



Concours

Mathématiques – Physique & Technologie

Epreuve de Physique

Date : 02 Juin 2025

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

- Cette épreuve comporte 30 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve, même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte quatre parties indépendantes.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Si l'espace consacré à la réponse d'une question semble insuffisant, le candidat peut utiliser la feuille à la fin de l'épreuve en signalant le numéro de la question.

Données numériques :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Permittivité absolue du vide : $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$

Conductivité électrique de l'acier : $\gamma = 6.10^6 \text{ S.m}^{-1}$

Constante de Stefan : $\sigma_{st} = 5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

Grandeurs apparaissant dans l'équation de la chaleur, relatives à l'acier :

$$\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3} \quad ; \quad c = 640 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad ; \quad \lambda = 46 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Conventions :

- La grandeur complexe associée à une grandeur réelle X est notée $\underline{X}$.
- Le complexe conjugué de grandeur $\underline{X}$ est noté $\underline{X}^*$.

Formulaire :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{X}) = 0$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad ; \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad ; \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses.

Q1. On cherche à échantillonner le signal $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 1 \text{ kHz}$ sans perte d'information. Dans quel cas le critère de Shannon est-il vérifié :

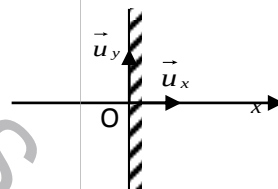
- ☐ La période d'échantillonnage est égale à 0,1 ms.
- ☐ La période d'échantillonnage est égale à 0,1 s.
- ☐ La fréquence d'échantillonnage est égale à 1 kHz.
- ☐ La fréquence d'échantillonnage est égale à 100 kHz.

Q2. On considère l'onde électromagnétique dans le vide de champ électrique, en notation complexe : $\vec{E} = E_0 (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ikz}$, avec k un réel positif. Son champ magnétique vaut :

- ☐ $\vec{B} = -i \frac{E_0}{c} (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$
- ☐ $\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\vec{u}_y + i\vec{u}_x) e^{i(\omega t - kz)}$
- ☐ $\vec{B} = \frac{E_0}{c} [\sin(\omega t - kz) \vec{u}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y]$
- ☐ $\vec{B} = \frac{E_0}{c} [\cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{u}_y]$

Q3. Une onde progressive plane, monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, se propage dans le vide dans le demi-espace $x < 0$. Elle rencontre sous une incidence normale, un milieu parfaitement conducteur occupant le demi-espace $x \geq 0$. Les composantes du champ électrique de l'onde incidente s'écrivent :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$



Les composantes du champ électrique réfléchi s'écrivent :

- ☐ $\vec{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{pmatrix}$
- ☐ $\vec{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0y} \cos(-kx - \omega t) \\ -E_{0z} \cos(-kx - \omega t + \varphi) \end{pmatrix}$
- ☐ $\vec{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0y} \cos(-kx - \omega t + \varphi) \\ E_{0z} \cos(-kx - \omega t) \end{pmatrix}$
- ☐ $\vec{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0y} \cos(kx - \omega t - \varphi) \\ -E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{pmatrix}$

Q4. On interpose un analyseur entre une source émettant une lumière polarisée elliptiquement et un écran. Après un tour complet de l'analyseur, on observe sur l'écran :

- ☐ deux minimums d'intensité.
- ☐ une tache lumineuse invariante.
- ☐ deux extinctions totales de lumière.
- ☐ deux maximums d'intensité.

Q5. Un paquet d'onde est un groupe d'ondes monochromatiques qui s'étale sur une largeur spectrale $\Delta\nu$. Ce paquet d'onde possède une largeur de cohérence ℓ_c .

Les franges d'interférence sont observables si la différence de marche :

- ☐ $\delta \ll \ell_c$
☐ $\delta = \ell_c$
☐ $\delta > \ell_c$
☐ $\delta \gg \ell_c$

Q6. Une particule quantique de masse m est piégée dans un puits de potentiel infini de largeur L . La particule est dans état stationnaire d'énergie, caractérisé par la fonction d'onde $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\exp(-iE_n t/\hbar)$, où E_n désigne les niveaux d'énergie possibles de la particule, n étant un nombre entier non nul :

- ☐ $E_n = n E_1$
☐ $E_n = n^2 E_1$
☐ $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$
☐ $E_1 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$

Q7. L'état d'une particule quantique de masse m , d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = p_x \vec{u}_x = \hbar k \vec{u}_x$ est représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t) = \psi_0 \exp(\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et))$.

- ☐ La vitesse de phase $v_\phi = \frac{E}{p_x}$
☐ La vitesse de phase $v_\phi = \frac{p_x}{E}$
☐ La vitesse de groupe $v_g = \frac{E}{m}$
☐ La vitesse de groupe $v_g = \frac{\hbar k}{m}$

Q8. Soit un système où les particules indépendantes occupent des états d'énergie E_i et $E_j > E_i$:

- ☐ $k_B T \ll E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_j est négligeable par rapport à celle de E_i .
☐ $k_B T \ll E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_i est négligeable par rapport à celle de E_j .
☐ $k_B T \gg E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_i est beaucoup plus grande que celle de E_j .
☐ $k_B T \approx E_j - E_i$: les populations de deux états E_i et E_j sont égales.

Q9. Pour un système composé de N particules indépendantes pouvant occuper deux états d'énergie $E_1 = -\varepsilon$ et $E_2 = \varepsilon$, l'énergie moyenne du système est donnée par :

- ☐ $-\frac{\varepsilon}{N} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$
☐ $-\varepsilon N \tanh\left(\frac{N\varepsilon}{k_B T}\right)$
☐ $-\frac{\varepsilon}{N} \tanh\left(\frac{N\varepsilon}{k_B T}\right)$
☐ $-N\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$

Q10. La capacité thermique molaire d'un solide dans le modèle d'Einstein classique à haute température est :

- ☐ $C_{vm} = \frac{5}{2}R$
☐ $C_{vm} = \frac{7}{2}R$
☐ $C_{vm} = 3R$
☐ $C_{vm} = 3nR$

Deuxième Partie : Chauffage par induction d'une plaque

La trempe de l'acier, qui consiste en un chauffage suivi d'un refroidissement rapide d'une plaque d'acier, assure l'augmentation de la dureté en surface de la plaque.

Un milieu conducteur en acier de conductivité électrique γ s'étend dans le demi-espace $z \geq 0$.

A l'extérieur du conducteur, le champ magnétique est uniforme et varia sinusoïdalement dans le temps :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (\text{Figure 1}).$$

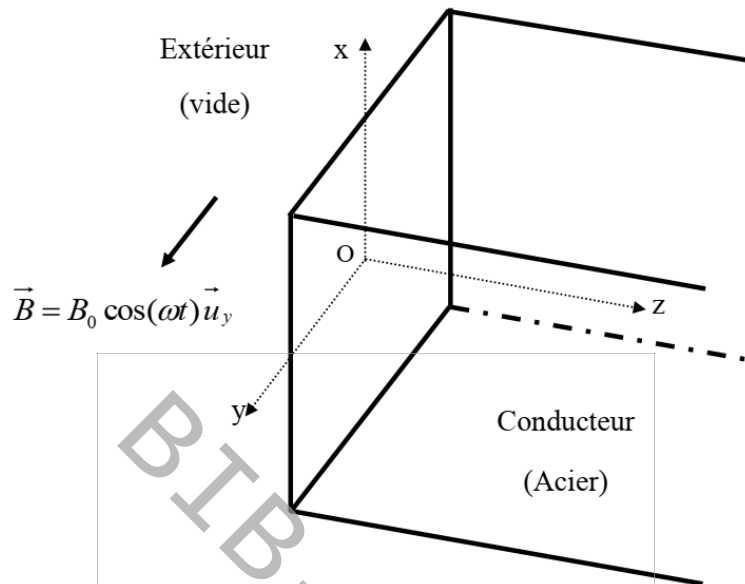


Figure 1

I. Propriétés des champs dans le conducteur

Q11. Écrire les quatre équations de Maxwell dans ce conducteur ohmique. On ne fera intervenir que la densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$, le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$, la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ et les constantes c , μ_0 et γ .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Q12. On se place en régime sinusoïdal, on associe alors à toute grandeur dépendant du temps un complexe en $\exp(i\omega t)$.

Réécrire les équations de Maxwell entre $\underline{\vec{j}}(M,t)$, $\underline{\vec{B}}(M,t)$ et $\underline{\rho}(M,t)$ en simplifiant les dérivées partielles par rapport au temps.

[illegible]

Q13. Justifier que $\rho(M, t)$ est nulle.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. A large, light gray watermark reading "HIP-IPETS" is oriented diagonally across the center of the page. The watermark is composed of bold, sans-serif capital letters. The background is white, and there are faint horizontal lines visible across the entire page.

Q14. En partant des équations écrites précédemment, trouver à quelle condition on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction ? Montrer que la condition peut s'écrire sous la forme $\omega\tau \ll 1$.

Donner l'expression de τ et son unité. Calculer sa valeur numérique. Vérifier que l'approximation proposée est valable si la fréquence du champ utilisée est inférieure au MHz.

[illegible]

Q16. On cherche dans le conducteur une solution de ces équations de la forme :

$$\vec{B}(z,t) = \underline{B}(z,t) \vec{u}_y = \underline{B}_0' \exp i(\omega t - \underline{k}z) \vec{u}_y$$

où $\underline{B}_0'$ et $\underline{k}$ peuvent être complexes.

Déterminer la forme que doit alors prendre la densité de courant $\vec{j}(z,t)$ en fonction de $\underline{k}$, $\underline{B}(z,t)$ et μ_0 .

Établir alors l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de μ_0 , γ et ω .

II. Cas du conducteur infini

Le conducteur occupe tout le demi-espace $z \geq 0$ (Figure 1).

Détermination de B et j

Q17. Déterminer les deux expressions possibles de $\underline{k}$. Justifier le choix $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$, avec δ est une grandeur dont on donnera l'expression en fonction de μ_0 , γ et ω .

Donner pour $\underline{k}$ une seconde expression en utilisant la notation exponentielle.

Blank area for drawing or writing, featuring horizontal dotted lines and a central rectangular box with a diagonal watermark reading "BIB-IPETIS".

Q18. Rappeler la relation de passage pour $\vec{B}$ en $z = 0$. Montrer que $B_0' = B_0$.

Blank area for drawing or writing, featuring horizontal dotted lines.

Q19. Établir les expressions réelles $\vec{B}(z,t)$ et $\vec{j}(z,t)$ (utiliser la notation δ pour exprimer ces résultats).
L'une des grandeurs est en cosinus et l'autre fait intervenir un sinus.

BIBLIOTHÈQUE

Q20. Préciser l'unité de δ . Quel nom donne-t-on à cette grandeur ? Justifier cette nomination.

BIBLIOTHÈQUE

Q21. Application numérique : calculer δ pour le conducteur considéré aux fréquences $f_1 = 100\text{ Hz}$ et $f_2 = 125\text{ kHz}$. Conclure.

BIBLIOTHÈQUE

Détermination de la puissance surfacique reçue

Q22. Donner l'expression de la puissance volumique $\frac{dP_J}{d\tau}$ cédée par effet Joule au conducteur.
Déterminer sa valeur moyenne temporelle.

Q23. Exprimer alors la puissance moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ cédée par effet Joule à un cylindre d'axe parallèle à Oz, de longueur infinie et de section S, découpé dans le conducteur.

Q24. En déduire la puissance thermique moyenne φ_0 reçue par unité de surface du conducteur. On écrira le résultat sous la forme $\varphi_0 = K_s B_0^2 \omega \delta$ et l'on précisera l'expression de K_s .

Q25. Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\pi}(z = 0^+, t) \rangle$.
Comparer son module à φ_0 . Commenter.

Q26. Application numérique : calculer φ_0 pour la fréquence $f_2 = 125 \text{ kHz}$ et un champ magnétique extérieur d'amplitude $B_0 = 0,5 \text{ T}$.

Autre méthode de détermination de la puissance surfacique reçue

Q27. Quel est le courant élémentaire dI qui traverse un rectangle élémentaire (Figure 2) parallèle au plan yOz , de côtés élémentaires dy et dz , orienté selon $\vec{u}_x$? (On exprimera le résultat en fonction de $\underline{k}$, $\underline{B}(z,t)$ et μ_0).

