $\vec{E}$.
- 5) En utilisant la loi d'Ohm locale, exprimer la conductivité $\underline{\gamma}$ en fonction de ε_0 , ω ,
- $$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \text{ et } \omega_{pp}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_p}.$$
- 6) Calculer les valeurs de ω_{pe} et ω_{pp} et déduire une expression simplifiée de $\underline{\gamma}$.
- 7) Etablir la relation de dispersion de ce milieu et faire apparaître une pulsation de coupure ω_c . Calculer la fréquence correspondante f_c .
- 8) Le milieu est-il dispersif ? Déterminer les expressions des vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g . Tracer sur la même figure l'allure de v_ϕ et v_g . Commenter le cas où $\omega \gg \omega_c$?
- 9) On considère deux stations radio AM de fréquence $f_{AM} \sim 100\text{ kHz}$ et FM de fréquence $f_{FM} \sim 100\text{ MHz}$. Quelle est la station radio qui pourrait avoir la plus vaste audience ?

- 10) Une source située à la surface de la Terre envoie dans la direction Oz une onde électromagnétique de pulsation $\omega < \omega_c$ et de champ électrique $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$. Arrivant en incidence normale sur l'interface atmosphère-ionosphère, elle se réfléchit en créant une onde de champ électrique $\vec{E}_2 = E_{0r} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x$. La surface de la Terre et l'interface atmosphère-ionosphère sont assimilées à deux conducteurs parfaits. On assimile le milieu entre les deux interfaces à une cavité vide.
- Déterminer E_{0r} en fonction de E_0 .
 - Déterminer les champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ respectivement des ondes incidente et réfléchie.
- 11) Etablir les expressions des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ de l'onde résultante en un point M de la cavité. Caractériser cette onde.
- 12) Exprimer la distance qui sépare deux nœuds consécutifs de $\vec{E}$. Donner la distance L entre les deux conducteurs parfaits en fonction de la longueur d'onde λ et d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Quantification de l'énergie d'une particule

- 13) Par analogie avec l'onde électromagnétique stationnaire dans la cavité étudiée dans les questions précédentes, on se propose d'évaluer l'énergie minimale d'une particule de masse m piégée dans un puits de potentiel rectangulaire $V(x)$ de hauteur infinie (Figure 2) :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L] \\ +\infty & \text{si } x \notin [0, L] \end{cases}$$

On peut imaginer un mouvement d'allers-retours de la particule entre les deux parois $x = 0$ et $x = L$.

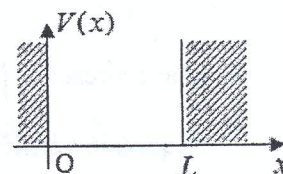


Figure 2

- Justifier que l'énergie totale E de la particule isolée est constante. Exprimer E en fonction de l'impulsion p_x et la masse m de la particule.
 - On rappelle que l'incertitude sur l'impulsion p_x est $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$. Sachant que les deux sens de mouvement de la particule sont équiprobables, montrer que $\Delta p_x = p_x$.
 - En utilisant la relation d'incertitude de Heisenberg, évaluer l'énergie minimale $E_{\min}$ de la particule. Commenter.
- 14) Donner la relation de De Broglie. En utilisant le résultat de la question 12), montrer que l'énergie de la particule piégée est quantifiée. En déduire que son énergie minimale est
- $$E_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$
- 15) Comparer les résultats des questions 13) et 14) et montrer qu'ils donnent le même résultat à un facteur $4\pi^2$ près. Que proposez-vous pour connaître la solution précise ?

Problème 2

On se propose d'étudier quelques modèles de variation de la pression et de la température dans la couche inférieure de l'atmosphère (troposphère). Dans ce problème l'atmosphère est modélisée par un gaz parfait constitué de molécules d'air identiques et indépendantes de masse m .

I. Etude quantique – statistique

Pour la description de la plupart des phénomènes étudiés, le suivi des comportements individuels des molécules est impossible, on s'intéressera alors à des comportements moyens d'ensemble. On définit pour cela des parcelles d'air, assimilées à des boîtes cubiques d'arrête L et contenant un grand nombre de molécules en équilibre thermique à la température T .

On néglige l'effet de pesanteur et on suppose dans un premier temps que les particules sont astreintes à se déplacer sur l'axe Ox parallèle à un côté d'une boîte. Celle-ci est modélisée par un puits de potentiel $V(x)$ de même forme que celui de la figure 2-Problème 1.

