



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : Jeudi 24 Juin 2021 Heure : 8 H Durée : 4 H Nombre de pages : 10
Barème : Problème 1 : 4 pts Problème 2 : 12 pts Problème 3 : 4 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données :

Charge élémentaire : $e = 1,610^{-19}C$
Masse de l'électron : $m_e = 9,110^{-31}kg$
Masse du proton : $m_p = 1,6610^{-27}kg$
Constante de Planck : $h = 6,6210^{-34}J.s$
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,3810^{-23}J.K^{-1}$
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0210^{23}mol^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 310^8m.s^{-1}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8,31J.K^{-1}.mol^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,8510^{-12}F.m^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi10^{-7}H.m^{-1}$
 $1eV = 1,610^{-19}J$

Le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Le gradient en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r)$:

$$\vec{grad}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\vec{u}_r$$

Relation d'analyse vectorielle :

$$\vec{rot}\vec{rot}\vec{A} = \vec{grad}\vec{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Problème 1 (Energie interne et capacités thermiques)

La température a pour effet de provoquer l'agitation thermique. Pour un gaz parfait monoatomique, l'énergie thermique est entièrement emmagasinée sous forme d'énergie cinétique. Dans le cas d'un cristal monoatomique, si un atome est écarté de sa position d'équilibre, il est susceptible de vibrer. Ainsi l'agitation thermique est modélisée par des oscillations à trois dimensions.

I/ On considère un oscillateur harmonique 1D constitué par un atome de masse m élastiquement lié à un centre $x = 0$ par la seule force de rappel $\vec{F} = -m\omega^2 x \vec{u}_x$. L'atome écarté de la distance x par rapport à sa position d'équilibre $x = 0$, vibre à la pulsation caractéristique ω et à chaque instant son abscisse est $x(t) = A \cos \omega t$, A est une constante.

1/ Déterminer l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique E_c . On prendra $E_p(x = 0) = 0$.

2/ En déduire l'énergie mécanique E_m .

3/ Montrer que la valeur moyenne de l'énergie mécanique $\langle E_m \rangle = 2 \langle E_c \rangle = 2 \langle E_p \rangle$.

Ce résultat est encore valable pour l'atome vibrant dans les trois dimensions de l'espace autour de sa position d'équilibre dans le cas des solides monoatomiques. De plus, que l'atome vibre autour d'un point fixe ou qu'il se déplace de façon désordonnée comme dans un gaz parfait monoatomique, la valeur moyenne de l'énergie à la température T est $\frac{1}{2} k_B T$.

4/ Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.

5/ Exprimer l'énergie interne U_G d'un gaz parfait monoatomique comportant N particules en fonction de N , k_B et T . En déduire sa capacité thermique molaire à volume constant que l'on exprimera en fonction de R .

6/ Exprimer l'énergie interne U_S d'un solide monoatomique comportant N particules en fonction de N , k_B et T . En déduire sa capacité thermique molaire à volume et à pression constante que l'on exprimera en fonction de R .

7/ Commenter les résultats théoriques obtenus précédemment concernant les valeurs des capacités.

Cependant des mesures expérimentales montrent qu'à haute température, la capacité thermique est indépendante de la température T (loi de Dulong et Petit) alors qu'à basse température elle se comporte en T^3 et s'annule au zéro absolu.

II/ Einstein a montré que la décroissance de la capacité thermique à basse température est un phénomène d'origine quantique. Le modèle adopté est celui de N oscillateurs harmoniques indépendants pouvant tous osciller avec la même pulsation ω suivant trois directions orthogonales. La mécanique quantique permet de montrer que l'oscillateur harmonique 1D à la température T , peut occuper l'état d'énergie $e = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, repéré par son nombre quantique n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), avec une probabilité proportionnelle à $\exp(-n \frac{\hbar\omega}{k_B T})$.

8/ La valeur moyenne de l'énergie $\langle e \rangle = (\langle n \rangle + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

Montrer que $\langle n \rangle = \frac{\sum_0^\infty n y^n}{\sum_0^\infty y^n}$ Avec $y = \exp(-\frac{\hbar\omega}{k_B T})$

9/ En déduire que $\langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1}$

10/ Déterminer alors l'énergie moyenne de l'ensemble des 3 N oscillateurs.