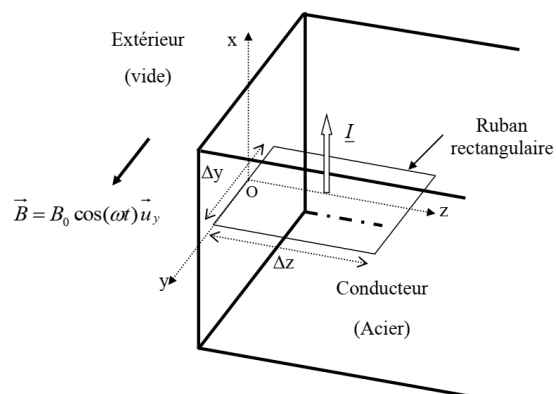


Figure 2

Q28. Déterminer le courant total $\underline{I} = \underline{I}_0 \exp(i\omega t)$ qui traverse un ruban de largeur $\Delta y = \ell$ s'étendant sur toute la profondeur du conducteur ($\Delta z \rightarrow \infty$). Exprimer $\underline{I}_0$ en fonction de μ_0 , ℓ et B_0 .

Q29. On n'envisage ici que le cas où ce même courant $\underline{I} = \underline{I}_0 \exp(i\omega t)$ serait uniformément réparti sur une épaisseur δ .

Quelle serait alors l'expression de la densité volumique de courant $\underline{j}' = \underline{j}'_0 \exp(i\omega t)$, le courant étant nul en tout point en dehors de la couche d'épaisseur δ ?

Exprimer φ_0' , la puissance thermique moyenne cédée par effet joule au conducteur par unité de surface dans le cadre de cette hypothèse. Comparer φ_0' et φ_0 . Commenter.

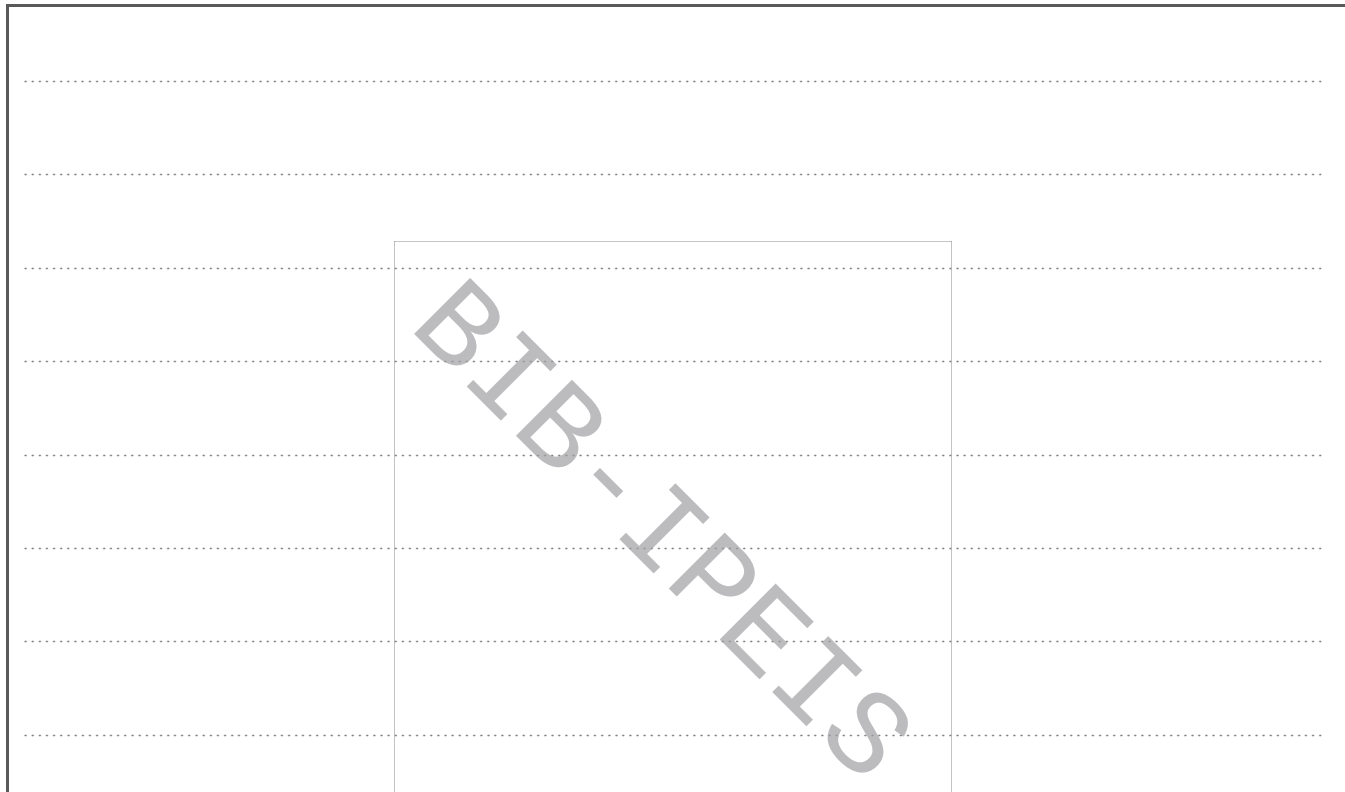
III. Plaque conductrice d'épaisseur finie

Le conducteur est maintenant compris entre les deux plans $z = 0$ et $z = 2a$. Il est d'extension infinie dans les directions Ox et Oy . A l'extérieur, de part et d'autre de la plaque, le champ magnétique s'écrit toujours $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

Détermination de B

Q30. Montrer que $\vec{B}(z, t)$ dans la plaque peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(z, t) = (\underline{C} \exp(\underline{k}_0 z) + \underline{D} \exp(-\underline{k}_0 z)) \exp(i\omega t) \vec{u}_y, \text{ avec } \underline{k}_0 = \frac{1+i}{\delta}.$$



Q31. Préciser les nouvelles conditions aux limites.



Q32. Après calculs, on trouve pour le champ magnétique dans le conducteur l'expression suivante :

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \frac{\text{ch}[\underline{k}_0(z-a)]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

La fonction $\text{ch}(\underline{u})$ étant définie de manière usuelle par $\text{ch}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(e^{\underline{u}} + e^{-\underline{u}})$.

Montrer que cette expression de $\vec{B}(z, t)$ vérifie les conditions aux limites.

[illegible]

Détermination de la puissance volumique moyenne reçue

35. Déterminer la puissance moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ cédée par effet Joule dans la portion de plaque de section S et d'épaisseur $2a$. (On peut utiliser $\langle j^2 \rangle = \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}^*}{2}$, puis intégrer la puissance volumique sur tout le volume de la portion considérée).

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal grey ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. In the lower center, there is a light blue rectangular box. Overlaid on this box is a large, semi-transparent watermark that reads "BIB-IT" in a bold, sans-serif font, oriented diagonally from the bottom-left towards the top-right.

Q36. Déterminer la puissance volumique moyenne p_v . On écrira le résultat sous la forme $p_v = K_v B_0^2 \frac{\omega}{\delta^2}$ et l'on précisera l'expression de K_v .

[illegible]

Q37. Calculer p_v pour $f = 100 \text{ Hz}$ et pour un champ magnétique extérieur d'amplitude $B_0 = 2,5 \text{ T}$, lorsque la largeur de la plaque d'acier est $2a = 3 \text{ mm}$.

Troisième Partie : traitement thermique de la plaque

I. Temps caractéristiques des échanges

Pour une plaque chauffée en contact avec l'air extérieur, peuvent se développer trois types d'échanges thermiques :

- La conduction.
- Les échanges conducto-convectifs.
- Le rayonnement.

Loi de Fourier

En absence des autres types d'échanges thermiques, la conduction obéit à l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = p_v.$$

Q38. Que représentent les grandeurs ρ , c , λ et p_v dans l'équation de la chaleur ?

Q39. Déterminer la dimension du coefficient D de diffusivité thermique ($D = \frac{\lambda}{\rho c}$).

Q40. En déduire une durée caractéristique τ_F pour la diffusion sur une longueur égale à $2a$ en fonction de D et a puis en fonction de ρ , c , λ et a .

Loi de Newton

L'échange thermique par conducto-convection obéit à la loi de Newton : $\varphi = h(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$.

Q41. Que représente φ dans la loi de Newton ? Dans quel sens l'échange modélisé par cette loi s'effectue-t-il ?

On considère une barre cylindrique de surface de base S et d'épaisseur $2a$ à la température initiale T_0 , plongée dans un milieu de température T_a avec lequel elle échange de l'énergie uniquement par transfert conducto-convectif caractérisé par h .

La surface d'échange est S (le reste de la barre est supposé isolé). A chaque instant la barre est considérée comme isotherme à la température $T(t)$.

Q42. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

Q43. En déduire alors un temps caractéristique τ_N pour une épaisseur égale à $2a$ en fonction de ρ , c , h et a .

Loi de Stefan

On considère une barre cylindrique de surface de base S et d'épaisseur $2a$ à la température initiale T_0 , plongée dans un milieu de température T_a . Elle échange de l'énergie uniquement par transfert radiatif qui obéit à la loi de Stefan : $\varphi = \sigma_{st} T^4$.

La surface d'échange est S . La barre et l'extérieur rayonnent tous deux selon la loi de Stefan. A chaque instant la barre est considérée comme isotherme à la température $T(t)$.

Q44. Établir l'équation différentielle pour $T(t)$.

Q45. On suppose que T est proche de T_a . En déduire que le temps caractéristique τ_s pour les échanges radiatifs pour une épaisseur égale à $2a$ s'écrit : $\tau_s = \frac{\rho c a}{2\sigma_{st} T_a^3}$

Q46. Applications numériques : compléter les tableaux suivants :

Données supplémentaires :

$T_a = 700\text{ }^\circ\text{C}$; Pour les transferts conducto-convectifs acier-air : $h = 10\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Expérience n°1	$2a = 3\text{ mm}$	
$\tau_F = \dots\dots\dots$	$\tau_N = \dots\dots\dots$	$\tau_S = \dots\dots\dots$

Expérience n°2	$2a = 20\text{ mm}$	
$\tau_F = \dots\dots\dots$	$\tau_N = \dots\dots\dots$	$\tau_S = \dots\dots\dots$

Q47. Quel est le type de transfert qui prédomine dans l'acier ?

Pour la suite, afin de simplifier le modèle étudié, on ne tient plus compte du rayonnement mais on prend pour h la valeur numérique : $h = 30 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

II. Chauffage de la plaque

Une plaque conductrice en acier d'épaisseur $2a$ (comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2a$) est soumise pendant une durée déterminée à un champ magnétique variable de pulsation ω (avec $\omega = 2\pi f$). Les courants qui se développent au sein de la plaque engendrent un échauffement par effet Joule qui sera décrite comme suit :

- Si la plaque est de faible épaisseur ($2a = 3 \text{ mm}$), elle s'échauffera sous l'effet d'une puissance volumique calorifique uniformément répartie en son volume $p_v = K_v B_0^2 \frac{\omega}{\delta^2}$, avec $K_v = 0,6$ (dans les unités S.I.); $B_0 = 2,5 \text{ T}$, $f = 100 \text{ Hz}$ et $\delta = 20,5 \text{ mm}$.
- Si la plaque est de grande épaisseur ($2a = 20 \text{ mm}$), la chaleur est produite au niveau de la surface, de part et d'autre de la plaque en $z = 0$ et $z = 2a$. La puissance thermique par unité de surface s'écrivant $\phi_0 = K_s B_0^2 \omega \delta$ avec $K_s = 0,2 \cdot 10^6$ (dans les unités S.I.); $B_0 = 0,5 \text{ T}$, $f = 125 \text{ kHz}$ et $\delta = 0,58 \text{ mm}$.

Expérience n°1 : chauffage d'une plaque mince

La Figure 3 schématise l'installation permettant le chauffage de la plaque d'acier d'épaisseur $2a$ et de surface S (de volume $2aS$), défilant à vitesse constante entre deux inducteurs fixes et parallèles à la plaque.