On associe à chaque particule une fonction d'onde $\Psi(x,t)$ qui décrit son état à l'instant t . $\Psi(x,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

On cherche des états stationnaires $\Psi(x,t)$ d'énergie E_x définis par : $\Psi(x,t) = \varphi_x(x) e^{-i \frac{E_x}{\hbar} t}$

- 1) Que représente $|\Psi(x,t)|^2$? Pourquoi un tel état est appelé état stationnaire ? Donner l'équation vérifiée par $\varphi_x(x)$; on posera $k_x^2 = \frac{2mE_x}{\hbar^2}$.
- 2) En exploitant les conditions aux limites, montrer que $\varphi_x(x) = D \sin(k_x x)$ où D est une constante.
- 3) Déterminer les valeurs permises de k_x en fonction de L et d'un entier $n_x \in \mathbb{N}^*$. En déduire que les énergies accessibles de la particule s'écrivent $E_{x n} = n_x^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}$.
Comparer ce résultat à ceux trouvés dans le problème 1- questions 13) et 14).
- 4) Déterminer la constante D en fonction de L .
- 5) On admet que l'énergie cinétique E_x de translation d'une particule d'air est de même ordre de grandeur que son énergie thermique $k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann.
 - a) Calculer les nombres quantiques n_1 et n_2 tels que $E_{x n_1} = k_B T$ et $E_{x n_2} = 1,01 k_B T$.
On donne $L = 10,0 \text{ cm}$, $T = 288 \text{ K}$, masse molaire de l'air $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$.
 - b) En déduire le nombre de niveaux d'énergies $\Delta n = n_2 - n_1$ qui existent entre les états d'énergie $E_{x n_1}$ et $E_{x n_2}$.
 - c) Justifier alors qu'à cette température, l'énergie de la particule est continue. Dans la suite on se place dans cette condition quelque soit la température.

- 6) Le nombre de niveaux d'énergie compris entre E_x et $E_x + dE_x$ est $dn_x = w(E_x)dE_x$ où $w(E_x)$ est la densité des niveaux d'énergie.

Donner l'expression de n_x en fonction de E_x . En déduire que $w(E_x) = \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}}$.

- 7) D'après la loi de Boltzmann, la probabilité pour qu'une particule ait une énergie comprise entre E_x et $E_x + dE_x$ est $dp(E_x) = A \exp(-\beta E_x) w(E_x) dE_x$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Déterminer la constante A .

- 8) On rappelle que la valeur moyenne de l'énergie d'une particule est $\langle E_x \rangle = \int_0^\infty E_x dp(E_x)$.

Déterminer $\langle E_x \rangle$ en fonction de k_B et T .

- 9) En réalité les particules formant le gaz peuvent se déplacer d'une façon isotrope dans la boîte selon les trois axes Ox , Oy et Oz .

Ces particules obéissent à l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = E \varphi(x, y, z).$$

Nous cherchons une solution de la forme $\varphi(x, y, z) = \varphi_x(x) \varphi_y(y) \varphi_z(z)$.

Monter qu'on est ramené à résoudre trois équations de Schrödinger indépendantes qui décrivent chacune une particule confinée sur un segment de droite, le long des axes Ox , Oy , et Oz . En déduire que l'énergie totale de la particule est $E = E_x + E_y + E_z$.

- 10) En utilisant le résultat de la question 3),

- a) en déduire que l'énergie de la particule piégée dans la boîte est

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{h^2}{8mL^2}, \text{ où } n_x, n_y \text{ et } n_z \text{ sont trois nombres entiers.}$$

- b) Exprimer la fonction d'onde associée à cette énergie $\varphi(x, y, z)$.

- 11) En admettant que $\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle$, en déduire alors que $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$. Commenter.

- 12) Exprimer l'énergie interne U et l'enthalpie H d'une mole d'air en fonction de T . En déduire ses capacités thermiques molaires à volume constant C_{v_m} et à pression constante

C_{p_m} ainsi que le rapport $\gamma = \frac{C_{p_m}}{C_{v_m}}$. Comparer la valeur de γ à celle de l'air ($\gamma = 1,4$).

- 13) Le modèle précédent ne tient compte que du mouvement de translation des molécules. Cependant, pour une meilleure description on doit tenir compte du mouvement de rotation de ces molécules.

