



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : 06 juin 2022	Heure : 8H	Durée : 4H	Nombre de pages : 8
Barème :	Problème 1 : 13 pts	Problème 2 : 7 pts	

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Données :

- Rayon du soleil : $R_s = 695\,500\text{ km}$
- Distance soleil – point de Lagrange L2 : $d = 151\,500\,000\text{ km}$
- Température de la surface du soleil : $T_s = 5800\text{ K}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Problème 1 : Ondes et cavités

Partie I : Réflexion normale sur un conducteur parfait – Cavity résonante

Une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de pulsation ω , polarisée rectilignement, se propage dans le vide dans le sens des x croissants. Le champ électrique associé, s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y ; k = \frac{\omega}{c} \quad (j^2 = -1)$$

Elle arrive en $x = 0$, sur la surface plane d'un miroir métallique, supposé un conducteur parfait et donne naissance à une onde réfléchie (**Figure 1**) :

$$\vec{E}_r(x, t) = E_{0r} \exp j(\omega t + kx) \vec{u}_y$$

On note $E_{0r} = rE_0$, où r désigne le coefficient de réflexion en amplitude.

Le conducteur est fixe dans le référentiel terrestre $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen.

1. Définir un conducteur parfait. Justifier que le champ électromagnétique à l'intérieur est nul.

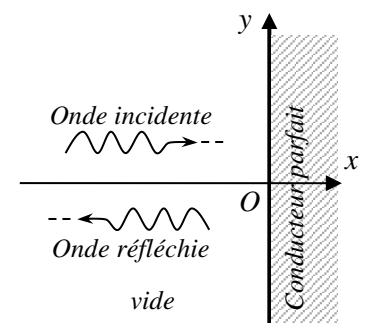


Figure 1

On désigne par σ la charge surfacique et $\vec{j}_s$ le courant surfacique pouvant exister sur la surface $x=0$.

On rappelle que les relations de passage vérifiées par le champ électromagnétique à la traversée de l'interface séparant deux milieux notés 1 et 2 s'écrivent :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

où $\vec{n}_{12}$ désigne un vecteur unitaire normal à la surface de séparation dirigé de 1 vers 2.

2. Montrer que la densité de charge surfacique σ est nulle. Justifier la continuité du champ électrique à la traversée de la surface $x=0$. En déduire le coefficient de réflexion r .

Onde stationnaire

3. On s'intéresse à la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x \leq 0$.

3.a. Déterminer le champ électromagnétique résultant $(\vec{E}(x,t), \vec{B}(x,t))$ dans la région $x < 0$.

3.b. Justifier que ce champ est celui d'une onde stationnaire.

3.c. Déterminer en fonction de la longueur d'onde λ les positions des plans nodaux pour le champ électrique $\vec{E}$.

3.d. Définir et donner le sens physique du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Calculer sa moyenne temporelle dans le cas de l'onde résultante. Commenter.

4. Expliquer qualitativement l'apparition d'un courant surfacique $\vec{j}_s$ sur la surface $x=0$ du conducteur tout en justifiant sa direction. Déterminer l'expression de $\vec{j}_s$.

Force et Pression électromagnétique

5. On montre que le champ électromagnétique exerce sur une surface dS du miroir une force $d\vec{F}$ dont l'expression est donnée par : $d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{B}(x=0,t) dS$.

5.a. Expliciter $d\vec{F}$, en déduire qu'une pression P s'exerce sur le miroir dont on déterminera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ appelée pression de radiation. Exprimer $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_i \rangle$ de l'onde incidente.

5.b. Calculer $\langle P \rangle$ dans le cas d'un laser, supposée une OPPM, de puissance moyenne $\mathcal{P} = 3 \text{ mW}$ et dont la section droite est $s = 1 \text{ mm}^2$.

Cavité résonante

6. Un deuxième conducteur plan parfait est placé de sorte que sa surface réfléchissante située en $x=-L$, soit parallèle à celle du conducteur précédent située en $x=0$ (**Figure 2**).

6.a. Pour L fixée, quelles sont les conditions de quantification, faisant intervenir un entier n , que doivent satisfaire k et ω pour qu'une cavité d'onde stationnaire soit ainsi constituée ? On parlera de cavité résonante.

6.b. Ecrire dans ce cas, l'expression du champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_n(x,t)$ dans la cavité résonante.

6.c. Représenter en fonction de x , l'allure de $E_n(x,t)$ à $t = \frac{\pi}{2\omega_n}$ et à $t = \frac{3\pi}{2\omega_n}$, pour $n = 1, 2$ et 3 .

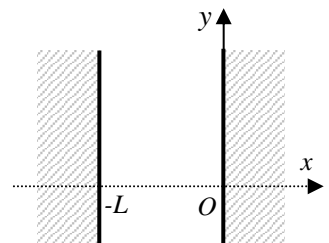


Figure 2

Partie II : Radar à effet Doppler

Un radar de contrôle routier est un instrument de mesure de la vitesse des véhicules circulant sur la voie publique, à l'aide d'ondes électromagnétiques de longueurs d'onde de l'ordre du centimètre. Il est utilisé afin d'identifier les contrevenants aux limites de vitesse. On se propose d'étudier son principe de fonctionnement.

Le radar, fixe dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$, émet des ondes électromagnétiques qui se réfléchissent sur le véhicule. Ces ondes sont captées par un récepteur incorporé dans le radar. On modélise le véhicule cible par un conducteur parfait perpendiculaire à l'axe (Ox) en translation rectiligne supposée uniforme dans le sens des x croissants.

On note $\vec{V}$ la vitesse du référentiel (R') lié à la cible par rapport au référentiel terrestre (R) (**Figure 3**). À l'instant t , la surface réfléchissante centrée sur O' est repérée par rapport à (R) , par $x_{cible} = \overline{OO'} = Vt$.

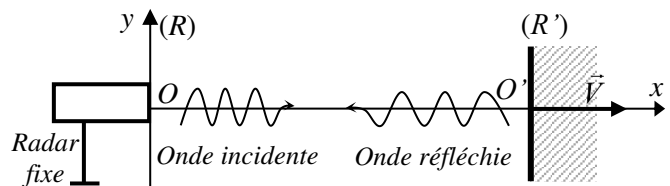


Figure 3 Véhicule mobile (cible)

L'émetteur situé en O , contenu dans le radar, émet une onde supposée plane progressive et monochromatique de fréquence f_i . Cette onde se réfléchit sur la cible mobile et revient vers le radar. La fréquence f_r de l'onde réfléchie est différente de celle de l'onde incidente : c'est l'effet Doppler.