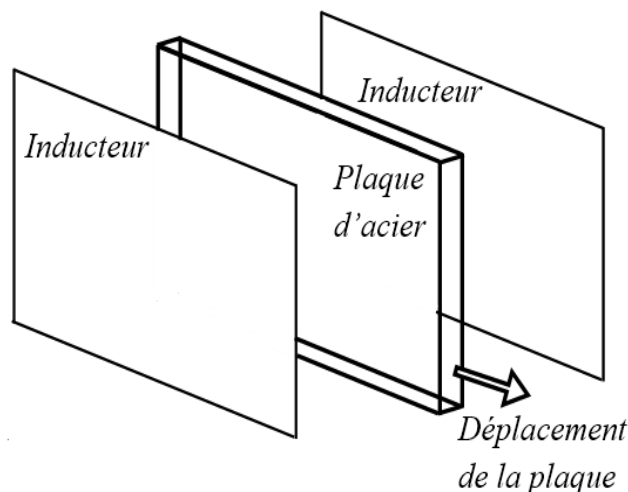


Figure 3

Q48. Exprimer la puissance thermique totale P_T créée au sein de la plaque par les inducteurs en fonction de p_v , S et a .

A chaque instant la température est uniforme au sein de la plaque. La plaque glisse entre les deux inducteurs qui provoquent son échauffement, elle est entourée d'air à la température uniforme et constante $T_a = 700\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Q49. Effectuer un bilan d'énergie pour toute la plaque pendant dt (en négligeant la surface latérale par rapport aux surfaces de bases).

En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ en faisant apparaitre une constante de temps.

BIB-IPETS

Q50. Résoudre cette équation. La plaque étant initialement à la température T_a .

Q51. Déterminer l'élévation limite de température que peut provoquer ce procédé. Application numérique.

This image shows a blank sheet of white paper with four horizontal dashed lines, resembling notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Q52. Combien de temps faut-il pour atteindre une température de 910 °C ?

Expérience n°2 : chauffage d'une plaque épaisse

Tout effet thermique autre que la diffusion est ici négligé. On étudie uniquement l'échauffement de la paroi située en $z=0$ (on ne tient pas compte du phénomène identique se produisant au niveau de la paroi $z=2a$).

La plaque est considérée comme un conducteur thermique semi-infini occupant tout le demi-espace $z \geq 0$ et recevant de l'extérieur un flux surfacique constant φ_0 à travers sa paroi ($z = 0$). L'extérieur est toujours constitué d'air à la température $T_a = 700^\circ\text{C}$ qui est aussi la température initiale de la plaque.

Q53. Quelle est la grandeur qui, au sein du conducteur, indique la valeur de la densité de flux thermique ? Quelle en est l'expression ?

Q54. Écrire l'équation vérifiée par $\theta(z,t) = T(z,t) - T_a$ dans le conducteur (en faisant apparaître la diffusivité thermique D).

Q55. Établir la condition aux limites vérifiée pour $\theta(z,t)$ imposée par le flux en $z = 0$.

Q56. La résolution de cette équation repose sur les fonctions suivantes :

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2} dv \quad (\text{avec } \frac{d}{du} f(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \text{ et } f(0) = 1)$$

$$g(u) = \int_u^{+\infty} f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \cdot f(u) \quad (\text{avec } \frac{d}{du} g(u) = -f(u))$$

Toutes ces fonctions décroissent exponentiellement quand u tend vers l'infini.

La solution de l'équation de la chaleur, dans les conditions de l'expérience, s'écrit :

$$\theta(z,t) = T(z,t) - T_a = A \sqrt{Dt} \cdot g\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où A est une constante. Exprimer A en fonction de φ_0 et λ puis donner sa valeur numérique et son unité.

Q57. Calculer $g(0)$ et en déduire la température de surface de la plaque en fonction du temps et de φ_0 .

Q58. Evaluer la durée maximale d'exposition de la plaque au champ magnétique, sachant que la température de l'air est $T_a = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ et que la plaque ne doit pas atteindre son point de fusion ($1536\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Quatrième Partie : Etude de l'effet Zeeman avec un interféromètre de Michelson

Dans le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène, le mouvement de l'électron en l'absence de champ extérieur est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 sous l'action de la force de rappel.

Si on considère une situation où l'atome est placé dans un champ magnétique uniforme constant $\vec{B}_0$, l'électron subit en plus une force magnétique.

Le rayonnement de l'atome change, c'est **l'effet Zeeman**.

I. Interféromètre de Michelson

L'interféromètre est constitué d'une lame semi réfléchissante (séparatrice S_P) et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame S_P est inclinée de 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

L'interféromètre est plongé dans l'air.

On ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (qui sont supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phase par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

On utilise comme source étendue une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SO parallèle à l'axe Ox.

On observe en lumière monochromatique dans le plan focal d'une lentille mince convergente L d'axe optique Oy et de distance focale $f' = 1 \text{ m}$.

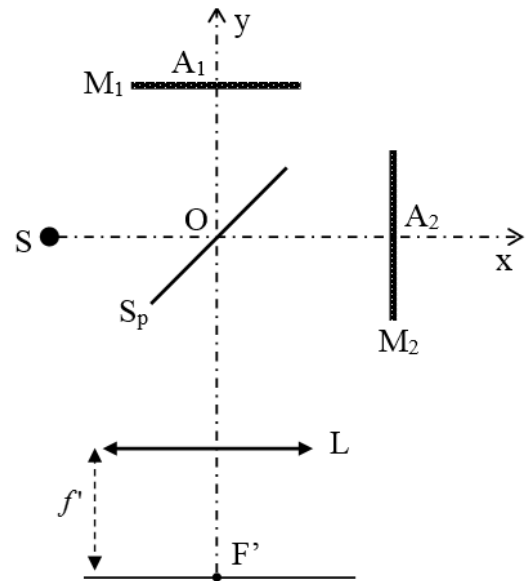


Figure 4

Q59. On part de la situation où les deux bras sont égaux ($OA_1 = OA_2$). Qu'observe-t-on ?

Q60. On déplace M_2 normalement à son plan d'une distance $e = 1,050 \text{ mm}$ dans la direction des x positifs.

Montrer, à l'aide d'un schéma indiquant les trajets des deux rayons qui interfèrent en sortie, que le phénomène d'interférence observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles.

[illegible]

Q61. Déterminer la différence de marche, ainsi que le rayon du premier anneau brillant correspondant à une raie incidente de longueur d'onde $\lambda_0 = 434,1 \text{ nm}$.

BIB-IPETS

II. Raie quasi-monochromatique

La source primaire est maintenant une lampe à hydrogène. A l'aide d'un filtre interférentiel on sélectionne la radiation de longueur d'onde λ_0 .

Cette radiation n'est pas rigoureusement monochromatique, on admet que l'intensité lumineuse spectrale émise $I_\nu(\nu)$ est constante (égale à $\frac{I_0}{\Delta\nu}$) entre $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2$ et $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2$, où ν_0 est la fréquence centrale de la raie (Figure 5).

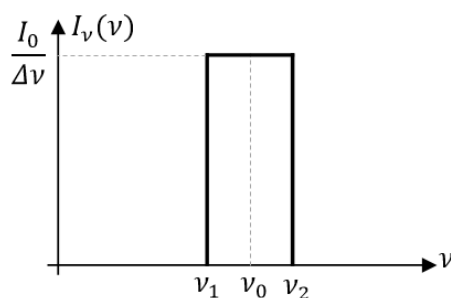


Figure 5

Q62. Déterminer l'intensité lumineuse détectée $I(e)$ au foyer F' de la lentille pour une distance $e = OA_2 - OA_1$. On notera $I_{\max}$ l'intensité pour $e = 0$.

Q63. On enregistre $I(e)$ en fonction du déplacement e à l'aide d'un photomultiplicateur. Déterminer le facteur de visibilité V des franges d'interférence en fonction de la distance e , de $\Delta\nu$ et de la vitesse de la lumière dans le vide c . (On définit V par la relation $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, où $I_{\max}$ étant l'intensité maximale et $I_{\min}$ l'intensité minimale).

- Pour quelle valeur de e , le facteur de visibilité V s'annule-t-il pour la première fois ?
- Donner l'allure de la courbe d'enregistrement obtenue.
- Montrer alors que l'on peut déterminer la longueur de cohérence $L_c = c / \Delta\nu$ de la radiation.

III. Intensité en présence de l'effet Zeeman

On soumet maintenant la lampe à hydrogène à un champ magnétique intense et on sélectionne à l'aide d'un filtre interférentiel les radiations de fréquence $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu$ et $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu$ dues à l'effet Zeeman.

Pour simplifier, on admettra que les deux raies ont la même intensité d'émission I_0 et qu'elles sont rigoureusement monochromatiques (Figure 6).

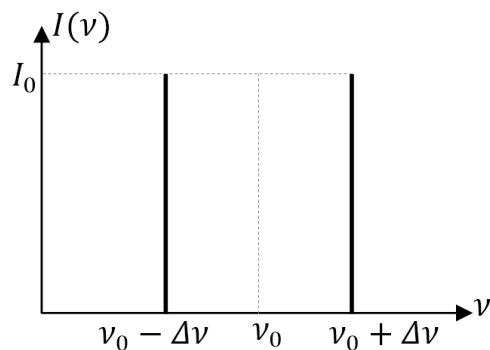


Figure 6

Q64. Déterminer l'intensité $I(e)$ au foyer F' de la lentille en fonction du déplacement $e = OA_2 - OA_1$.

BIB-IPETISS

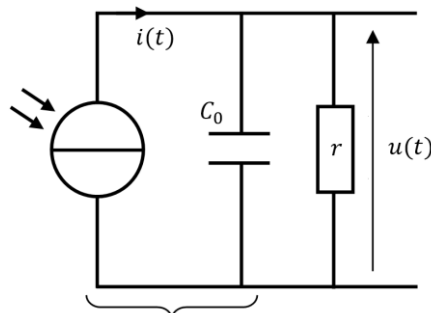
Q65. Tracer l'allure de la courbe $I(e)$. En déduire l'expression de $\Delta\nu$.

IV. Détection par un photomultiplicateur

Le photomultiplicateur placé au foyer de la lentille dans le montage du Michelson transforme le flux lumineux qu'il reçoit en un signal électrique. Un système de traitement du signal permet la détermination des fréquences ν_0 et $\Delta\nu$.

Du point de vue électrique, le photomultiplicateur (noté PM sur la Figure 7) se comporte comme une source idéale de courant $i(t)$ en parallèle avec un condensateur de capacité $C_0 = 15 \cdot 10^{-12} \text{ F}$.

Afin de prélever une tension $u(t)$ proportionnelle à ce courant, on charge le photomultiplicateur par une résistance $r = 50 \text{ } \Omega$.



PM
Figure 7

Q66. On étudie la réponse de ce système à un échelon de courant : la source idéale de courant délivre une intensité I_0 constante à partir de l'instant $t = 0$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
- Résoudre cette équation en considérant la condition initiale $u(0) = 0$ et évaluer t_R (exprimé en ns), le temps de réponse à 5 % du photomultiplicateur (temps que met le système pour atteindre le régime définitif à 5 % près).

Q67. Le chariot du Michelson se déplace à une vitesse constante V telle que :

$$e(t) = OA_2 - OA_1 = V \times t$$

La source de courant délivre un courant $i(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse $I(t)$ que le détecteur reçoit.

Montrer que pour des temps d'évolution très supérieurs à t_R , la tension $u(t)$ reproduit fidèlement les variations de l'intensité.

Q68. Le système de traitement du signal (n'est pas étudié ici) montre qu'entre deux annulations du contraste, le nombre de maximums est $N = 4464$ correspondant à un déplacement $\Delta e = 0,2721 \text{ mm}$.

Calculer les valeurs des fréquences ν_0 et $\Delta\nu$.

[illegible]

Q69. Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse de chariotage permettant de détecter les différents maximums ?

[illegible]

Fin de l'épreuve

BIB-IPEIS

BIB-IPETIS



Concours

Mathématiques – Physique & Technologie

Epreuve de Physique avec Corrigé

Date : 02 Juin 2025

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

- Cette épreuve comporte 30 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve, même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte quatre parties indépendantes.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Si l'espace consacré à la réponse d'une question semble insuffisant, le candidat peut utiliser la feuille à la fin de l'épreuve en signalant le numéro de la question.

Données numériques :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Permittivité absolue du vide : $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$

Conductivité électrique de l'acier : $\gamma = 6.10^6 \text{ S.m}^{-1}$

Constante de Stefan : $\sigma_{St} = 5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2} .K^{-4}$

Grandeurs apparaissant dans l'équation de la chaleur, relatives à l'acier :

$$\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3} \quad ; \quad c = 640 \text{ J.kg}^{-1} .K^{-1} \quad ; \quad \lambda = 46 \text{ W.m}^{-1} .K^{-1}$$

Conventions :

- La grandeur complexe associée à une grandeur réelle X est notée $\underline{X}$.