Chaque molécule est formée par deux atomes rigides identiques, de masse m chacun, distants de $2a$ (Figure 3). La molécule tourne à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Oz orthogonal à son axe et passant par son centre de masse. Le moment d'inertie correspondant est $I = 2ma^2$ et le moment cinétique est $\vec{J} = I\omega \vec{u}_z$.

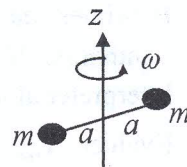


Figure 3

a) Montrer que l'énergie cinétique de rotation de la molécule peut se mettre sous la forme $E_{rot,z} = \frac{J^2}{2I}$.

b) En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, qu'elle serait la valeur moyenne $\langle E_{rot,z} \rangle$ d'une molécule à l'équilibre thermique à la température T ?

14) En réalité, la molécule possède deux degrés de liberté de rotation, puisqu'elle peut tourner autour de deux axes orthogonaux à son axe (**Figure 4**).

Déterminer dans ce cas l'énergie moyenne de rotation $\langle E_{rot} \rangle$ par molécule. En déduire que l'énergie moyenne de rotation d'une mole d'air est $U_{rot} = RT$.

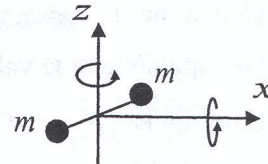


Figure 4

15) Quelle est alors la nouvelle expression de l'énergie interne U et de l'enthalpie H d'une mole d'air en tenant compte du mouvement de rotation ?

16) Donner les expressions des capacités thermiques C_{vm} et C_{pm} . Vérifier que $\gamma = 1,4$.

17) Le modèle précédent donne une représentation classique de la rotation de la molécule d'air. Il cesse d'être valable pour les basses températures.

Des études expérimentales ont montré que C_{vm} décroît aux basses températures comme le montre la courbe de la **figure 5**.

Pour expliquer l'allure de cette courbe on reprend l'étude précédente de la rotation à l'aide d'une approche quantique dans laquelle l'énergie de rotation de la molécule est quantifiée. Elle est donnée par :

$$E_j = \frac{\varepsilon}{2} j(j+1) \text{ avec } \varepsilon = \frac{h^2}{I} \text{ et } j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

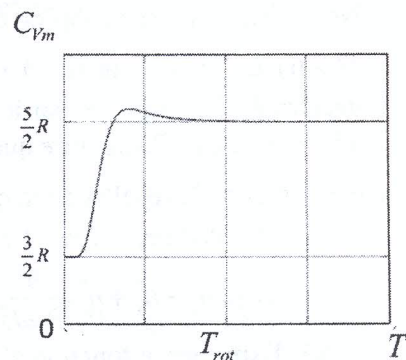


Figure 5

a) On s'intéresse seulement aux deux premiers niveaux d'énergie $E_{j=0}$ et $E_{j=1}$.

Exprimer $\Delta E = E_{j=1} - E_{j=0}$ en fonction de ε , puis le rapport des populations $\frac{N_{j=1}}{N_{j=0}}$ de

ces deux niveaux en fonction de ε et T . L'écrire sous la forme $\frac{N_{j=1}}{N_{j=0}} = e^{-\frac{T_{rot}}{T}}$ où T_{rot}

est une constante à exprimer en fonction de ε et k_B . Quelle est son unité ?

b) En déduire qu'à basse température $T \ll T_{rot}$, le niveau $j=0$ est majoritairement peuplé.

c) Exprimer dans ces conditions, l'énergie de rotation, l'énergie interne U et l'enthalpie H d'une mole d'air.

d) Interpréter alors le comportement de la courbe $C_{vm}(T)$ à basse température.

e) Evaluer T_{rot} pour la molécule d'azote (N_2). On donne $m_N = 2,3 \times 10^{-26} \text{ kg}$ et $a = 55 \times 10^{-12} \text{ m}$.

II. Modèle de l'atmosphère isotherme

Dans ce modèle l'air est à l'équilibre thermique à la température T . Pour étudier l'effet de pesanteur sur l'air on considère une molécule de masse m soumise à la pesanteur terrestre, supposée uniforme $\vec{g} = -g_0 \vec{u}_z$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'altitude de la molécule est repérée par sa cote z , dont l'origine est située au niveau du sol.

18) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $e_p(z)$ d'une molécule ; on donne $e_p(z=0) = 0$.