11/ Montrer que la capacité thermique molaire s'écrit :

$C = 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\frac{\theta_E}{T})}{(\exp(\frac{\theta_E}{T}) - 1)^2}$ Avec θ_E est une température caractéristique que l'on déterminera.

12/ Montrer qu'à haute température, la capacité thermique est indépendante de la température T (loi de Dulong et Petit).

13/ Montrer qu'à basse température, la capacité thermique s'annulait au zéro absolu.

14/ Quelle est l'insuffisance du modèle proposé par Einstein ?

Problème 2 (Généralités sur les plasmas)

En 1928, le physicien Langmuir a introduit le terme « plasma » pour désigner un gaz ionisé électriquement neutre dans les tubes à décharge.

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, constitué d'électrons (masse $m = m_e$, charge $q = -e$ et densité volumique de charge n_e) et d'ions positifs (masse $M = m_p$, charge $q = +e$ et densité volumique de charge n_i). En l'absence de champ électromagnétique appliqué, on considère que le plasma est localement neutre et que $n_e = n_i = n_0$. On suppose que le gaz est totalement ionisé et que les interactions entre particules chargées peuvent être négligées. L'ionosphère est un exemple de plasma où les gaz sont ionisés par le vent solaire et le rayonnement cosmique. Les propriétés électriques et magnétiques du plasma sont assimilées à celles du vide.

A/ Approche classique

1/ Déterminer la vitesse quadratique moyenne des électrons u_e et des ions u_i dans le plasma. Vérifier qu'on peut considérer les ions comme immobiles.

Justifier que le mouvement électronique est non relativiste.

2/ En calculant l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de DE BROGLIE des électrons, justifier l'utilisation du cadre classique pour décrire leur mouvement.

On prendra $T = 10^4 K$ et $n_0 = 10^{16} m^{-3}$.

B/ Striction magnétique

La striction magnétique est la compression d'un faisceau de particules chargées sous l'effet de son propre champ magnétique. Les particules chargées d'un plasma constituent un fluide conducteur dont le mouvement fait apparaître une densité de courant $\vec{j}$.

À un point M de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base orthonormée directe cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Considérons ce fluide conducteur circulant dans un cylindre d'axe OZ , de rayon R et de longueur infinie. Le vecteur densité volumique de courant supposé uniforme en un point M du fluide

$$\text{s'écrit : } \begin{cases} \vec{j}(M) = j\vec{u}_z & \text{pour } r \leq R \\ \vec{j}(M) = \vec{0} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

3/ Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.

4/ En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace. On rappelle que le champ magnétique est continu en $r = R$.

5/ La force magnétique $d\vec{F}_m$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du fluide est donnée par :

$$d\vec{F}_m = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M) d\tau.$$

Quelle est l'effet provoqué par cette force ? Justifier.

6/ En plus de la force magnétique, il existe dans le fluide des forces de pression. Si $P(M)$ est la pression en M , l'élément de volume $d\tau$ est aussi soumis à la force de pression

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}P(M)}d\tau.$$

En admettant qu'il s'établit un équilibre entre la force magnétique et la force de pression, en déduire l'expression de la pression $P(M)$. On prendra $P(r = R) = 0$.

7/ Montrer que la pression moyenne sur une section $S = \pi R^2$ droite du fluide peut se mettre sous la forme :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r P(M) dr = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R)$$

8/ Cette formule peut être appliquée dans le cas d'un éclair, dont le passage peut provoquer une pression de l'ordre de $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ sur un diamètre de 2 cm sous l'effet de striction magnétique. Calculer le courant I d'un tel éclair.

C/ Etude de l'écart local à la neutralité : longueur de DEBYE

Dans cette partie, on étudie les phénomènes électrostatiques à l'intérieur d'un plasma à l'équilibre thermodynamique T .

Considérons un ion de charge $q = +e$, placé en O , et pris comme origine d'un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) de base orthonormée direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion situé en O . Les densités volumiques de charges d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement :

$\rho_i = \rho_0 \exp \frac{-eV(r)}{k_B T}$ et $\rho_e = -\rho_0 \exp \frac{eV(r)}{k_B T}$ avec ρ_0 désigne une constante et k_B est la constante de Boltzmann.

9/ Quel nom donne-t-on à ces lois de répartition ?

Que représente ρ_0 ? Exprimer ρ_0 en fonction de n_0 et e .