- Le complexe conjugué de grandeur $\underline{X}$ est noté $\underline{X}^*$.

Formulaire :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{X}) = 0$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad ; \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad ; \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses.

Q1. On cherche à échantillonner le signal $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 1 \text{ kHz}$ sans perte d'information. Dans quel cas le critère de Shannon est-il vérifié :

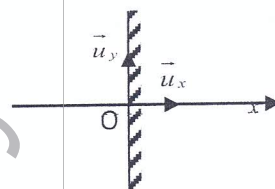
- ☒ La période d'échantillonnage est égale à 0,1 ms. 0,5
- ☐ La période d'échantillonnage est égale à 0,1 s.
- ☐ La fréquence d'échantillonnage est égale à 1 kHz.
- ☒ La fréquence d'échantillonnage est égale à 100 kHz. 0,5

Q2. On considère l'onde électromagnétique dans le vide de champ électrique, en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = E_0(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{i\omega t}e^{-ikz}$, avec k un réel positif. Son champ magnétique vaut :

- ☒ $\underline{\vec{B}} = -i\frac{E_0}{c}(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$ 0,5
- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}(\vec{u}_y + i\vec{u}_x)e^{i(\omega t - kz)}$
- ☒ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}[\sin(\omega t - kz)\vec{u}_x + \cos(\omega t - kz)\vec{u}_y]$ 0,5
- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}[\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y]$

Q3. Une onde progressive plane, monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, se propage dans le vide dans le demi-espace $x < 0$. Elle rencontre sous incidence normale, un milieu parfaitement conducteur occupant le demi-espace $x \geq 0$. Les composantes du champ électrique de l'onde incidente s'écrivent :

$$\vec{E}_i = \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{cases}$$



Les composantes du champ électrique réfléchi s'écrivent :

- ☐ $\vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{cases}$ 1
- ☒ $\vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ -E_{0y} \cos(-kx - \omega t) \\ -E_{0z} \cos(-kx - \omega t + \varphi) \end{cases}$
- ☐ $\vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ -E_{0y} \cos(-kx - \omega t + \varphi) \\ E_{0z} \cos(-kx - \omega t) \end{cases}$
- ☐ $\vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ -E_{0y} \cos(kx - \omega t - \varphi) \\ -E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{cases}$

Q4. On interpose un analyseur entre une source émettant une lumière polarisée elliptiquement et un écran. Après un tour complet de l'analyseur, on observe sur l'écran :

- ☒ deux minimums d'intensité. 0,5
- ☐ une tache lumineuse invariante.
- ☐ deux extinctions totales de lumière.
- ☒ deux maximums d'intensité. 0,5

Q5. Un paquet d'onde est un groupe d'ondes monochromatiques qui s'étale sur une largeur spectrale $\Delta\nu$. Ce paquet d'onde possède une largeur de cohérence ℓ_c .

Les franges d'interférence sont observables si la différence de marche :

- ☒ $\delta \ll \ell_c$ ☐ $\delta = \ell_c$ ☐ $\delta > \ell_c$ ☐ $\delta \gg \ell_c$

0,5

Q6. Une particule quantique de masse m est piégée dans un puits de potentiel infini de largeur L . La particule est dans état stationnaire d'énergie, caractérisé par la fonction d'onde $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) \exp(-iE_n t / \hbar)$, où E_n désigne les niveaux d'énergie possibles de la particule, n étant un nombre entier non nul :

- ☐ $E_n = n E_1$ ☒ $E_n = n^2 E_1$

0,5

- ☒ $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ ☐ $E_1 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$

0,5

Q7. L'état d'une particule quantique de masse m , d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = p_x \vec{u}_x = \hbar k \vec{u}_x$ est représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)\right)$.

- ☒ La vitesse de phase $v_\varphi = \frac{E}{p_x}$ ☐ La vitesse de phase $v_\varphi = \frac{p_x}{E}$

0,5

- ☐ La vitesse de groupe $v_g = \frac{E}{m}$ ☒ La vitesse de groupe $v_g = \frac{\hbar k}{m}$

0,5

Q8. Soit un système où les particules indépendantes occupent des états d'énergie E_i et $E_j > E_i$:

- ☒ $k_B T \ll E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_j est négligeable par rapport à celle de E_i .
☐ $k_B T \ll E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_i est négligeable par rapport à celle de E_j .
☐ $k_B T \gg E_j - E_i$: la population de l'état d'énergie E_i est beaucoup plus grande que celle de E_j .
☐ $k_B T \approx E_j - E_i$: les populations de deux états E_i et E_j sont égales.

0,5

Q9. Pour un système composé de N particules indépendantes pouvant occuper deux états d'énergie $E_1 = -\varepsilon$ et $E_2 = \varepsilon$, l'énergie moyenne du système est donnée par :

- ☐ $-\frac{\varepsilon}{N} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$ ☐ $-\varepsilon N \tanh\left(\frac{N\varepsilon}{k_B T}\right)$
☐ $-\frac{\varepsilon}{N} \tanh\left(\frac{N\varepsilon}{k_B T}\right)$ ☒ $-N\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$

0,5

Q10. La capacité thermique molaire d'un solide dans le modèle d'Einstein classique à haute température est :

- ☐ $C_{vm} = \frac{5}{2} R$ ☐ $C_{vm} = \frac{7}{2} R$ ☒ $C_{vm} = 3R$ ☐ $C_{vm} = 3nR$

0,5

Deuxième Partie : Chauffage par induction d'une plaque

La trempe de l'acier, qui consiste à un chauffage suivi d'un refroidissement rapide d'une plaque d'acier, assure l'augmentation de la dureté en surface de la plaque.

Un milieu conducteur en acier de conductivité électrique γ s'étend dans le demi-espace $z \geq 0$.

A l'extérieur du conducteur, le champ magnétique est uniforme variant sinusoïdalement dans le temps :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (\text{Figure 1}).$$

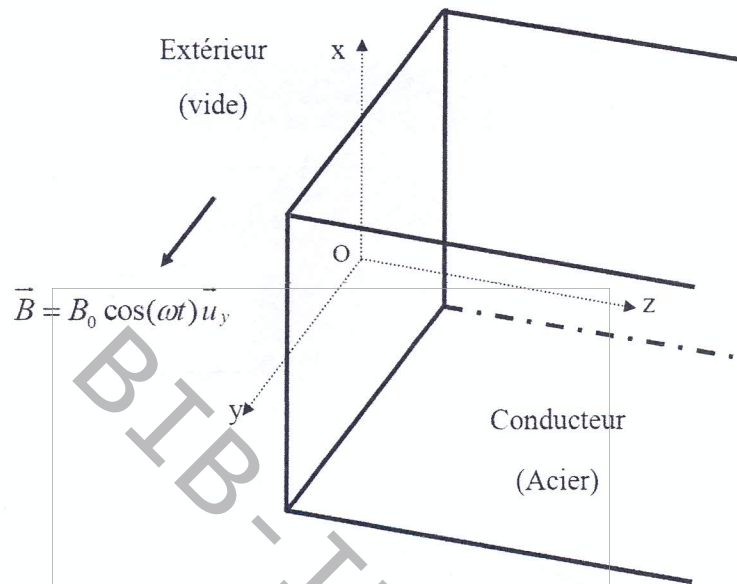


Figure 1

I. Propriétés des champs dans le conducteur

Q11. Écrire les quatre équations de Maxwell dans ce conducteur ohmique. On ne fera intervenir que la densité de courant volumique $\vec{j}(M, t)$, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$, la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et les constantes c , μ_0 et γ .

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{soit} \quad \text{div} \vec{j} = \mu_0 c^2 \gamma \rho$$

0,25

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{soit} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

0,25

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{soit} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

0,25

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{soit} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{\gamma c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

0,25

Q12. On se place en régime sinusoïdal, on associe alors à toute grandeur dépendant du temps un complexe en $\exp(i\omega t)$.

Réécrire les équations de Maxwell entre $\vec{j}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$ et $\rho(M,t)$ en simplifiant les dérivées partielles par rapport au temps.

En régime sinusoïdal : $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$			0,25
$\text{div}\underline{\vec{J}} = \mu_0 c^2 \gamma \underline{\rho}$			
$\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{J}} = -\gamma i\omega \underline{\vec{B}}$			0,25
$\text{div}\underline{\vec{B}} = 0$			0,25
$\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{J}} + \frac{i\omega}{\gamma c^2} \underline{\vec{J}}$			0,25

Q13. Justifier que $\rho(M,t)$ est nulle.

On a : $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\underline{B}} = (\mu_0 + \frac{i\omega}{\gamma c^2}) \underline{\underline{j}}$, or $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} = 0$

$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\underline{B}}) = (\mu_0 + \frac{i\omega}{\gamma c^2}) \text{div}(\underline{\underline{j}}) = 0$

$(\mu_0 + \frac{i\omega}{\gamma c^2}) \text{div}(\underline{\underline{j}}) = 0$ quelque que soit la pulsation ω , donc $\text{div}(\underline{\underline{j}}) = 0$

On compare avec M.G : $\text{div} \underline{\underline{j}} = \mu_0 c^2 \gamma \underline{\underline{\rho}} \Rightarrow \underline{\underline{\rho}} = 0$

Q14. En partant des équations écrites précédemment, trouver à quelle condition on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction ? Montrer que la condition peut s'écrire sous la forme $\omega\tau \ll 1$.

Donner l'expression de τ et son unité. Calculer sa valeur numérique. Vérifier que l'approximation proposée est valable si la fréquence du champ utilisée est inférieure au MHz.

Toujours avec l'équation de M.A. : $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\underline{\vec{B}}} = \mu_0 (\underline{\underline{\vec{J}}} + \frac{i\omega}{\gamma\mu_0 c^2} \underline{\underline{\vec{J}}})$

Le courant de conduction : $\underline{\underline{\vec{J}}}$ et le courant de déplacement : $\frac{i\omega}{\gamma\mu_0 c^2} \underline{\underline{\vec{J}}}$

En comparant les amplitudes, le courant de déplacement est négligeable par rapport au courant de conduction si $\frac{\omega}{\gamma\mu_0 c^2} \ll 1 \Rightarrow \tau\omega \ll 1$ avec $\tau = \frac{1}{\gamma\mu_0 c^2}$, en seconde.

$$A.N: \tau = \frac{1}{6.10^6.4\pi.10^{-7}.(3.10^8)^2} = 1,47.10^{-18} \text{ s}$$

1/3

La condition s'écrit donc : $\tau\omega \ll 1 \Rightarrow f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$

$$A.N: f \ll 10^{17} \text{ Hz}$$

1/3

L'approximation est donc parfaitement valable pour $f = 1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$.

Dans la suite du problème, on prendra $\rho(M,t)=0$ dans le milieu conducteur et on suppose que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

Q15. Écrire les équations de Maxwell entre $\vec{j}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

Justifier qu'il n'y a plus que deux équations de Maxwell indépendantes et donner leurs noms.

Les équations de maxwell s'écrivent :

$$M. G: \quad \text{div} \vec{j} = 0$$

1/6

$$M. F: \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\gamma i \omega \vec{B}$$

1/6

$$M. Flux: \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

1/6

$$M. A: \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

1/6

- En prenant la divergence de M. A, on trouve M. G

1/6

- En prenant la divergence de M. F, on trouve M. Flux

On peut donc considérer uniquement les deux équations :

$$M. F: \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\gamma i \omega \vec{B} \quad \text{et} \quad M. A: \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

1/6

Q16. On cherche dans le conducteur une solution de ces équations de la forme :

$$\vec{B}(z, t) = \underline{B}(z, t) \vec{u}_y = \underline{B}_0' \exp i(\omega t - \underline{k}z) \vec{u}_y$$

où $\underline{B}_0'$ et $\underline{k}$ peuvent être complexes.

Déterminer la forme que doit alors prendre la densité de courant $\vec{j}(z, t)$ en fonction de $\underline{k}$, $\underline{B}(z, t)$ et μ_0 .

Établir alors l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de μ_0 , γ et ω .