On se propose de déterminer la relation entre la vitesse V de la cible et la différence de fréquences des deux ondes.

On note $(\vec{E}, \vec{B})$ le champ électromagnétique dans (R) , et $(\vec{E}', \vec{B}')$ le champ dans (R') .

7.a. Justifier que (R') est galiléen.

7.b. Ecrire l'expression de la force de Lorentz dans (R) puis dans (R') subie par une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel (R) et $\vec{v}'$ dans le référentiel (R') .

On rappelle que d'après la loi de composition des vitesses, on a : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.

En utilisant l'invariance de la force par changement de référentiels, montrer que les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ se déduisent des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par les relations :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \text{ et } \vec{B}' = \vec{B}.$$

8. Dans le référentiel (R) les champs électriques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos \left[2\pi f_i \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}_y \text{ et } \vec{E}_r(x, t) = rE_0 \cos \left[2\pi f_r \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}_y,$$

En déduire les expressions des champs électriques $\vec{E}'_i(x, t)$ et $\vec{E}'_r(x, t)$.

9. On rappelle que le champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

On supposera que dans le référentiel (R') la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de l'interface air/cible.

9.a. Exprimer $\vec{E}'_i(x_{cible}, t)$ et $\vec{E}'_r(x_{cible}, t)$. En déduire la fréquence f_r et le coefficient de réflexion r en fonction de f_i , V et c .

9.b. Comme $V \ll c$ et en faisant un développement limité au premier ordre en $\frac{V}{c}$, montrer que la variation de fréquence s'écrit $f_i - f_r \approx f_i \frac{2V}{c}$.

9.c. Exprimer au premier ordre en $\frac{V}{c}$, le coefficient de réflexion r et retrouver sa valeur dans le cas où la surface réfléchissante est immobile.

10. Quelle est la vitesse du véhicule mesurée par le radar sachant qu'il détecte une variation de fréquence égale à 4kHz dans le cas où le signal incident est de fréquence 24GHz ?

11. Calculer l'incertitude absolue ΔV sur la vitesse mesurée sachant que l'incertitude relative sur la différence de fréquence détectée est de 5% pour une limitation de vitesse de 110km/h .

Cette incertitude est, à l'avantage du conducteur, décomptée de la vitesse enregistrée. Le conducteur qui roule à 118km/h est-il en infraction ?

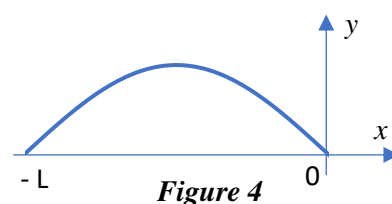
12. L'estimation de la vitesse du véhicule est réalisée au moyen de la transformée de Fourier rapide appliquée à un échantillonnage du signal sinusoïdal de fréquence $f_D = |f_i - f_r|$.

Sachant que la gamme des vitesses mesurables par le radar est $[10\text{km/h}, 180\text{km/h}]$, donner la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage $f_{\ell, \min}$ nécessaire à assurer toute la gamme des vitesses mesurables. On prendra $f_i = 24\text{GHz}$.

Partie III : Analogie avec la corde vibrante

On assimile la corde d'une guitare à une corde inextensible sans raideur de masse linéique $\mu = 3,2\text{mg cm}^{-1}$, tendue par une tension de module T_0 . Au repos, elle se confond avec l'axe Ox . La corde de longueur L est attachée aux points d'abscisses $x = -L$ et $x = 0$ (**Figure 4**).

On prendra $T_0 = 105\text{N}$ et $L = 65\text{cm}$.



On étudie les vibrations de la corde dans le plan (xOy) . Les petits mouvements transversaux sont selon Oy , de part et d'autre de la position $y = 0$. On cherche à exploiter l'analogie entre l'élongation $y(x, t)$ de la corde vibrante fixée à ses deux extrémités et le champ électrique $\vec{E}(x, t)$ dans la cavité résonante.

13. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par $y(x, t)$?

Pour la suite, on admet que $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

14. De quel type d'équation s'agit-il ? Quelle hypothèse énergétique conduit à ce type d'équation ?

15. Analyser la dimension physique du terme $\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. Que représente ce terme vis-à-vis de la propagation d'une onde le long de la corde ?

16. Quel est le terme correspondant à $\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ pour une OPPM dans le vide ?

17. Calculer la vitesse de propagation v de l'onde le long de la corde.

18. Les conditions aux limites imposent une quantification de la pulsation $\omega_n = n\omega_1$ pour $n = 1, 2 \dots$ etc. Par analogie avec l'onde électromagnétique dans la cavité résonante, expliciter ω_1 en fonction de v et L . En déduire la valeur de la fréquence f_1 correspondante.

19. Pour l'onde de pulsation ω_n , l'élongation s'écrit : $y_n(x, t) = Y_{0n} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin(n\omega_1 t)$

où Y_{0n} représente l'amplitude de cette onde.

Montrer que cette expression est compatible avec l'équation de propagation et les conditions aux limites.

Partie IV : États liés d'une particule dans un puits de potentiel

On se propose d'étudier le cas d'une particule quantique de masse m dans un puits de potentiel fini symétrique. Le potentiel est pris égal à zéro à l'intérieur du puits de largeur L et égal à V_0 à l'extérieur (**Figure 5**). L'état stationnaire de la particule d'énergie $E < V_0$ est décrit par la fonction d'onde

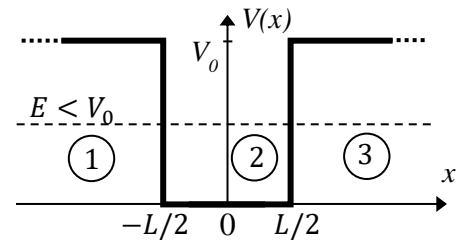


Figure 5

$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$, solution de l'équation de

Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$, où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

On posera : $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$; $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, et on désignera par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ les fonctions d'onde, respectivement dans les régions $x \leq -\frac{L}{2}$, $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ et $x \geq \frac{L}{2}$.