19) On suppose que les molécules d'air obéissent à la statistique de Boltzmann :

$dp(z) = K \exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_B T}\right) dz$, où $dp(z)$ est la probabilité de trouver la particule entre

l'altitude z et $z + dz$. On pose $H = \frac{RT}{Mg_0}$, déterminer l'expression de la constante K

en fonction de H . Quelle est son unité? Calculer sa valeur pour $T = 288K$.

20) Déterminer l'altitude moyenne $\langle z \rangle = \int_0^{+\infty} z dp(z)$ de la molécule.

21) Le nombre de particules par unité de surface qui se trouvent entre les altitudes z et $z + dz$ est $dN(z) = \alpha dp(z)$, vérifier que $\alpha = N$, où N est le nombre total de particules par unité de surface de l'atmosphère. En déduire l'expression de la densité des particules $n(z) = \frac{dN}{dz}$ en fonction de H et z .

22) On considère une tranche cylindrique d'air de section S située entre z et $z + dz$.

a) En appliquant la loi des gaz parfaits à cette tranche, exprimer la pression $P(z)$ en fonction de $n(z)$.

b) En déduire la loi de nivellement barométrique $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$. Exprimer P_0 en fonction de N, H, N_A et T . Calculer la pression au sommet de l'Everest ($z = 8850 \text{ m}$). On donne $P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

23) La pesanteur varie désormais avec l'altitude selon la loi $g(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2}$ où R_T est le

rayon de la Terre. Montrer que pour $z \ll R_T$ on a : $g(z) \simeq g_0 \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$, avec

$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$. Ecrire la nouvelle expression $e_p(z)$ de l'énergie potentielle.

24) Montrer que la masse volumique $\rho(z)$ de la tranche cylindrique d'air de section S située entre z et $z + dz$ est $\rho(z) = P(z) \frac{M}{RT}$. Calculer $\rho_0 = \rho(z=0)$.

25) Utiliser la condition d'équilibre de cette tranche d'air dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour montrer l'équation fondamentale de la statique des fluides : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho(z)g(z)$.

En déduire que $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_B T}\right)$.

III. Modèle de l'atmosphère isentropique

26) Le modèle de l'atmosphère isotherme est insuffisant pour expliquer la variation de la pression et de la température d'air en fonction de l'altitude. On adopte alors le modèle de l'atmosphère isentropique où l'air subit une évolution adiabatique réversible.

Rappeler la loi de Laplace. En déduire la relation $P(z)\rho(z)^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$.

27) Dans la suite on suppose que $g(z) \simeq g_0$. Montrer en utilisant l'équation fondamentale de la statique des fluides que la pression de l'atmosphère à l'altitude z est

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{(\gamma-1)\rho_0 g_0}{\gamma P_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

28) Calculer l'épaisseur de l'atmosphère dans ce modèle.

29) Montrer que la température peut s'écrire $T(z) = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma R} M g_0 z$. Calculer son gradient de température.

30) Calculer les valeurs de la température T et la pression P au sommet de l'Everest. Comparer ces résultats avec ceux du modèle isotherme. On donne $T_0 = 288K$.

IV. Modèle de l'atmosphère polytropique

31) Des mesures expérimentales de l'évolution de la température en fonction de l'altitude dans la troposphère ont montré que le profil de la température peut être modélisé par $T(z) = T_0 - a z$, où T_0 est la température au sol et a est une constante positive.

a) Montrer que la masse volumique $\rho(z)$ s'écrit $\rho(z) = \frac{P(z)M}{R(T_0 - a z)}$.

b) En utilisant l'équation fondamentale de la statique des fluides, montrer que : $P(z) = P_0(1 - bz)^\eta$ avec b et η sont deux constantes à déterminer.

32) Comparer l'expression de $P(z)$ avec celle obtenue à l'aide du modèle isotherme lorsqu'on se place à faible altitude $bz \ll 1$. Commenter.

33) Montrer que dans ce modèle la pression est liée à la masse volumique par la relation polytropique d'indice k : $P(z)\rho(z)^{-k} = cte$. Donner alors l'expression de k en fonction de η .

34) On donne $\eta = 5,91$, déduire les valeurs de a et b . Calculer la valeur de la température à une altitude $z = 10km$. Sachant que la température mesurée à cette altitude est $T = -56^\circ C$, commenter la validité de ce modèle.

Fin de l'épreuve