10/ Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M , $\rho_t(M)$, pour $r \neq 0$

11/ En coordonnées sphériques, l'équation différentielle à laquelle obéit le potentiel $V(r)$ est :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = -\frac{\rho_t(M)}{\epsilon_0}$$

On se place dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$ et on admet que $V(r \rightarrow \infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion placé en O , l'influence de sa charge l'emporte sur celle des charges

électroniques distribuées en volume. Montrer que le potentiel $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$ où λ_D est une distance caractéristique (appelée longueur de DEBYE) que l'on déterminera.

12/ Tracer sur un même graphique l'allure de $V(r)$ et l'allure du potentiel créé par l'ion placé en O de charge $q = +e$ dans le vide. Commenter.

13/ En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ correspondant au potentiel $V(r)$.

14/ Calculer la charge totale Q contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e , r et λ_D . Discuter les cas $r \gg \lambda_D$ et $r \ll \lambda_D$.

15/ Calculer la valeur numérique de λ_D à la température de $T = 10^4 K$. Discuter la validité de l'approximation faite à la question 11. On donne $n_0 = 10^{21} m^{-3}$.

D/ Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

Le plasma décrit précédemment est maintenant soumis à l'action d'un champ électromagnétique qui s'écrit en coordonnées cartésiennes et en notation complexe :

$$\vec{E}(M) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \text{ avec } E_0 \text{ est une constante positive.}$$

16/ Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur une charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$. Justifier qu'il est possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique.

17/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les vitesses complexes $\vec{v}_i$ des ions et $\vec{v}_e$ des électrons.

18/ En déduire la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le plasma. Quel terme peut-on négliger dans cette expression.

19/ Montrer qu'il y a absence de puissance moyenne temporelle échangée entre le champ et les porteurs de charges dans le plasma.

20/ Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le plasma sous la forme $\text{rot} \vec{B} = \frac{i\omega}{c^2} (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \vec{E}$

où ω_p est une constante (appelée pulsation plasma) que l'on déterminera.

21/ Établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.

22/ En déduire la relation de dispersion $k = f(\omega)$. Tracer sur le même graphique la courbe décrivant la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le vide illimité et la relation de dispersion de l'onde dans le plasma.

23/ A quelle condition l'onde appliquée au plasma peut-elle s'y propager ? Dans le cas contraire que lui arrive-t-elle ?

24/ À quel type de filtre peut-on assimiler le plasma vis-à-vis des ondes électromagnétiques ?

25/ Les ondes radio de fréquences proches de 8GHz envoyées par des sondes dans l'espace sont captées par des stations situées à la terre. Le choix de ces fréquences permet-il la communication entre la sonde et la terre sachant que $\omega_p \sim 10^7 \text{ rad s}^{-1}$ pour l'ionosphère terrestre ?

E/ Réception d'un signal

Une onde électromagnétique plane progressive de polarisation rectiligne de fréquence 200 KHz reçue par le détecteur représenté sur la figure 1. L'expression en notation complexe du champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$\vec{E}(M) = E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$ avec E_0 est une constante positive.

Le détecteur est modélisé par un cadre carré de côté $a = 10 \text{ cm}$ sur lequel on a enroulé $N = 1000$ spires de fil conducteur (Figure 1).

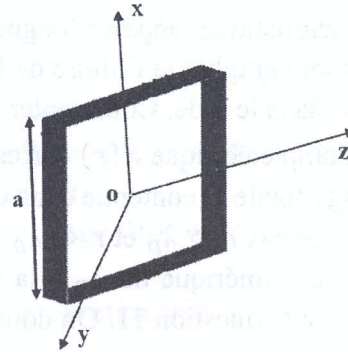


Figure 1

26/ Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$.

27/ Montrer que le champ magnétique est uniforme sur le détecteur.

28/ Déterminer l'expression littérale du flux du champ magnétique à travers le cadre. Donner la valeur de l'angle entre le vecteur normal à la surface du cadre et le champ magnétique qui permet une réception optimale.

29/ Ce cadre est branché à un voltmètre, exprimer la valeur efficace U de la tension instantanée détectée en fonction de E_0 , ω , c , N et a .

30/ La plus petite valeur efficace de la tension détectable est $U = 0,01 \text{ mV}$. Déterminer alors la valeur minimale du champ électrique que l'on puisse détecter.