20. Décrire le comportement dynamique d'une particule classique ayant l'énergie $E < V_0$ en précisant la différence avec celui de la particule quantique étudiée.

21. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes régions. Déduire les solutions physiquement acceptables en justifiant votre réponse.

Le potentiel $V(x)$ est une fonction paire. Par conséquent, les solutions physiques sont symétriques $\varphi_s(x)$ ou antisymétriques $\varphi_a(x)$. Elles s'écrivent :

$$\varphi_s(x) \begin{cases} \varphi_{1s}(x) = Ae^{qx} \\ \varphi_{2s}(x) = B \cos(kx) \\ \varphi_{3s}(x) = Ae^{-qx} \end{cases} \text{ et } \varphi_a(x) \begin{cases} \varphi_{1a}(x) = Ae^{qx} \\ \varphi_{2a}(x) = C \sin(kx) \\ \varphi_{3a}(x) = -Ae^{-qx} \end{cases}$$

A , B et C étant des constantes d'intégration.

22. Écrire les équations de raccordement en $x = \frac{L}{2}$. En déduire les conditions de quantification de l'énergie selon la parité de la fonction d'onde.

23. On se place dans le cas où $E \ll V_0$.

23.a. Que deviennent les conditions de quantification ? Montrer alors qu'on retrouve les énergies du puits infini $E_n = n^2 E_1$ pour $n = 1, 2 \dots$ etc., tout en exprimant E_1 en fonction de $\hbar$, m et L .

- 23.b.** En écrivant dans ce cas les solutions $\varphi_s(x)$ et $\varphi_a(x)$ dans les différentes régions, identifier l'analogie avec la cavité électromagnétique et avec la corde vibrante.
- 23.c.** Tracer l'allure de la fonction d'onde et de la densité de probabilité de présence dans les cas : $n = 1, 2$ et 3 .
- 23.d.** Donner un exemple de système physique qui peut être modélisé par un puits infini.

Problème 2 : Étude du Bouclier thermique du télescope spatial James-Webb

Développé par la NASA en coopération avec l'agence spatiale européenne (ESA) et de l'agence spatiale canadienne (ASC), James-Webb est le plus grand et le plus onéreux télescope jamais lancé dans l'espace (**Figure 6**). Le lancement du télescope spatial James-Webb (JWST) a eu lieu le 25 décembre 2021.

A 1,5 million de kilomètres de la terre dans le sens antisolaire, le télescope James-Webb a atteint son orbite finale le 24 janvier 2022, au point de Lagrange L2, depuis laquelle il pourra observer les premières galaxies de l'univers. Le télescope est destiné à faire des observations du cosmos dans l'infrarouge proche et une partie du domaine visible (longueurs d'onde allant de 0,6 à 28 μm).

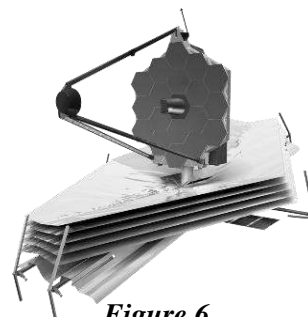


Figure 6

Les instruments scientifiques du télescope ne peuvent fonctionner qu'à de très basses températures, d'où la nécessité d'un bouclier thermique qui évite les perturbations par les radiations solaires.

Dans cette première partie du problème, nous supposons que le bouclier thermique est constitué par une seule couche homogène parallélépipédique d'un superisolant de faible conductivité thermique λ , de section S , d'épaisseur e , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique C (**Figure 7**).

La température du matériau ne dépend que de la seule variable d'espace x et de t . On néglige les transferts thermiques à travers les parois parallèles à l'axe (Ox) .

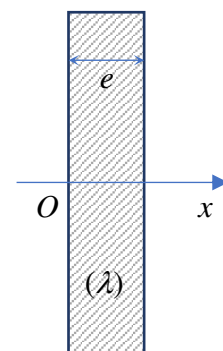


Figure 7

1. Énoncer la loi de Fourier en précisant les significations et les unités des différentes grandeurs.
2. À l'aide d'un bilan d'énergie sur une tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation de la conduction thermique régissant la variation de la température $T(x, t)$ à l'intérieur de la couche isolante.

On se place dans la suite du problème en régime stationnaire.

3. Donner la loi de variation de la température $T(x)$ en supposant que les deux faces de la couche sont maintenues aux températures $T(0) = T_1$ et $T(e) = T_1'$. En déduire la densité de flux thermique $\vec{J}_{th}$.
4. Déduire la puissance thermique P_{th} traversant une section S de la couche isolante.
5. Par analogie avec la résistance électrique d'un conducteur ohmique, définir et donner l'expression de la résistance thermique R_{th} de la couche isolante.

Le bouclier thermique du télescope se trouvant au point de Lagrange L2, reçoit un flux solaire sous une incidence normale à travers sa surface située en $x = 0$.

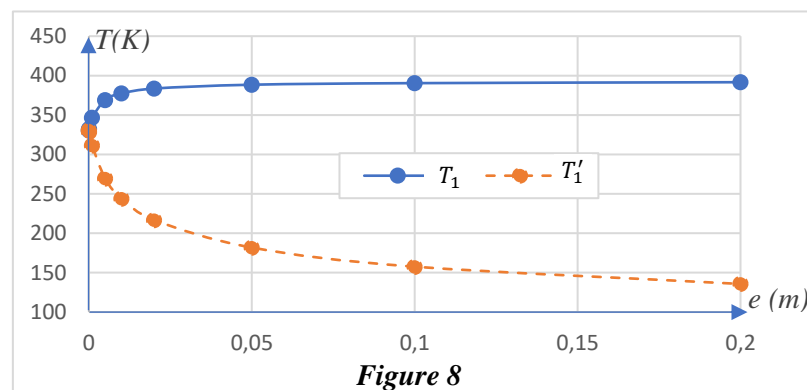
On suppose que le soleil se comporte comme un corps noir sphérique de rayon R_s à la température T_s . Le bouclier thermique constitué par la seule couche isolante, émet un rayonnement thermique à travers ses deux faces comme un corps noir.