La solution est de la forme :

$$\vec{B}(z, t) = \underline{B}(z, t) \vec{u}_y = \underline{B}_0' \exp i(\omega t - \underline{k}z) \vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} = -i \underline{k} \vec{u}_z = -i \underline{k}$$

$$M.A: \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \underline{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{B}(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{j}(z, t) = i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \underline{B}(z, t) \vec{u}_x$$

0,5

$$M.F: \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\gamma i \omega \vec{B} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \underline{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \underline{B}(z, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma i \omega \underline{B}(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -i \mu_0 \gamma \omega$$

0,5

II. Cas du conducteur infini

Le conducteur occupe tout le demi-espace $z \geq 0$ (Figure 1).

Détermination de $\underline{B}$ et $\underline{j}$

Q17. Déterminer les deux expressions possibles de $\underline{k}$. Justifier le choix $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$, avec δ étant une grandeur dont on donnera l'expression en fonction de μ_0 , γ et ω .

Donner pour $\underline{k}$ une seconde expression en utilisant la notation exponentielle.

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}\mu_0\gamma\omega$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\mu_0\gamma\omega} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\mu_0\gamma\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

1/3

Si on choisit le signe (-), le champ $\underline{B}(z, t)$ s'écrit :

$$\underline{B}(z, t) = \underline{B}'_0 \exp(i\omega t - \underline{k}z) = \underline{B}'_0 \exp\left(i\omega t + \frac{1-i}{\delta}z\right) = \underline{B}'_0 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\omega t + \frac{z}{\delta}\right)$$

$\exp\left(\frac{z}{\delta}\right)$ pourrait tendre vers l'infini puisque ici le conducteur est illimité du côté de (z) positifs.

Ceci n'aurait pas de sens physique.

1/3

Il faut donc choisir l'autre solution :

$$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$$

L'expression de $\underline{k}$ en exponentielle est :

$$\underline{k} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\delta}$$

1/3

Q18. Rappeler la relation de passage pour $\vec{B}$ en $z = 0$. Montrer que $\underline{B}'_0 = B_0$.

La relation de passage pour $\vec{B}$: $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

0,5

Soit $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{u}_z$ par exemple : $\vec{B}(z = 0^-) - \vec{B}(z = 0^+) = \mu_0 \vec{J}_s \wedge (-\vec{u}_z)$

La description de courant ici est volumique : il n'y a pas de courant surfacique.

Donc $\vec{B}$ est continu en $z = 0$

0,5

En complexe (en $z = 0$) :

$$B_0 \exp(i\omega t) = \underline{B}'_0 \exp(i\omega t) \Rightarrow \underline{B}'_0 = B_0.$$

Q19. Établir les expressions réelles $\vec{B}(z, t)$ et $\vec{j}(z, t)$ (utiliser la notation δ pour exprimer ces résultats).
L'une des grandeurs est en cosinus et l'autre fait intervenir un sinus.

Expression complexe de $\vec{B}$: $\underline{\vec{B}}(z, t) = B_0 \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \vec{u}_y$

Expression Réelle de $\vec{B}$: $\vec{B}(z, t) = B_0 \exp(-\frac{z}{\delta}) \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_y$

Expression complexe $\vec{j}$: $\underline{\vec{j}}(z, t) = i \frac{1}{\mu_0} k \cdot \underline{\vec{B}}(z, t) \vec{u}_x$

$$= i \frac{1}{\mu_0} \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\delta} B_0 \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \vec{u}_x$$

$$= i \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})) \vec{u}_x$$

Expression Réelle de $\vec{j}$: $\vec{j}(z, t) = -\frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} \exp(-\frac{z}{\delta}) \sin(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_x$

Q20. Préciser l'unité de δ . Quel nom donne-t-on à cette grandeur ? Justifier cette nomination.

δ est en m : $(\exp(-\frac{z}{\delta}))$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$: épaisseur de peau

En effet, vu la décroissance en $\exp(-\frac{z}{\delta})$, $\vec{B}$ et $\vec{j}$ n'existent que sur 4 ou 5 δ en profondeur du conducteur, d'où le nom.

Q21. Application numérique : calculer δ pour le conducteur considéré aux fréquences $f_1 = 100 \text{ Hz}$ et $f_2 = 125 \text{ kHz}$. Conclure.

A. N :

$f_1 = 100 \text{ Hz} \Rightarrow \delta_1 = 20,5 \text{ mm}$

$f_2 = 125 \text{ kHz} \Rightarrow \delta_2 = 0,58 \text{ mm}$

La profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la fréquence.

Détermination de la puissance surfacique reçue

Q22. Donner l'expression de la puissance volumique $\frac{dP_J}{d\tau}$ cédée par effet Joule au conducteur. Déterminer sa valeur moyenne temporelle.

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \frac{J^2}{\gamma}$$

1/3

$$\begin{aligned} \frac{dP_J}{d\tau} &= \frac{2B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \sin^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{B_0^2 \omega}{\mu_0} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \sin^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

1,3

$$\left\langle \frac{dP_J}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{B_0^2 \omega}{\mu_0} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)$$

1/3

Q23. Exprimer alors la puissance moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ cédée par effet Joule à un cylindre d'axe parallèle à Oz, de longueur infinie et de section S, découpé dans le conducteur.

On trouve $\langle P_J \rangle$ en intégrant sur le volume du cylindre :

$$\begin{aligned} \langle P_J \rangle &= \frac{1}{2} \frac{B_0^2 \omega}{\mu_0} \iiint_{\text{cylindre}} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \frac{B_0^2 \omega \cdot S}{\mu_0} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) dz \\ \Rightarrow \langle P_J \rangle &= \frac{B_0^2 \cdot S}{4\mu_0} \omega \delta \end{aligned}$$

1

Q24. En déduire la puissance thermique moyenne φ_0 reçue par unité de surface du conducteur. On écrira le résultat sous la forme $\varphi_0 = K_s B_0^2 \omega \delta$ et l'on précisera l'expression de K_s .

$$\varphi_0 = \frac{\langle P_J \rangle}{S}$$

0,5

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 \omega \delta = K_s B_0^2 \omega \delta \quad \Rightarrow \quad K_s = \frac{1}{4\mu_0}$$

0,5

Q25. Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\pi}(z=0^+, t) \rangle$.

Comparer son module à φ_0 . Commenter.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{J} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \gamma} = \frac{JB}{\mu_0 \gamma} \vec{u}_z$$

1/3

$$\vec{\pi}(z = 0^+) = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \left(-\frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} \right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{\sqrt{2} B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

1/3

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{ \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \} \cos(\omega t)$$

$$\langle \vec{\pi}(z = 0^+) \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} \vec{u}_z = \frac{1}{4\mu_0} \cdot B_0^2 \omega \delta \vec{u}_z \quad (\text{car } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}})$$

1/3

On trouve : $\langle \vec{\pi}(z = 0^+) \rangle = \varphi_0 \cdot \vec{u}_z$

La puissance électromagnétique entrant dans le conducteur (et donc absorbée par lui) est :

$$\vec{\pi}(z = 0^+) S \cdot \vec{u}_z.$$

Q26. Application numérique : calculer φ_0 pour la fréquence $f_2 = 125 \text{ kHz}$ et un champ magnétique extérieur d'amplitude $B_0 = 0,5 \text{ T}$.

$$\text{A.N: } \varphi_0 = \frac{1}{4,4\pi \cdot 10^{-7}} (0,5)^2 \cdot 2\pi \cdot 125 \cdot 10^3 \cdot 0,58 \cdot 10^{-3}; \quad \varphi_0 = 2,26 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

1

Autre méthode de détermination de la puissance surfacique reçue

Q27. Quel est le courant élémentaire $d\vec{I}$ qui traverse un rectangle élémentaire (Figure 2) parallèle au plan yOz , de côtés élémentaires dy et dz , orienté selon $\vec{u}_x$? (On exprimera le résultat en fonction de $\underline{k}$, $\underline{B}(z, t)$ et μ_0).

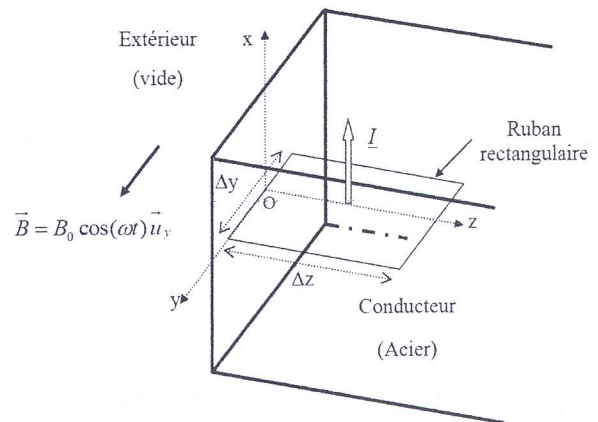


Figure 2

$$d\vec{I} = \vec{j} d\vec{S} = i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \underline{B}(z, t) dy dz$$

1

Q28. Déterminer le courant total $\underline{I} = \underline{I}_0 \exp(i\omega t)$ qui traverse un ruban de largeur $\Delta y = \ell$ s'étendant sur toute la profondeur du conducteur ($\Delta z \rightarrow \infty$). Exprimer $\underline{I}_0$ en fonction de μ_0 , ℓ et B_0 .

$$\underline{I} = i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \ell \cdot \int_0^{+\infty} \underline{B}(z, t) dz$$

1/3

$$\underline{I} = i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \ell \cdot \int_0^{+\infty} B_0 \exp i(\omega t - \underline{k}z) dz$$

$$\underline{I} = i \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \cdot \ell \cdot \left(-\frac{1}{i\underline{k}} \right) B_0 \exp(i\omega t) \cdot (-1)$$

1/3

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{B_0 \cdot \ell}{\mu_0} \exp(i\omega t) \quad \Rightarrow \underline{I}_0 = \frac{B_0 \cdot \ell}{\mu_0}$$

1/3

Q29. On n'envisage ici que le cas où ce même courant $\underline{I} = \underline{I}_0 \exp(i\omega t)$ serait uniformément réparti sur une épaisseur δ .

Quelle serait alors l'expression de la densité volumique de courant $\underline{j}' = \underline{j}'_0 \exp(i\omega t)$, le courant étant nul en tout point en dehors de la couche d'épaisseur δ ?

Exprimer φ'_0 , la puissance thermique moyenne cédée par effet joule au conducteur par unité de surface dans le cadre de cette hypothèse. Comparer φ'_0 et φ_0 . Commenter.

$$\underline{I} = \underline{j}' \cdot \ell \cdot \delta$$

0,25

$$\text{donc } \underline{j}' = \frac{\underline{I}}{\ell \cdot \delta} = \frac{B_0}{\mu_0 \cdot \delta} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \frac{j'^2}{\gamma} = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} \cos^2(\omega t)$$

0,25

$$\left\langle \frac{dP_J}{d\tau} \right\rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta^2 \gamma}$$

$$\langle P_J \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta^2 \gamma} S \cdot \delta$$

$$\varphi'_0 = \frac{\langle P_J \rangle}{S} = \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 \omega \delta = \varphi_0$$

0,25

$$\varphi'_0 = \varphi_0$$

Si le courant serait uniformément réparti sur l'épaisseur, la puissance apparue par effet joule est la même que si le courant était réparti sur la totalité du conducteur.

0,25

III. Plaque conductrice d'épaisseur finie

Le conducteur est maintenant compris entre les deux plans $z=0$ et $z=2a$. Il est d'extension infinie dans les directions Ox et Oy . A l'extérieur, de part et d'autre de la plaque, le champ magnétique s'écrit toujours $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

Détermination de B

Q30. Montrer que $\vec{B}(z, t)$ dans la plaque peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(z, t) = (\underline{C} \exp(\underline{k}_0 z) + \underline{D} \exp(-\underline{k}_0 z)) \exp(i\omega t) \vec{u}_y, \text{ avec } \underline{k}_0 = \frac{1+i}{\delta}.$$

La plaque étant d'épaisseur finie, le raisonnement fait en Q.17 ($z \rightarrow \infty$) pour éliminer une solution n'est plus possible.

Il faut donc garder les deux solutions : $\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(z, t) &= \{ \underline{C} \exp i \left(\omega t + \frac{1-i}{\delta} z \right) + \underline{D} \exp i \left(\omega t - \frac{1-i}{\delta} z \right) \} \vec{u}_y \\ &= \{ \underline{C} \exp \left(\frac{i+1}{\delta} z \right) + \underline{D} \exp \left(-\frac{i+1}{\delta} z \right) \} \exp(i\omega t) \vec{u}_y \\ &= \{ \underline{C} \exp \underline{k}_0 z + \underline{D} \exp -\underline{k}_0 z \} \exp(i\omega t) \vec{u}_y \quad \text{avec } \underline{k}_0 = \frac{(1+i)}{\delta} \end{aligned}$$

Q31. Préciser les nouvelles conditions aux limites.