F/ Filtrage d'un signal

On considère le filtre constitué de deux cellules RC (Figure 2). La tension d'entrée v_e est sinusoïdale de fréquence f .

32/ Déterminer l'impédance complexe de sortie $\underline{Z}_s$.

33/ Déterminer l'impédance complexe de l'entrée $\underline{Z}_e$.

34/ Etablir la fonction de transfert du filtre et montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}, \text{ où la}$$

grandeur x est telle que $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

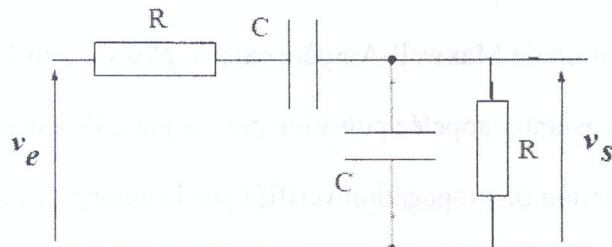


Figure 2

Que représente chacune des grandeurs ω_0 , Q et H_0 ?

35/ Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bande et en déterminer les fréquences de coupure notées f_{c1} et f_{c2} ($f_{c1} < f_{c2}$).

36/ Tracer l'allure du diagramme asymptotique de Bode ($G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$) de ce filtre puis le diagramme de Bode. On indiquera les points particuliers.

37/ Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 500 \text{ nF}$. Déterminer le signal de sortie v_e du filtre si le signal d'entrée est :

$$v_e = V_0 + V_0 \cos(\omega t) + V_0 \cos(10\omega t) + V_0 \cos(100\omega t)$$

où $V_0 = 10 \text{ V}$ et $\omega = 200 \text{ rad.s}^{-1}$.

Problème 3 (La nécessité de la notion de photon : L'effet photoélectrique)

L'effet photoélectrique est l'extraction d'électrons d'un métal, lorsque celui-ci est exposé à un rayonnement lumineux. Ce phénomène découvert par Hertz en 1887, et analysé par Lenard en 1902, ne s'interprète pas simplement dans le cadre de la théorie ondulatoire. En 1905, Einstein propose une interprétation de l'effet photoélectrique en s'appuyant sur l'hypothèse où le rayonnement lui-même est constitué de "quanta de lumière" d'énergie $W = h\nu$. En 1916 Millikan (1868-1953) vérifia l'hypothèse d'Einstein.

On modélise l'anode et la cathode dans l'expérience de Lenard (Annexe documentaire, figure 4) par deux armatures métalliques planes et parallèles (Figure 3). Elles sont distantes de $d \ll \sqrt{S}$ (S : l'aire des armatures), alimentées par une tension $U = V_2 - V_1$

1/ Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétique $\vec{E}(M)$ ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.

2/ Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ électrique $\vec{E}(M)$ est uniforme.

3/ Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ en fonction de U , d , V_1 et z .

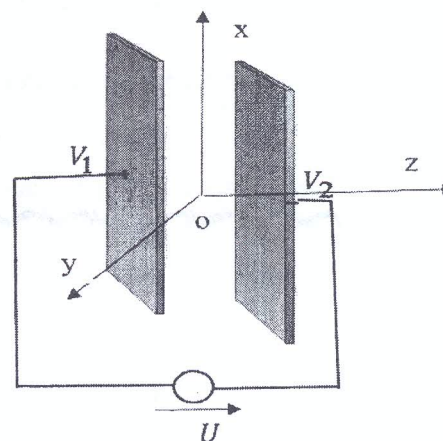


Figure 3

4/ Montrer que l'énergie potentielle électrostatique d'un électron placé entre les armatures s'écrit $E_p = -eV(M) + C$ avec C est une constante qu'on cherchera pas à déterminer.

Exprimer l'énergie potentielle électrostatique E_p en fonction de U , d , V_1 , e et z .

5/ Un électron de masse m de charge $-e$ est extrait de l'armature (1), acquiert la vitesse $\vec{v}_1$. Cet électron atteint l'armature (2) avec la vitesse $\vec{v}_2$.

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -eU.$$

A partir de l'expérience de Lenard (annexe documentaire, figure 5) :

6/ Quelle est la nature du mouvement des électrons selon le signe de la tension U .

7/ Expliquer l'existence du courant à des tensions même négatives.