On rappelle que la loi de Stefan stipule que la puissance surfacique rayonnée par un corps noir est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température $\frac{dP}{dS} = \sigma T^4$, σ étant la constante de Stefan.

6. Déterminer la puissance totale P rayonnée par le soleil en fonction de σ , R_s et T_s .
7. Déterminer la puissance solaire reçue par unité de surface du bouclier Φ_0 en fonction σ , R_s , T_s et la distance d entre le soleil et le point de Lagrange L2.
8. On suppose que le bouclier absorbe intégralement le flux solaire incident. Établir une relation entre les températures des deux faces du bouclier T_1 et T_1' en faisant un bilan thermique qui traduit l'équilibre radiatif du système.
9. Sachant que la densité de flux thermique est continue à la traversée de la deuxième face du bouclier, établir une deuxième relation entre T_1 et T_1' .
10. En déduire que la température T_1' vérifie l'équation suivante :

$$(T_1')^4 = \frac{\lambda}{\sigma e} \left(\left(\left(\frac{R_s}{d} \right)^2 T_s^4 - (T_1')^4 \right)^{\frac{1}{4}} - T_1' \right)$$

11. La résolution du système d'équations permet de représenter la variation de T_1 et T_1' en fonction de l'épaisseur e de la couche du super-isolant (**Figure 8**).



Interpréter ces deux courbes en étudiant les deux cas limites (couche de très faible épaisseur et couche très épaisse) et conclure quant à l'efficacité d'un bouclier thermique constituée d'une seule couche isolante assurant le bon fonctionnement des instruments du télescope.

On envisage l'étude d'un bouclier thermique constitué de deux couches de très faibles épaisseurs.

On suppose que la surface du bouclier est perpendiculaire à la direction du soleil. Les deux faces de chaque couche sont à la même température (**Figure 9**). La première couche reçoit un flux solaire surfacique Φ_0 et un flux surfacique émis par la deuxième couche. Cette dernière reçoit un flux émis par la première couche seulement. Chacune des deux couches émet un flux thermique par rayonnement par ces deux faces.

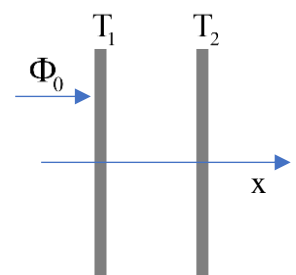


Figure 9

12. Établir un bilan thermique à l'équilibre radiatif, pour chaque couche.
13. En déduire la valeur de la température T_2 de la deuxième couche. Conclure.

Le télescope sera aveuglé si on ne le protège pas des rayonnements du soleil, de la terre, de la lune et de son propre électronique produisant des rayonnements thermiques. Le bouclier thermique de JWST est constitué de cinq couches, aussi fines qu'un cheveu humain et de la taille d'un court de tennis, faites de polyimide de type kapton (un matériau résistant et stable dans une large plage de température (entre -269°C et 452°C)).

14. Faire des bilans thermiques pour la première couche, la $n^{\text{ième}}$ couche ($n = 2, 3$ ou 4) et pour la cinquième couche.

15. En déduire qu'on aboutit à l'équation matricielle $AX = B$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \\ T_5^4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{\Phi_0}{\sigma} \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16. La matrice inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer les températures T_1 et T_5 de la première et la cinquième couche respectivement. Conclure.

En réalité, la première couche a un revêtement spécial en silicium traité qui permet de réfléchir une partie du rayonnement solaire. Le coefficient d'absorption du rayonnement solaire par cette couche est noté α .

On suppose que chacune des couches rayonne comme un corps noir et absorbe une fraction ε du rayonnement infrarouge provenant des couches voisines (**Figure 10**).

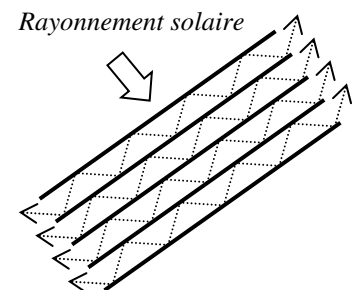


Figure 10

17. Faire un bilan thermique pour chaque couche traduisant l'équilibre radiatif et montrer qu'on obtient un système de cinq équations qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$A'X = B'$$

où A' et B' sont respectivement une matrice et un vecteur à déterminer.

18. La résolution du système d'équation précédent, nous permettra de déterminer les températures des différentes couches. En particulier, les températures de la première et de la cinquième couche sont données par :

$$\begin{cases} T_1^4 = \frac{16 + \varepsilon^4 - 12\varepsilon^2}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \frac{\alpha \Phi_0}{\sigma} \\ T_5^4 = \frac{\varepsilon^4}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \frac{\alpha \Phi_0}{\sigma} \end{cases}$$

Calculer T_1 et T_5 pour $\alpha = 0,9$ et $\varepsilon = 0,3$. Commenter.



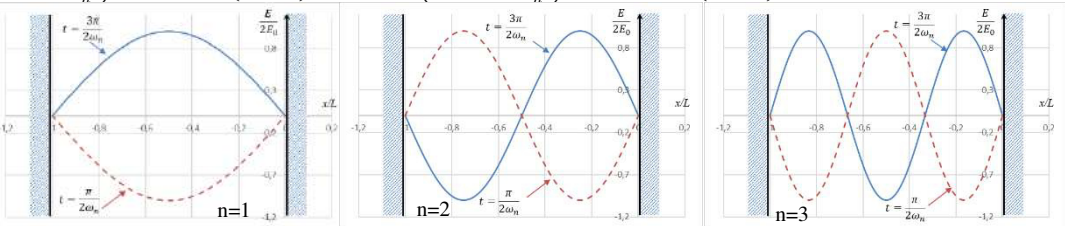
Éléments de réponse et Barème

Concours MP2022

Problème 1 (65 pts)

Partie I : Réflexion normale sur un conducteur parfait – Cavité résonante (22 pts)