Les conditions aux limites :

En $z=0$: $\vec{B}(0, t) = B_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$

En $z=2a$: $\vec{B}(2a, t) = B_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$

Q32. Après calculs, on trouve pour le champ magnétique dans le conducteur l'expression suivante

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \frac{ch[\underline{k}_0(z-a)]}{ch[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

La fonction $ch(\underline{u})$ étant définie de manière usuelle par $ch(\underline{u}) = \frac{1}{2}(e^{\underline{u}} + e^{-\underline{u}})$.

Montrer que cette expression de $\vec{B}(z, t)$ vérifie les conditions aux limites.

Vérification des conditions aux limites :

$$\text{En } z = 0 : \vec{B}(0, t) = B_0 \frac{\text{ch}[\underline{k}_0(-a)]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y = B_0 \frac{\text{ch}[\underline{k}_0 a]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y = B_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

0,5

$$\text{En } z = 2a : \vec{B}(2a, t) = B_0 \frac{\text{ch}[\underline{k}_0(2a-a)]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y = B_0 \frac{\text{ch}[\underline{k}_0 a]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_y = B_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

0,5

$\Rightarrow$ Les conditions aux limites sont vérifiées

Détermination de $\vec{j}$

Q33. En utilisant l'équation de Maxwell appropriée, déduire l'expression de la densité de courant volumique $\vec{j}(z, t)$.

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(z, t)}{\partial z} \vec{u}_x = -\frac{B_0 \underline{k}_0}{\mu_0} \cdot \frac{\text{sh}[\underline{k}_0(z-a)]}{\text{ch}[\underline{k}_0 a]} \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

1

Q34. La plaque conductrice étudiée a pour épaisseur $2a$, avec ici $2a \ll \delta$, ce qui revient à écrire $|\underline{k}_0 a| \ll 1$. Justifier que l'on peut aussi écrire $|\underline{k}_0(z-a)| \ll 1$ et en déduire l'expression approchée de $\vec{j}(z, t)$ au premier ordre non nul en $1/\delta$.

$$|z - a| \leq a \text{ donc } |\underline{k}_0(z - a)| \leq |\underline{k}_0 a| \ll 1$$

0,5

Un développement limité au premier ordre pour (sh) et (ch) :

$$\vec{j} = -\frac{B_0 \underline{k}_0}{\mu_0} \frac{\text{sh}[\underline{k}_0(z-a)]}{1} \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

$$= -\frac{B_0 \underline{k}_0^2}{\mu_0} (z - a) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

$$= -\frac{B_0 \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2}{\mu_0} (z - a) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{2iB_0}{\mu_0 \delta^2} (z - a) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

0,5

Détermination de la puissance volumique moyenne reçue

35. Déterminer la puissance moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ cédée par effet Joule dans la portion de plaque de section S et d'épaisseur $2a$. (On peut utiliser $\langle j^2 \rangle = \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}^*}{2}$ puis intégrer la puissance volumique sur tout le volume de la portion considérée).

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP_J}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{j^2}{\gamma} \right\rangle = \frac{1}{2\gamma} \vec{j} \cdot \vec{j}^* \\ &= \frac{2B_0^2}{\gamma \mu_0^2 \delta^4} (z-a)^2 \text{ avec } \delta^2 = \frac{2}{\mu_0 \gamma \omega} \\ &= \frac{B_0^2 \omega}{\mu_0 \delta^2} (z-a)^2 \end{aligned}$$

Pour la portion de section S et d'épaisseur $2a$:

$$\begin{aligned} \langle P_J \rangle &= \frac{B_0^2 \omega S}{\mu_0 \delta^2} \int_0^{2a} (z-a)^2 dz \\ \Rightarrow \langle P_J \rangle &= \frac{2}{3} \frac{B_0^2 \omega S a^3}{\mu_0 \delta^2} \end{aligned}$$

Q36. Déterminer la puissance volumique moyenne p_V . On écrira le résultat sous la forme $p_V = K_V B_0^2 \frac{\omega}{\delta^2}$ et l'on précisera l'expression de K_V .

$$\begin{aligned} p_V &= \frac{\langle P_J \rangle}{\text{Volume}} = \frac{\langle P_J \rangle}{S \cdot 2a} = \frac{a^2 B_0^2 \omega}{3 \mu_0 \delta^2} \\ \Rightarrow p_V &= K_V B_0^2 \frac{\omega}{\delta^2} \text{ avec } K_V = \frac{a^2}{3 \mu_0} \end{aligned}$$

Q37. Calculer p_V pour $f = 100 \text{ Hz}$ et pour un champ magnétique extérieur d'amplitude $B_0 = 2,5 \text{ T}$, lorsque la largeur de la plaque d'acier est $2a = 3 \text{ mm}$.

$$A. N: p_V = \frac{(1,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (2,5)^2 \cdot 2\pi \cdot 100}{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (20,5 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow p_V = 5,57 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$$

Troisième Partie : traitement thermique de la plaque

I. Temps caractéristiques des échanges

Pour une plaque chauffée en contact avec l'air extérieur, peuvent se développer trois types d'échanges thermiques :

- La conduction.
- Les échanges conducto-convectifs.
- Le rayonnement.

Loi de Fourier

En absence des autres types d'échanges thermiques, la conduction obéit à l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_v.$$

Q38. Que représentent les grandeurs ρ , c , λ et p_v dans l'équation de la chaleur ?

ρ : <i>masse volumique.</i>		0,25
c : <i>capacité thermique massique.</i>		0,25
λ : <i>conductivité thermique.</i>		0,25
p_v : <i>puissance volumique produite par des sources d'énergie thermiques.</i>		0,25

Q39. Déterminer la dimension du coefficient D de diffusivité thermique ($D = \frac{\lambda}{\rho c}$).

<i>Si on écrit l'équation de la chaleur :</i> $\Delta T - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p_v}{\lambda}$ $\Rightarrow \Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p_v}{\lambda} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\rho c}$ <i>Dimension :</i> $[\Delta T] = \frac{1}{[D]} \frac{[T]}{[t]} \Rightarrow D \text{ en } m^2.s^{-1}$	1
--	---

Q40. En déduire une durée caractéristique τ_F pour la diffusion sur une longueur égale à $2a$ en fonction de D et a puis en fonction de ρ , c , λ et a .

$D = \frac{\text{longueur au carré}}{\text{temps caractéristique}} = \frac{(2a)^2}{\tau_F} \Rightarrow \tau_F = \frac{4a^2}{D} = \frac{4a^2 \cdot \rho \cdot c}{\lambda}$	0,5
$\Rightarrow \tau_F = \frac{4a^2}{D} = \frac{4a^2 \cdot \rho \cdot c}{\lambda}$	0,5

Loi de Newton

L'échange thermique par conducto-convection obéit à la loi de Newton : $\varphi = h(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$.

Q41. Que représente φ dans la loi de Newton ? Dans quel sens l'échange modélisé par cette loi s'effectue-t-il ?

φ : flux thermique surfacique conducto-convectif.

0,5

Sens : du solide vers le fluide : $\varphi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = h(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$

0,5

On considère une barre cylindrique de surface de base S et d'épaisseur $2a$ à la température initiale T_0 , plongée dans un milieu de température T_a avec lequel elle échange de l'énergie uniquement par transfert conducto-convectif caractérisé par h .

La surface d'échange est S (le reste de la barre est supposé isolé). A chaque instant la barre est considérée comme isotherme à la température $T(t)$.

Q42. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

La variation de l'énergie interne pour tout le système pendant dt est :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}} \quad (\text{pas de production})$$

$$2aSp c \frac{dT}{dt} dt = -h(T - T_a)S dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{h}{2\rho c a} (T - T_a) = 0$$

1

Q43. En déduire un temps caractéristique τ_N pour les échanges conducto-convectifs pour une épaisseur égale à $2a$ en fonction de ρ , c , h et a .

$$\frac{dT}{dt} + \frac{h}{2\rho c a} (T - T_a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_N} T = \frac{1}{\tau_N} T_a \quad \text{avec} \quad \tau_N = \frac{2\rho c a}{h}$$

1

Loi de Stefan

On considère une barre cylindrique de surface de base S et d'épaisseur $2a$ à la température initiale T_0 , plongée dans un milieu de température T_a . Elle échange de l'énergie uniquement par transfert radiatif qui obéit à la loi de Stefan : $\varphi = \sigma_{\text{St}} T^4$.

La surface d'échange est S . La barre et l'extérieur rayonnent tous deux selon la loi de Stefan. A chaque instant la barre est considérée comme isotherme à la température $T(t)$.

Q44. Établir l'équation différentielle pour $T(t)$.

Même analyse que la question (Q.42) :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}} \Rightarrow 2aS\rho c \frac{dT}{dt} dt = -\sigma_{St}(T^4 - T_a^4)Sdt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2a\rho c} (T^4 - T_a^4) = 0$$

Q45. On suppose que T est proche de T_a . En déduire que le temps caractéristique τ_s pour les échanges radiatifs pour une épaisseur égale à $2a$ s'écrit :

$$\tau_s = \frac{\rho c a}{2\sigma_{St} T_a^3}$$

T Proche de T_a : $T = T_a + \varepsilon$

$$T^4 = (T_a + \varepsilon)^4 = T_a^4 \left(1 + \frac{\varepsilon}{T_a}\right)^4 = T_a^4 \left(1 + \frac{4\varepsilon}{T_a}\right) = T_a^4 + 4T_a^3\varepsilon$$

$$\Rightarrow T^4 - T_a^4 = 4T_a^3\varepsilon = 4T_a^3(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2a\rho c} (T^4 - T_a^4) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2a\rho c} 4T_a^3(T - T_a) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{2\sigma_{St}T_a^3}{a\rho c} T = \frac{2\sigma_{St}T_a^3}{a\rho c} T_a$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_s} T = \frac{1}{\tau_s} T_a \quad \text{avec} \quad \tau_s = \frac{a\rho c}{2\sigma_{St}T_a^3}$$

Q46. Applications numériques : compléter les tableaux suivants :

Données numériques supplémentaires :

$T_a = 700 \text{ }^\circ\text{C}$; Pour les transferts conducto-convectifs acier-air : $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Expérience n°1	$2a = 3 \text{ mm}$	
$\tau_F = 0,98 \text{ s}$	$\tau_N = 1507 \text{ s}$	$\tau_s = 72,2$

Expérience n°2	$2a = 20 \text{ mm}$	
$\tau_F = 43,6 \text{ s}$	$\tau_N = 10048 \text{ s}$	$\tau_s = 480,7 \text{ s}$

Q47. Quel est le type de transfert qui prédomine dans l'acier ?

Les échanges les plus rapides sont les échanges qui prédominent.

$$\tau_F \ll \tau_S \ll \tau_N$$

Ici, c'est l'échange par conduction.

Pour la suite, afin de simplifier le modèle étudié, on ne tient plus compte du rayonnement mais on prend pour h la valeur numérique : $h = 30 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

II. Chauffage de la plaque

Une plaque conductrice en acier d'épaisseur $2a$ (comprise entre les plans $z=0$ et $z=2a$) est soumise pendant une durée déterminée à un champ magnétique variable de pulsation ω (avec $\omega = 2\pi f$). Les courants qui se développent au sein de la plaque engendrent un échauffement par effet Joule qui sera décrite comme suit :

- Si la plaque est de faible épaisseur ($2a = 3 \text{ mm}$), elle s'échauffera sous l'effet d'une puissance volumique calorifique uniformément répartie en son volume $p_V = K_V B_0^2 \frac{\omega}{\delta^2}$, avec $K_V = 0,6$ (dans les unités S.I.); $B_0 = 2,5 \text{ T}$, $f = 100 \text{ Hz}$ et $\delta = 20,5 \text{ mm}$.
- Si la plaque est de grande épaisseur ($2a = 20 \text{ mm}$), la chaleur est produite au niveau de la surface, de part et d'autre de la plaque en $z=0$ et $z=2a$. La puissance thermique par unité de surface s'écrivant $\varphi_0 = K_S B_0^2 \omega \delta$ avec $K_S = 0,2 \cdot 10^6$ (dans les unités S.I.); $B_0 = 0,5 \text{ T}$, $f = 125 \text{ kHz}$ et $\delta = 0,58 \text{ mm}$.