Donner une interprétation du potentiel d'arrêt U_0 .

8/ Exprimer l'énergie cinétique E_c des électrons extraits de la cathode en fonction de la charge élémentaire e et le potentiel d'arrêt U_0 .

9/ L'énergie cinétique E_c des électrons extraits de la cathode dépend t-il de l'intensité de la lumière incidente ? Justifier.

A partir de l'expérience de Millikan (Annexe documentaire, figure 6) :

10/ En déduire que le potentiel d'arrêt U_0 est une fonction affine de la fréquence ν de la lumière incidente : $-U_0 = a(\nu - \nu_0)$. Estimer la valeur de la constante a .

11/A l'aide de l'équation d'Einstein (annexe documentaire, page 10), estimer la valeur de la constante de Planck h .

12/ Vérifier que l'énergie cinétique des électrons émis est proportionnelle à la fréquence de la lumière utilisée.

13/ Vérifier l'existence d'une fréquence minimale, appelée fréquence seuil, en dessous de laquelle il n'y a pas d'émission des électrons.

14/ En quoi l'existence d'une fréquence seuil en dessous de laquelle plus aucun électron ne peut être émis quelle que soit la puissance lumineuse, est-il en contradiction avec une description purement ondulatoire la lumière ? Pourquoi l'introduction de la notion de photon résout le problème.



ANNEXE DOCUMENTAIRE

Hertz découvre en 1887 que de la lumière ultra-violette incidente sur des électrodes métalliques facilite le passage d'une décharge électrique. La figure 4 schématise l'appareil utilisé par Lenard en 1902 pour étudier l'effet photoélectrique. Dans un tube de verre où l'on fait le vide, de la lumière ultra-violette incidente sur une cathode en métal C libère des électrons détectés par un électromètre.

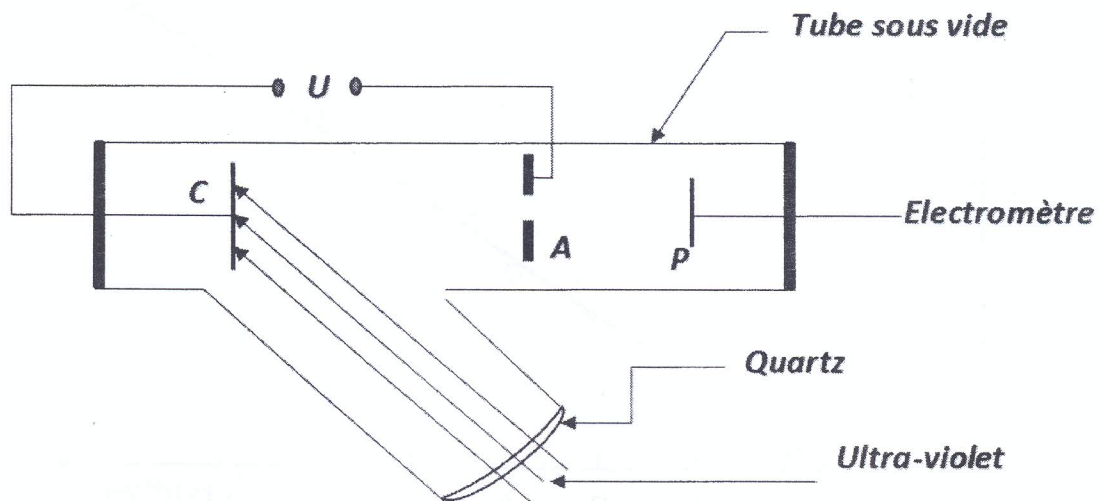


Figure 4. Schéma de l'appareil utilisé par Lenard pour étudier l'effet photo-électrique

- La variation de courant photo-électrique I en fonction de la tension U est schématisée sur la figure 5. L'étude expérimentale conduit aux observations suivantes :
- Si la cathode est éclairée par un rayonnement du domaine visible, aucun courant n'est observable, et ce quelle que soit l'intensité lumineuse incidente.
 - Il existe une fréquence minimale, appelée fréquence seuil, en dessous de laquelle il n'y a pas d'émission des électrons.
 - L'énergie cinétique des électrons émis est proportionnelle à la fréquence de la lumière utilisée.