1. 3 pts	Conductivité électrique est considérée comme infinie ($\gamma \rightarrow \infty$).	1
	• * $P = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ (Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$) finie $\rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ **Autre réponse acceptée : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ finie $\rightarrow \vec{E} = \vec{0}$	1
	• $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\vec{E} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait $\rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ abs de champ stationnaire $\rightarrow \vec{B} = \vec{0}$	1
2. 2 pts	À la traversée de l'interface vide du milieu conducteur : $\vec{E}(x \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ $\vec{E}$ est nul dans le conducteur parfait $(E_0 + E_{0r})e^{j\omega t} \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \forall t$ et $\sigma = 0$.	1
	• $\vec{E}(x \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}(x \rightarrow 0^+) = \vec{E}(x \rightarrow 0^-) \rightarrow \vec{E}$ est continu	0,5
	• $(E_0 + E_{0r})e^{j\omega t} \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0} \quad \forall t \Rightarrow E_0 + E_{0r} = 0 \Rightarrow r = \frac{E_{0r}}{E_0} = -1$	0,5
3.a. 2 pts	• $\vec{E}(x < 0, t) = \vec{E}_i(x < 0, t) + \vec{E}_r(x < 0, t) \Rightarrow \vec{E}(x < 0, t) = -2jE_0 \sin(kx)e^{j\omega t} \vec{u}_y$ Soit en notation réelle : $\vec{E}(x < 0, t) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y$	1
	• M.F. : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kx)e^{j\omega t} \vec{u}_z$; $\vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$	1
3.b. 1 pt	Oscillation du champ sans guère de propagation dans l'espace. Absence d'un terme de propagation de la forme $f(\omega t - kx) \rightarrow$ onde stationnaire.	1
3.c. 1 pt	Plans nodaux : $E(x_p, t) = 0 \forall t \Rightarrow \sin(kx_p) = 0 \Rightarrow kx_p = -p\pi$; $p \in \mathbb{N} \Rightarrow x_p = -p\frac{\pi}{k} = -p\frac{\lambda}{2}$	1
3.d. 2 pts	Vecteur de Poynting : direction et sens de propagation de l'énergie électromagnétique. Son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique véhiculée à travers cette surface. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$; $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Réel} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \vec{0}$; pas de propagation de l'énergie électromagnétique	0,5
		3× 0,5
4. 2 pts	Les forces électriques sont à l'origine de mouvements sinusoïdaux des électrons libres surfaciques, d'où apparition d'un courant surfacique de densité $\vec{j}_s$ dans la même direction que le champ électrique de l'onde incidente ($\vec{u}_y$) qui est à l'origine de l'onde réfléchie.	1
	A l'interface vide - conducteur : $\vec{B}(x \rightarrow 0^+) - \vec{B}(x \rightarrow 0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x \Rightarrow \vec{j}_s = 2\frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$	1
5.a. 3 pts	• $d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}(x=0, t) dS = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) dS \vec{u}_x$	1,5
	Force surfacique (pression de radiation) : $P = \left\ d\vec{F} \right\ / dS = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \Rightarrow \langle P \rangle = \epsilon_0 E_0^2$	0,5
	• $u_i = \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_i = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \Rightarrow \langle u_i \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$ Par conséquent : $\langle P \rangle = 2\langle u_i \rangle$	1
5.b. 1 pt	Cas d'un laser $P = 3 \text{ mW}$; $S = 1 \text{ mm}^2$: $\langle \vec{\pi}_i \rangle = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{2P}{cS}$; A.N : $\langle P \rangle = 2.10^{-5} \text{ Pa}$	0,5
		0,5
6.a. 1 pt	$\vec{E}(x \rightarrow -L^+, t) = \vec{0} \forall t \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega = \frac{n\pi c}{L} = \omega_n$; $n \in \mathbb{N}^*$	1

6.b. 1 pt	Champ électrique à l'intérieur de la cavité : $\vec{E}_n(x,t) = 2E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \vec{u}_y$	1
6.c. 3 pts	$\vec{E}_n\left(x,t = \frac{\pi}{2\omega_n}\right) = 2E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \vec{u}_y$ et $\vec{E}_n\left(x,t = \frac{3\pi}{2\omega_n}\right) = -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \vec{u}_y$ 	3× 1

Partie II : Radar à effet Doppler (16 pts)

7.a. 1 pt	Tout référentiel en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen. (R') est alors un référentiel galiléen.	1
7.b. 2 pts	Force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ dans (R) et $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$ dans (R')	1
	Invariance de la force par changement de référentiel : $\vec{F} = \vec{F}' \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}' = \vec{B}$	1
8. 2 pts	- Dans le référentiel (R) : $\begin{cases} \vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(2\pi f_i(t - x/c)) \vec{u}_y \\ \vec{E}_r(x,t) = rE_0 \cos(2\pi f_r(t + x/c)) \vec{u}_y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(2\pi f_i(t - x/c)) \vec{u}_z \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -r \frac{E_0}{c} \cos(2\pi f_r(t + x/c)) \vec{u}_z \end{cases}$ - Dans le référentiel (R') : $\begin{cases} \vec{E}'_i(x,t) = \vec{E}_i + \vec{V} \wedge \vec{B}_i = (1 - V/c) E_0 \cos(2\pi f_i(t - x/c)) \vec{u}_y \\ \vec{E}'_r(x,t) = \vec{E}_r + \vec{V} \wedge \vec{B}_r = r(1 + V/c) E_0 \cos(2\pi f_r(t + x/c)) \vec{u}_y \end{cases}$	1 1
9.a. 2 pts	$\vec{E}'_i(x_{cible}, t) = (1 - V/c) E_0 \cos(2\pi f_i(1 - V/c)t) \vec{u}_y$; $\vec{E}'_r(x_{cible}, t) = r(1 + V/c) E_0 \cos(2\pi f_r(1 + V/c)t) \vec{u}_y$ $\vec{E}(x_{cible}, t) = \vec{E}'_i(x_{cible}, t) + \vec{E}'_r(x_{cible}, t) = \vec{0} \quad \forall t \Rightarrow r = -\frac{1 - V/c}{1 + V/c}$ et $f_r = \frac{1 - V/c}{1 + V/c} f_i$	1 1
9.b. 2 pts	Pour $V \ll c$; $f_r = \frac{1 - V/c}{1 + V/c} f_i \approx (1 - V/c)^2 f_i \Rightarrow f_r \approx (1 - 2V/c) f_i \Rightarrow f_i - f_r \approx f_i \frac{2V}{c}$	2
9.c. 2 pts	Pour $V \ll c$; $r = -\frac{1 - V/c}{1 + V/c} \approx -(1 - V/c)^2 \Rightarrow r \approx -(1 - 2V/c)$ Pour une surface réfléchissante et immobile ($V = 0$) , on retrouve $r = -1$	1,5 0,5
10. 1 pt	$f_i - f_r \approx f_i \frac{2V}{c} \Rightarrow V = \frac{c}{2} \frac{f_i - f_r}{f_i}$; A.N : $V = 25 \text{ m.s}^{-1} = 90 \text{ km/h}$	1
11. 2 pts	$V = \frac{c}{2} \frac{f_i - f_r}{f_i} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(f_i - f_r)}{f_i - f_r} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta(f_i - f_r)}{f_i - f_r} V$; A.N : $\Delta V = 5,5 \text{ km/h}$ Le conducteur est en infraction (118 km/h est supérieure à $V + \Delta V = 115,5 \text{ km/h}$)	1 0,5 0,5
12. 2 pts	$f_D = f_i - f_r \approx f_i \frac{2V}{c}$; la valeur maximale de f_D est : $f_{D\max} \approx f_i \frac{2V_{\max}}{c}$ Condition de Shannon : $f_e > 2f_{D\max} = f_{e,\min} \Rightarrow f_{e,\min} = 4f_i \frac{V_{\max}}{c}$; A.N : $f_{e,\min} = 16 \text{ kHz}$	0,5 1 0,5