Expérience n°1 : chauffage d'une plaque mince

La Figure 3 schématise l'installation permettant le chauffage de la plaque d'acier d'épaisseur $2a$ et de surface S (de volume $2aS$), défilant à vitesse constante entre deux inducteurs fixes et parallèles à la plaque.

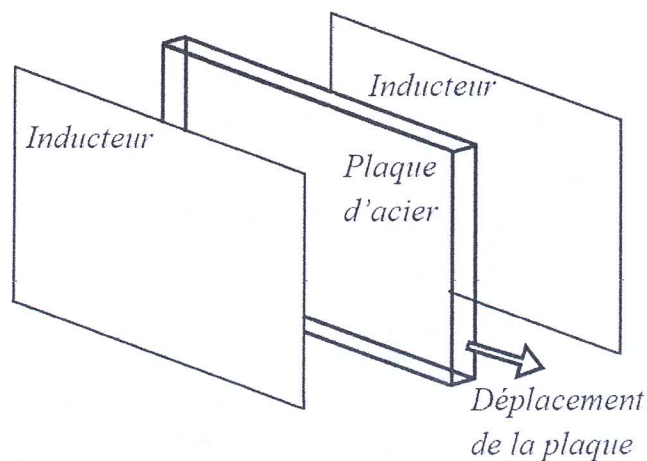


Figure 3

La surface d'échange est S . La barre et l'extérieur rayonnent tous deux selon la loi de Stefan. A chaque instant la barre est considérée comme isotherme à la température $T(t)$.

Q44. Établir l'équation différentielle pour $T(t)$.

Même analyse que la question (Q.42) :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}} \Rightarrow 2aSp\frac{dT}{dt} = -\sigma_{St}(T^4 - T_a^4)Sdt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2apc}(T^4 - T_a^4) = 0$$

1

Q45. On suppose que T est proche de T_a . En déduire que le temps caractéristique τ_s pour les échanges radiatifs pour une épaisseur égale à $2a$ s'écrit :

$$\tau_s = \frac{\rho c a}{2\sigma_{St} T_a^3}$$

T Proche de T_a : $T = T_a + \varepsilon$

$$T^4 = (T_a + \varepsilon)^4 = T_a^4 \left(1 + \frac{\varepsilon}{T_a}\right)^4 = T_a^4 \left(1 + \frac{4\varepsilon}{T_a}\right) = T_a^4 + 4T_a^3\varepsilon$$

$$\Rightarrow T^4 - T_a^4 = 4T_a^3\varepsilon = 4T_a^3(T - T_a)$$

0,5

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2apc}(T^4 - T_a^4) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\sigma_{St}}{2apc}4T_a^3(T - T_a) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{2\sigma_{St}T_a^3}{apc}T = \frac{2\sigma_{St}T_a^3}{apc}T_a$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_s}T = \frac{1}{\tau_s}T_a \text{ avec } \tau_s = \frac{apc}{2\sigma_{St}T_a^3}$$

0,5

Q46. Applications numériques : compléter les tableaux suivants :

Données numériques supplémentaires :

$T_a = 700^\circ\text{C}$; Pour les transferts conducto-convectifs acier-air : $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Expérience n°1	$2a = 3 \text{ mm}$	
$\tau_F = 0,98 \text{ s}$	$\tau_N = 1507 \text{ s}$	$\tau_s = 72,2$

1/6

1/6

1/6

Expérience n°2	$2a = 20 \text{ mm}$	
$\tau_F = 43,6 \text{ s}$	$\tau_N = 10048 \text{ s}$	$\tau_s = 480,7 \text{ s}$

1/6

1/6

1/6

Q48. Exprimer la puissance thermique totale P_T créée au sein de la plaque par les inducteurs en fonction de p_V , S et a .

$$P_T = p_V \cdot V = p_V \cdot 2aS$$

1

A chaque instant la température est uniforme au sein de la plaque. La plaque glisse entre les deux inducteurs qui provoquent son échauffement, elle est entourée d'air à la température uniforme et constante $T_a = 700^\circ\text{C}$.

Q49. Effectuer un bilan d'énergie pour toute la plaque pendant dt (en négligeant la surface latérale par rapport aux surfaces de bases). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ en faisant apparaître une constante de temps.

Bilan pour toute la plaque pendant dt :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}} + \delta Q_{\text{produit}}$$

1/3

$$\Rightarrow 2aS\rho c \frac{dT}{dt} dt = -2Sh(T - T_a)dt + p_V \cdot 2aSdt$$

1/3

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{h}{\rho ca} (T - T_a) = \frac{1}{\rho c} p_V$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} (T - T_a) = \frac{1}{\rho c} p_V \text{ avec } \tau = \frac{\rho ca}{h}$$

1/3

Q50. Résoudre cette équation. La plaque étant initialement à la température T_a .

La solution est de la forme :

$$T - T_a = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{a \cdot p_V}{h}$$

0,5

$$\text{Conditions initiales : } T_a - T_a = A + \frac{a \cdot p_V}{h} \Rightarrow A = -\frac{a \cdot p_V}{h}$$

$$\text{D'où } T - T_a = \frac{a \cdot p_V}{h} (1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right))$$

0,5

Q54. Écrire l'équation vérifiée par $\theta(z,t) = T(z,t) - T_a$ dans le conducteur (en faisant apparaître la diffusivité thermique D).

Dans ce cas, en absence de sources volumiques, l'équation de la chaleur est :

$$\Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\theta(z,t) = T(z,t) - T_a \Rightarrow \Delta \theta - \frac{1}{D} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

1

Q55. Établir la condition aux limites vérifiée pour $\theta(z,t)$ imposée par le flux en $z = 0$.

Condition aux limites :

$$\text{En } z = 0: \vec{j} \cdot \vec{u}_z = \varphi_0$$

$$J(z = 0, t) = \varphi_0 = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0,t} = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0,t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0,t} = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

1

Q56. La résolution de cette équation repose sur les fonctions suivantes :

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2} dv \quad (\text{avec } \frac{d}{du} f(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \text{ et } f(0) = 1)$$

$$g(u) = \int_u^{+\infty} f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \cdot f(u) \quad (\text{avec } \frac{d}{du} g(u) = -f(u))$$

Toutes ces fonctions décroissent exponentiellement quand u tend vers l'infini.

La solution de l'équation de la chaleur, dans les conditions de l'expérience, s'écrit :

$$\theta(z,t) = T(z,t) - T_a = A \sqrt{Dt} \cdot g\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où A est une constante. Exprimer A en fonction de φ_0 et λ puis donner sa valeur numérique et son unité.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = A \sqrt{Dt} \frac{\partial}{\partial z} \left(g\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \right)$$

1/3

I. Interféromètre de Michelson

L'interféromètre est constitué d'une lame semi-réfléchissante (séparatrice S_p) et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame S_p est inclinée de 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

L'interféromètre est plongé dans l'air.

On ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (qui sont supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phase par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

On utilise comme source étendue une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SO parallèle à l'axe Ox .

On observe en lumière monochromatique dans le plan focal d'une lentille mince convergente L d'axe optique Oy et de distance focale $f' = 1\text{ m}$.

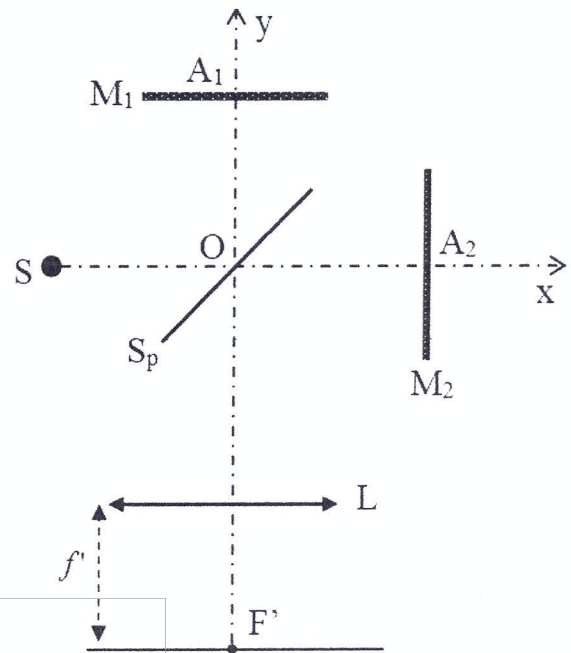


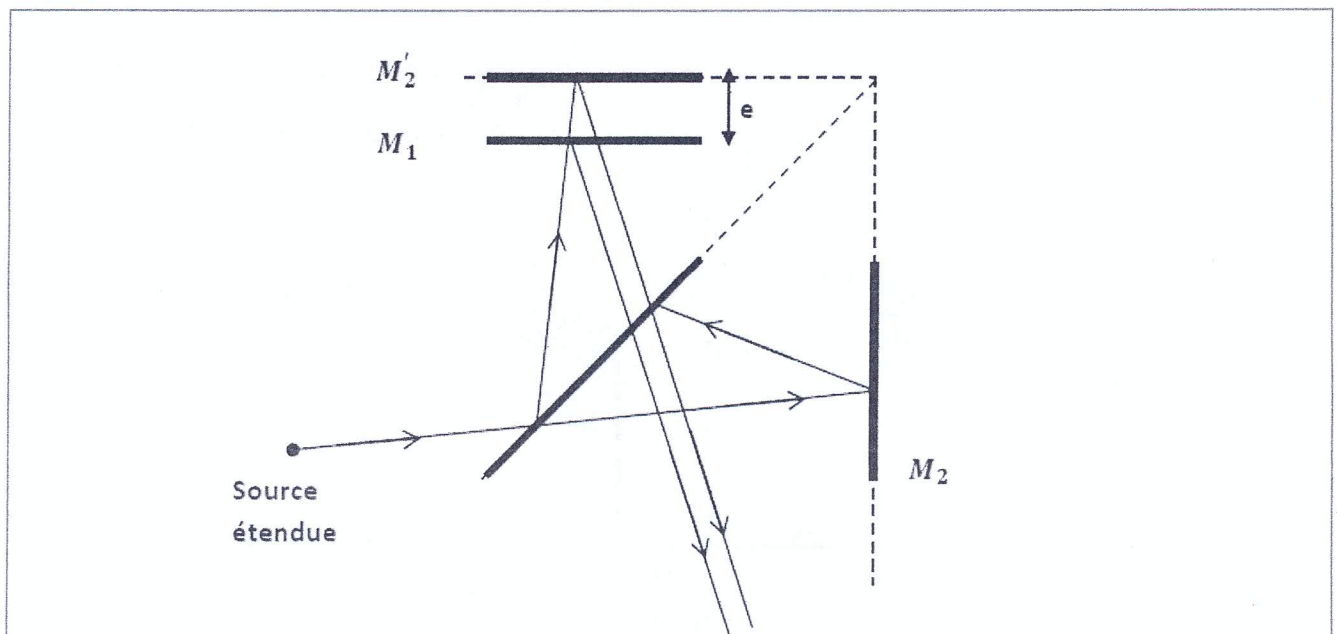
Figure 4

Q59. On part de la situation où les deux bras sont égaux ($OA_1 = OA_2$). Qu'observe-t-on ?

On observe une teinte uniforme (teinte plate) car la différence de marche est nulle.

Q60. On déplace M_2 normalement à son plan d'une distance $e = 1,050\text{ mm}$ dans la direction des x positifs.

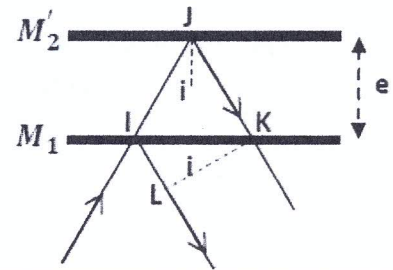
A partir d'un rayon incident issu de la source S , montrer, à l'aide d'un schéma indiquant les trajets des deux rayons qui interfèrent en sortie, que le phénomène d'interférence observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles.



Q61. Déterminer la différence de marche, ainsi que le rayon du premier anneau brillant correspondant à une raie incidente de longueur d'onde $\lambda_0 = 434,1 \text{ nm}$.