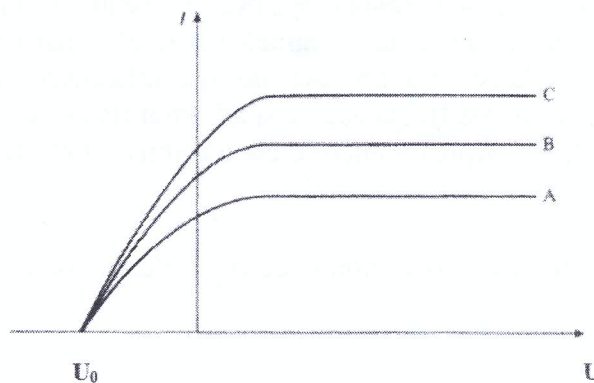


Figure 5. Variation du courant photo-électrique en fonction de la différence de potentiel U pour différentes intensités de la lumière incidente $A < B < C$

- L'expérience, menée par Robert Andrews Millikan en 1916 (figure 6), confirme cette formule et donne une valeur de la constante de Planck en bon accord avec la valeur

provenant des expériences sur le rayonnement thermique. Einstein reçut le prix Nobel de physique pour son travail sur l'effet photoélectrique en 1922.

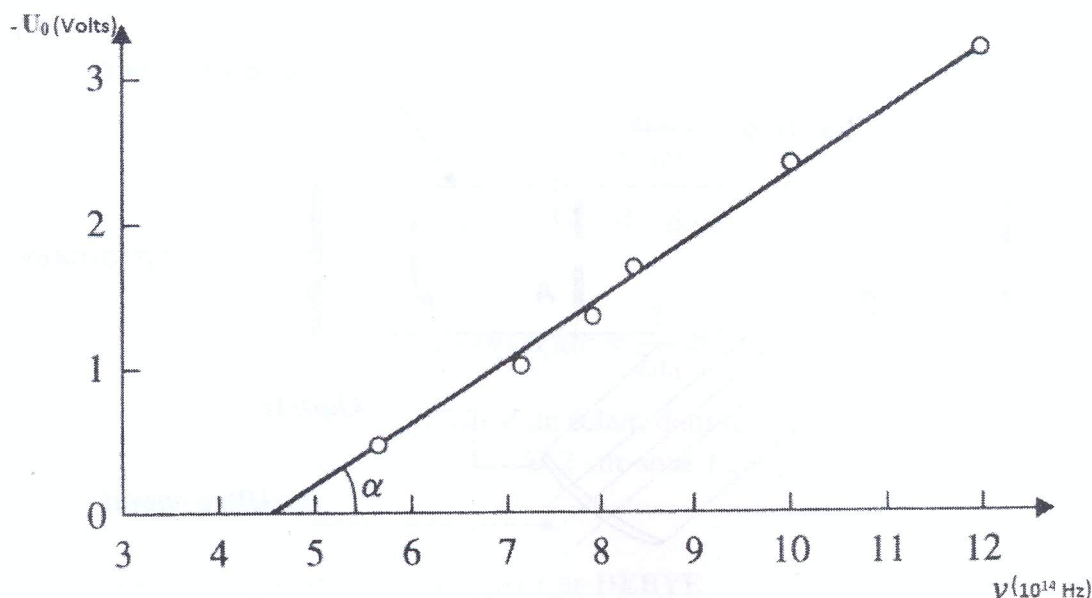


Figure 6. La contre tension $-U_0$ en fonction de la fréquence ν , pour une surface métallique de sodium

- En 1905, Einstein propose une interprétation de l'effet photoélectrique en s'appuyant sur l'hypothèse où le rayonnement lui-même est constitué de "quanta de lumière" d'énergie $W = h\nu$. Il suppose pour cela qu'un quantum d'énergie cède de l'énergie à un seul électron. Les électrons étant normalement liés au métal, il faut une énergie minimum $W_0 = h\nu_0$, caractéristique du métal et appelée *travail d'extraction* pour que l'électron puisse s'échapper. Ainsi, l'hypothèse de quantification du rayonnement permet d'expliquer l'existence d'une fréquence de seuil. Pour un rayonnement de fréquence plus élevée ($\nu > \nu_0$), le surplus d'énergie est transmis à l'électron sous forme d'énergie cinétique E_c .

L'équation d'Einstein pour l'effet photo-électrique s'écrit donc : $W = W_0 + E_c$