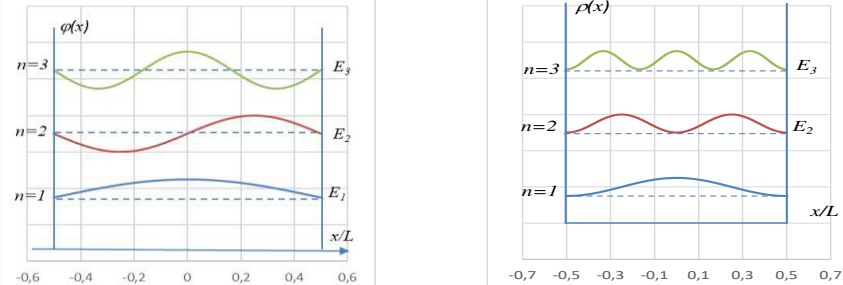
Partie III : Analogie avec la corde vibrante (10 pts)

13. 1 pt	Conditions aux limites : $y(x=0,t) = y(x=-L,t) = 0 \quad \forall t$	1
14. 2 pts	L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x,t)$: $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$ Cette équation est appelée équation de d'Alembert Pour établir cette équation, on suppose que les forces dissipatives sont négligeables	1 1

15. 1,5 pts	$\frac{T_0}{\mu} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \left[\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \right] = L.T^{-1} = [\text{vitesse}] \text{ elle s'exprime en } m.s^{-1}.$	1
	Elle représente la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde vibrante.	0,5
16. 1 pt	Le terme correspondant à $\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ pour une OPPM dans le vide est la célérité de propagation de la lumière dans le vide $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.	1
17. 1 pt	Pour $\mu = 3,2 \text{ mg.cm}^{-1} = 3,210^{-4} \text{ kg.m}^{-1}$; $T_0 = 105 \text{ N}$ La vitesse de propagation de l'onde est : $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{105}{3,210^{-4}}} = 572,8 \text{ m.s}^{-1}$	1
18. 2 pts	Par analogie avec une O.E.M. dans une cavité résonante, la pulsation ω_1 est $\omega_1 = \frac{\pi v}{L}$	1
	A.N : $\omega_1 = \frac{\pi \times 572,8}{0,65} = 2768,47 \text{ rad.s}^{-1}$ soit une fréquence de $f_1 = 440,6 \text{ Hz}$	1
19. 1,5 pts	$y_n(x,t) = Y_{0,n} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin(n\omega_1 t)$ $\left \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 y_n \right.$ $\left. \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = -(n\omega_1)^2 y_n \right.$ $\frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{T_0} n^2 \omega_1^2 y_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} y_n = + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = 0$	1
	D'autre part : $y_n(x=0,t) = y_n(x=L,t) = 0$, D'où l'expression de y_n est compatible avec l'équation de propagation et les conditions aux limites.	0,5

Partie IV : États liés d'une particule dans un puits de potentiel (17 pts)

20. 2 pts	Une particule classique ayant une énergie $E < V_0$ ne peut se trouver que dans la région (2) où le potentiel est nul. En $x = \pm \frac{L}{2}$, l'énergie cinétique de la particule se transforme intégralement en énergie potentielle, la vitesse de la particule s'annule et elle rebrousse chemin en restant piégée dans cette zone. Une particule quantique peut se trouver dans les régions (1) et (3) interdites pour une particule classique. La probabilité de présence d'une particule quantique à l'extérieur du puits est non nulle.	2
21. 3 pts	Equation de Schrödinger indépendante du temps : $\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} - q^2 \varphi_1(x) = 0 & \text{région (1)} \\ \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} + k^2 \varphi_2(x) = 0 & \text{région (2)} \\ \frac{d^2 \varphi_3(x)}{dx^2} - q^2 \varphi_3(x) = 0 & \text{région (3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{qx} + B_1 e^{-qx} & \text{pour } x \leq -\frac{L}{2} \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} & \text{pour } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \varphi_3(x) = A_3 e^{qx} + B_3 e^{-qx} & \text{pour } x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$	3 × 0,5
	Le module de la fonction d'onde ne peut être que finie. Par conséquent $B_1 = A_3 = 0$. $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{qx} & \text{pour } x \leq -\frac{L}{2} \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{jkx} + B_2 e^{-jkx} & \text{pour } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \varphi_3(x) = B_3 e^{-qx} & \text{pour } x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$	3 × 0,5