Expression de la différence de marche : $\delta = (IJ + JK) - IL$

$$= \frac{2e}{\cos(i)} - 2e \cdot \tan(i) \cdot \sin(i) = 2e \cos(i)$$



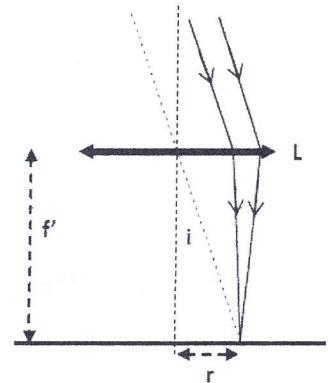
1/3

Rayon du premier anneau :

$$P = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = P_{\max} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

$$i = \sqrt{2 \left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)}$$

$$r = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)}$$



1/3

$$P_{\max} = \frac{2e}{\lambda_0} = 4837,6 \Rightarrow \text{L'ordre du premier anneau brillant est : } P_1 = 4837.$$

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{P_1}{P_{\max}}\right)} = 1,57 \text{ cm.}$$

1/3

II. Raie quasi-monochromatique

La source primaire est maintenant une lampe à hydrogène. A l'aide d'un filtre interférentiel on sélectionne la radiation de longueur d'onde λ_0 .

Cette radiation n'est pas rigoureusement monochromatique, on admet que l'intensité lumineuse spectrale émise $I_\nu(\nu)$ est constante (égale à $\frac{I_0}{\Delta\nu}$) entre $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2$ et $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2$, où ν_0 est la fréquence centrale de la raie (Figure 5).

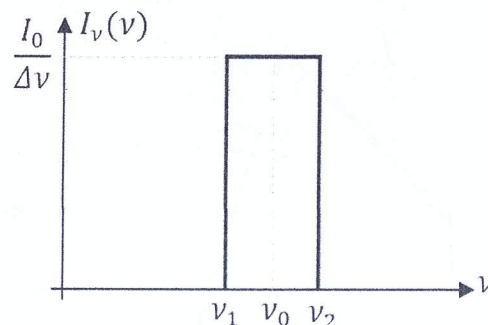


Figure 5

Q62. Déterminer l'intensité lumineuse détectée $I(e)$ au foyer F' de la lentille pour une distance $e = OA_2 - OA_1$. On notera $I_{\max}$ l'intensité pour $e = 0$.

Pour une onde monochromatique :

$$I(e) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2e\right)\right) = \frac{I_{\max}}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e v_0}{c}\right)\right)$$

0,5

Pour la raie étudiée :

$$I(e) = \frac{2I_0}{\Delta v} \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e v}{c}\right)\right) dv = 2I_0 \left\{1 + \text{sinc}\left(\frac{2\pi e \Delta v}{c}\right) \cos\left(\frac{4\pi e v_0}{c}\right)\right\}$$

0,5

$$\Rightarrow I(e) = \frac{I_{\max}}{2} \left\{1 + \text{sinc}\left(\frac{2\pi e \Delta v}{c}\right) \cos\left(\frac{4\pi e v_0}{c}\right)\right\}$$

Q63. On enregistre $I(e)$ en fonction du déplacement e à l'aide d'un photomultiplicateur.

Déterminer le facteur de visibilité V des franges d'interférence en fonction de la distance e , de Δv et de la vitesse de la lumière dans le vide c . (On définit V par la relation $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, où $I_{\max}$ étant l'intensité maximale et $I_{\min}$ l'intensité minimale.

- Pour quelle valeur de e , le facteur de visibilité V s'annule-t-il pour la première fois ?
- Donner l'allure de la courbe d'enregistrement obtenue.
- Montrer alors que l'on peut déterminer la longueur de cohérence $L_c = c / \Delta v$ de la radiation.

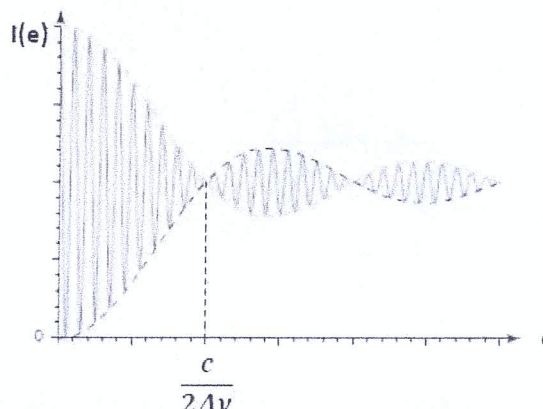
Le facteur de visibilité : $V = \left| \text{sinc}\left(\frac{2\pi e \Delta v}{c}\right) \right|$

0,25

V s'annule pour la première fois pour : $\frac{2\pi e \Delta v}{c} = \pi \Rightarrow 2e = \frac{c}{\Delta v} \Rightarrow e = \frac{c}{2\Delta v}$

0,25

Courbe $I(e) = f(e)$:



0,25

$L_c = \frac{c}{\Delta v} = 2e$ ($2e$ c'est la différence de marche correspondante à la première annulation de V).

0,25

III. Intensité en présence de l'effet Zeeman

On soumet maintenant la lampe à hydrogène à un champ magnétique intense et on sélectionne à l'aide d'un filtre interférentiel les radiations de fréquence $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu$ et $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu$ dues à l'effet Zeeman.

Pour simplifier, on admettra que les deux raies ont la même intensité d'émission I_0 et qu'elles sont rigoureusement monochromatiques (Figure 6).

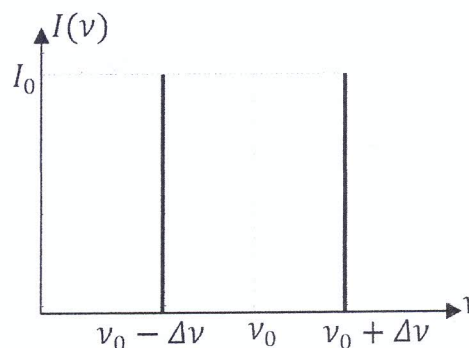


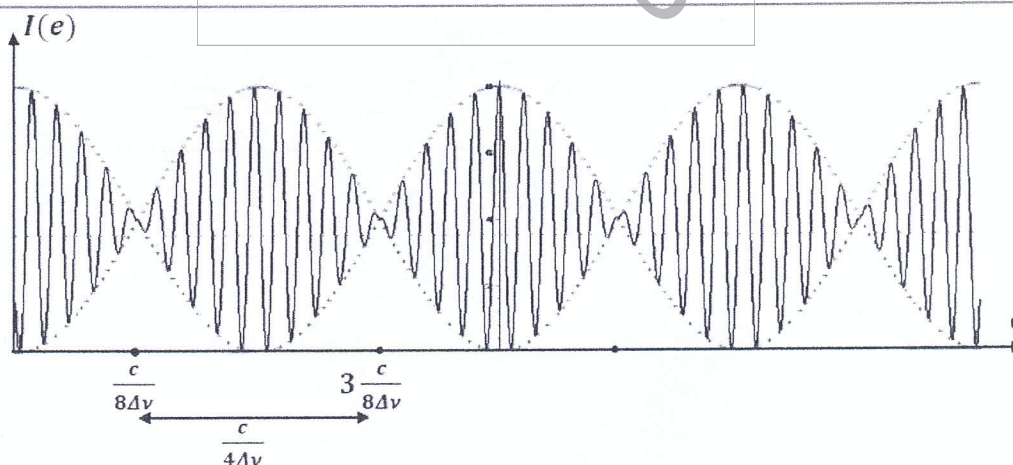
Figure 6

Q64. Déterminer l'intensité $I(e)$ au foyer F' de la lentille en fonction du déplacement $e = OA_2 - OA_1$.

Pour les deux raies monochromatiques :

$$\begin{aligned} I(e) &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{c}(\nu_0 + \Delta\nu)\right)\right) + 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{c}(\nu_0 - \Delta\nu)\right)\right) \\ &= 2I_0 \left\{2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi e \Delta\nu}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi e \nu_0}{c}\right)\right\} = 4I_0 \left\{1 + \cos\left(\frac{4\pi e \Delta\nu}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi e \nu_0}{c}\right)\right\} \\ \Rightarrow I(e) &= \frac{I_{\max}}{2} \left\{1 + \cos\left(\frac{4\pi e \Delta\nu}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi e \nu_0}{c}\right)\right\} \end{aligned}$$

Q65. Tracer l'allure de la courbe $I(e)$. En déduire l'expression de $\Delta\nu$.



Entre deux annulations du contraste, on a : $\Delta e = \frac{c}{4\Delta\nu}$, d'où $\Delta\nu = \frac{c}{4\Delta e}$.

IV. Détection par un photomultiplicateur

Le photomultiplicateur placé au foyer de la lentille dans le montage du Michelson transforme le flux lumineux qu'il reçoit en un signal électrique. Un système de traitement du signal permet la détermination des fréquences ν_0 et $\Delta\nu$.

Du point de vue électrique, le photomultiplicateur (noté PM sur la Figure 7) se comporte comme une source idéale de courant $i(t)$ en parallèle avec un condensateur de capacité $C_0 = 15 \cdot 10^{-12} \text{ F}$.

Afin de prélever une tension $u(t)$ proportionnelle à ce courant, on charge le photomultiplicateur par une résistance $r = 50 \Omega$.

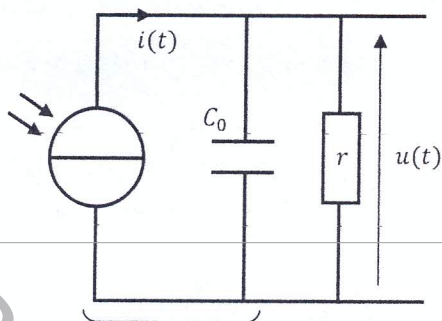


Figure 7

Q66. On étudie la réponse de ce système à un échelon de courant : la source idéale de courant délivre une intensité I_0 constante à partir de l'instant $t = 0$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
- Résoudre cette équation en considérant la condition initiale $u(0) = 0$ et évaluer t_R (exprimé en ns), le temps de réponse à 5 % du photomultiplicateur (temps que met le système pour atteindre le régime définitif à 5 % près).

$$i(t) = C_0 \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{r}$$

Pour $t > 0$:

$$rC_0 \frac{du(t)}{dt} + u(t) = rI_0 \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = \frac{1}{\tau} rI_0 \quad \text{avec} \quad \tau = rC_0 = 0,75 \text{ ns}$$

La solution est de la forme : $u(t) = rI_0 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

$$C.I. : 0 = rI_0 + A \Rightarrow A = -rI_0$$

$$\text{Finalement : } u(t) = rI_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\}$$

$$u(t_R) = rI_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t_R}{\tau}\right) \right\} = 0,95rI_0 = rI_0(1 - 0,05)$$

$$\Rightarrow t_R = -\tau \cdot \ln(0,05)$$

$$A.N : t_R = 2,24 \text{ ns.}$$

Q67. Le chariot du Michelson se déplace à une vitesse constante V telle que :

$$e(t) = OA_2 - OA_1 = V \times t$$

La source de courant délivre un courant $i(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse $I(t)$ que le détecteur reçoit.

Montrer que pour des temps d'évolution très supérieurs à t_R , la tension $u(t)$ reproduit fidèlement les variations de l'intensité lumineuse.

Si le temps des évolutions de $i(t)$ est très supérieur à t_R , on a : $u(t) = ri(t)$.

La tension reproduit l'intensité à une constante multiplicative près.

1

Q68. Le système de traitement du signal (n'est pas étudié ici) montre qu'entre deux annulations du contraste, le nombre de maximums est $N = 4464$ correspondant à un déplacement $\Delta e = 0,2721 \text{ mm}$.

Calculer les valeurs des fréquences ν_0 et $\Delta \nu$.

Entre deux annulations du contraste on a :

$$\Delta e = \frac{c}{4\Delta \nu} \Rightarrow \Delta \nu = \frac{c}{4\Delta e} \Rightarrow \Delta \nu = 2,75 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

0,5

Entre deux maximums d'intensité, $2e$ varie de λ_0 :

$$2\Delta e = N\lambda_0 = N \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow \nu_0 = \frac{N \cdot c}{2\Delta e} \Rightarrow \nu_0 = 2,46 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

0,5

Q69. Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse de chariotage permettant de détecter les différents maximums ?

Entre deux maximums successifs d'intensité, e varie de $e' = \frac{\Delta e}{4464} = V \cdot t$.

0,5

t_R est de l'ordre de 10^{-9} s .

t doit être très supérieur à t_R (de l'ordre de 10^{-8} s par exemple).

$\Delta e'$ est de l'ordre de 10^{-8} m .

0,5

Donc V doit être alors de l'ordre de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Fin de l'épreuve