22. 4 pts	La fonction d'onde $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ sont continues en $x = \frac{L}{2}$. Les équations de raccordement en $x = \frac{L}{2}$ s'écrivent : $\begin{cases} \varphi_2\left(\frac{L}{2}\right) = \varphi_3\left(\frac{L}{2}\right) \\ \varphi_2'\left(\frac{L}{2}\right) = \varphi_3'\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases}$ - Cas des fonctions d'onde symétriques : $\begin{cases} B \cos\left(k \frac{L}{2}\right) = A e^{-q \frac{L}{2}} \\ -kB \sin\left(k \frac{L}{2}\right) = -q A e^{-q \frac{L}{2}} \end{cases} \Rightarrow \tan\left(k \frac{L}{2}\right) = \frac{q}{k}$ - Cas des fonctions d'onde antisymétriques : $\begin{cases} C \sin\left(k \frac{L}{2}\right) = -A e^{-q \frac{L}{2}} \\ kC \cos\left(k \frac{L}{2}\right) = q A e^{-q \frac{L}{2}} \end{cases} \Rightarrow \cotan\left(k \frac{L}{2}\right) = -\frac{q}{k}$	1 1,5 1,5
23.a. 3 pts	Dans le cas où $E \ll V_0$ (Puits infini) : $q \gg k \Rightarrow \frac{q}{k} \gg 1$ $\begin{cases} \tan\left(\frac{kL}{2}\right) \rightarrow +\infty \Rightarrow \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \rightarrow 0 \Rightarrow k = k_p = (2p+1)\frac{\pi}{L} ; & p \in \mathbb{N} \\ \cotan\left(\frac{kL}{2}\right) \rightarrow -\infty \Rightarrow \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \rightarrow 0 \Rightarrow k = k_p = \frac{2p\pi}{L} ; & p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ $\Rightarrow k = k_n = n \frac{\pi}{L} ; \quad n \in \mathbb{N}^*$ Or $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ d'où $E = E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2} = n^2 E_1 ; \quad E_1 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$	2 1
23.b. 2 pts	$\begin{cases} \varphi_{1s}(x) = 0 \\ \varphi_{2s}(x) = B \cos\left((2p+1)\pi \frac{x}{L}\right) \\ \varphi_{3s}(x) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_{1a}(x) = 0 \\ \varphi_{2a}(x) = C \sin\left(2p\pi \frac{x}{L}\right) \\ \varphi_{3a}(x) = 0 \end{cases}$ Par changement de variable $X = x - \frac{L}{2}$, la fonction d'onde à l'intérieur du puits s'écrit sous la forme $\varphi_2(X) = D \sin\left(n\pi \frac{X}{L}\right); \quad n \in \mathbb{N}^*$. Cette expression est analogue à celle de l'amplitude du champ électrique à l'intérieur d'une cavité électromagnétique résonante et à celle de l'amplitude de l'élongation d'une corde vibrante.	2
23.c. 2 pts		2 × 1
23.d. 1 pt	- Un semi conducteur (GaAs) situé entre deux couches d'isolant supposé parfait (AlGaAs) peut être modélisé par un puits de potentiel infini. - Toute particule quantique placée dans un potentiel de la forme $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, se comporte comme un oscillateur harmonique. On peut modéliser ce système par une particule placée dans un puits de potentiel infini.	1

Problème 2 : Étude du Bouclier thermique du télescope spatial James-Webb (35 pts)

1. 3 pts	Loi de Fourier : $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$; $\vec{J}_{th}$: la densité de flux thermique ; T : température en un point M du milieu	1
	λ est une constante positive appelée conductivité thermique. Cette constante ne dépend que de la nature du milieu.	1
	J_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$, T en K et λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$.	1
2. 2 pts	Bilan thermique pour une tranche comprise entre x et $x + dx$:	1
	$\left[J_{th}(x)S - J_{th}(x+dx)S \right] dt = \rho S dx C dT \Rightarrow -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} S dx dt = \rho S dx C dT$ $\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	1
3. 1,5 pts	En régime stationnaire, l'équation de la conduction thermique dans la couche isolante s'écrit :	0,5
	$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right) \Rightarrow T(x) = ax + b$	0,5
	Conditions aux limites : $\begin{cases} T(x=0) = T_1 \\ T(x=e) = T_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_1 \\ a = \frac{T_1' - T_1}{e} \end{cases} \text{ Donc } T(x) = \frac{T_1' - T_1}{e} x + T_1$	0,5
4. 1 pt	Densité de flux thermique dans la couche isolante : $\vec{J}_{th} = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{u}_x = \lambda \frac{T_1 - T_1'}{e} \vec{u}_x$	
	Puissance thermique traversant une section S de la couche isolante	1
5. 1 pt	$P_{th} = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot \vec{d^2 S} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_1')$	
	La résistance électrique est égale au rapport de la différence de potentiel par l'intensité de courant qui traverse le dipôle. En transfert thermique, l'équivalent de la différence de potentiel est la différence de température et l'équivalent de l'intensité de courant électrique est la puissance thermique. Par analogie électrique-thermique, on définit la résistance thermique comme étant le rapport de la différence de température par la puissance thermique traversant le système étudié. Soit $R_{th} = \frac{T_1 - T_1'}{P_{th}} = \frac{e}{\lambda S}$	1
6. 1 pt	Puissance surfacique rayonnée par le soleil : $M_s = \sigma T_s^4$	
	Puissance totale rayonnée par le soleil : $P_{soleil} = \sigma T_s^4 \cdot 4\pi R_s^2$ <i>surface soleil</i>	1
7. 1 pt	L'unité de surface du bouclier reçoit une fraction $\frac{1}{4\pi d^2}$ de la puissance rayonnée par le soleil.	
	Puissance solaire reçue par unité de surface du bouclier : $\Phi_0 = P_{soleil} \cdot \frac{1}{4\pi d^2} = \frac{R_s^2}{d^2} \sigma T_s^4$	1
8. 2 pts	Puissance surfacique rayonnée par le bouclier à travers sa surface orientée vers le soleil : $P_1 = \sigma T_1^4$	
	Puissance surfacique rayonnée par le bouclier à travers sa deuxième surface : $P_1' = \sigma (T_1')^4$ Bilan thermique du bouclier à l'équilibre radiatif : $\Phi_0 = P_1 + P_1' \Rightarrow \frac{R_s^2}{d^2} \sigma T_s^4 = \sigma T_1^4 + \sigma (T_1')^4 \Rightarrow T_1^4 + (T_1')^4 = \frac{R_s^2}{d^2} T_s^4 \quad (I)$	2
9. 1 pt	Continuité de la densité de flux thermique au niveau de la deuxième face du bouclier :	
	$\sigma (T_1')^4 = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \Rightarrow \sigma (T_1')^4 = \lambda \frac{T_1 - T_1'}{e} \quad (II)$	1
10. 2 pts	(I) et (II) $\Rightarrow$	
	$\begin{cases} T_1^4 = \frac{R_s^2}{d^2} T_s^4 - (T_1')^4 \\ (T_1')^4 = \frac{\lambda}{\sigma e} \left(\left(\frac{R_s^2}{d^2} T_s^4 - (T_1')^4 \right)^{\frac{1}{4}} - T_1' \right) \end{cases}$	2

11. 2 pts	Pour de très faibles épaisseurs ($e \leq 1 \text{ mm}$), les deux faces de la couche isolante sont pratiquement à la même température ($T \approx 330 \text{ K}$). La différence de température entre les deux faces augmente au fur et à mesure que l'épaisseur de la couche tend vers l'infini. ($T_1 \approx 392 \text{ K}$ lorsque $e > 5 \text{ cm}$). Même pour des couches très épaisses, la température de la deuxième face n'est pas assez basse pour permettre le bon fonctionnement du télescope dans l'infrarouge. La température de fonctionnement ne doit pas dépasser -223°C .	2×1
12. 2 pts	Bilan thermique à l'équilibre radiatif pour la première couche : $\sigma ST_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 + \sigma ST_2^4 = 2\sigma ST_1^4 \Rightarrow T_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 + T_2^4 = 2T_1^4$ Bilan thermique à l'équilibre radiatif pour la deuxième couche : $\sigma T_1^4 = 2\sigma T_2^4 \Rightarrow T_1^4 = 2T_2^4$	1 1
13. 3 pts	$\begin{cases} T_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 + T_2^4 = 2T_1^4 \\ T_1^4 = 2T_2^4 \end{cases} \Rightarrow T_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 + T_2^4 = 4T_2^4 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{R_s}{d}} T_s$ A.N : $T_2 = 298,6 \text{ K}$; Température très grande par rapport à la température de fonctionnement du télescope.	2 1
14. 3 pts	Bilan thermique de la première couche $\Phi_0 S + \sigma ST_2^4 = 2\sigma ST_1^4 \Rightarrow 2T_1^4 - T_2^4 = T_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 = \frac{\Phi_0}{\sigma}$, Pour la n ^{ième} couche (n=2 ; 3 ou 4) : $2\sigma ST_n^4 = \sigma ST_{n-1}^4 + \sigma ST_{n+1}^4 \Rightarrow -T_{n-1}^4 + 2T_n^4 - T_{n+1}^4 = 0$ et pour la 5 ^{ième} couche : $2\sigma ST_5^4 = \sigma ST_4^4 \Rightarrow -T_4^4 + 2T_5^4 = 0$	1 1 1
15. 2 pts	$\begin{cases} 2T_1^4 - T_2^4 = \Phi_0 / \sigma \\ -T_1^4 + 2T_2^4 - T_3^4 = 0 \\ -T_2^4 + 2T_3^4 - T_4^4 = 0 \\ -T_3^4 + 2T_4^4 - T_5^4 = 0 \\ -T_4^4 + 2T_5^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow AX = B \text{ Où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \\ T_5^4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2
16. 2,5 pts	$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \\ T_5^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0 / \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1^4 = \frac{5 \Phi_0}{6 \sigma} \\ T_5^4 = \frac{1 \Phi_0}{6 \sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \left(\frac{5 \Phi_0}{6 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R_s}{d}} T_s \\ T_5 = \left(\frac{1 \Phi_0}{6 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R_s}{d}} T_s \end{cases}$ A.N : $\begin{cases} T_1 = 375,47 \text{ K} \\ T_5 = 251,09 \text{ K} \end{cases}$ T_5 est très grande ce qui empêche le bon fonctionnement du télescope.	1 + 1 0,5
17. 3 pts	Bilan thermique de la 1 ^{ère} couche : $\alpha \Phi_0 S + \varepsilon \sigma ST_2^4 = 2\sigma ST_1^4 \Rightarrow 2T_1^4 - \varepsilon T_2^4 = \alpha T_s^4 \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 = \alpha \Phi_0 / \sigma$ Pour la n ^{ième} couche (n=2 ; 3 ou 4) : $2\sigma ST_n^4 = \varepsilon \sigma ST_{n-1}^4 + \varepsilon \sigma ST_{n+1}^4 \Rightarrow -\varepsilon T_{n-1}^4 + 2T_n^4 - \varepsilon T_{n+1}^4 = 0$ et pour la 5 ^{ième} couche : $2\sigma ST_5^4 = \varepsilon \sigma ST_4^4 \Rightarrow -\varepsilon T_4^4 + 2T_5^4 = 0$ D'où $\begin{cases} 2T_1^4 - \varepsilon T_2^4 = \alpha \Phi_0 / \sigma \\ -\varepsilon T_1^4 + 2T_2^4 - \varepsilon T_3^4 = 0 \\ -\varepsilon T_2^4 + 2T_3^4 - \varepsilon T_4^4 = 0 \\ -\varepsilon T_3^4 + 2T_4^4 - \varepsilon T_5^4 = 0 \\ -\varepsilon T_4^4 + 2T_5^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'X = B' \text{ où } A' = \begin{pmatrix} 2 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 2 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 2 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 2 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} \alpha \Phi_0 / \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,5 1 0,5 1
18. 2 pts	$\begin{cases} T_1 = \left(\frac{16 + \varepsilon^4 - 12\varepsilon^2}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \frac{\alpha \Phi_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{16 + \varepsilon^4 - 12\varepsilon^2}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R_s}{d}} T_s \\ T_5 = \left(\frac{\varepsilon^4}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \frac{\alpha \Phi_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\varepsilon^4 \alpha}{32 + 6\varepsilon^4 - 32\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R_s}{d}} T_s \end{cases}$ A.N : $\begin{cases} T_1 = 323,75 \text{ K} \\ T_5 = 49,41 \text{ K} \end{cases}$ Le bouclier permet de protéger le télescope des rayonnements solaires et maintenir une température assez basse.	1 1