



Concours de Mathématiques – Physique & Physique – Chimie Épreuve des Systèmes Techniques Automatisés



Date : Jeudi 29 mai 2025

Heure : 08H00

Durée : 3 Heures

L'épreuve comporte trois parties :

- A- Conception Mécanique
- B- Mécanique des Solides Indéformables
- C- Automatique

Le sujet de l'épreuve remis au candidat comporte deux dossiers :

- 1- Mise en situation, Données et Hypothèses
- 2- Document Réponses

Recommandations aux candidats

- Aucun autre document n'est autorisé.
- Seules les calculatrices de poche **non programmables** sont autorisées.
- Il n'est fourni au candidat qu'une **seule et unique** copie du «Dossier document réponses » qui doit être rendu en totalité, à la fin de l'épreuve, même sans réponses.
- Le document réponses doit être rendu en intégralité (**aucune feuille ne doit être supprimée**).
- Toute suppression de feuilles du document réponses est considérée comme tentative de fraude.

Dossier

Mise en situation, Données et Hypothèses

Ce dossier comporte 10 pages numérotées de 1 à 10

◆	Mise en situation	Pages 3/10 et 5/10
◆	Données et hypothèses	
	<i>A- Conception Mécanique</i>	Page 6/10
	<i>B- Mécanique des Solides Indéformables</i>	Pages 7/10 à 9/10
	<i>C- Automatique</i>	Page 10/10

ETUDE D'UNE MACHINE DE ROTO- MOULAGE

1- Mise en Situation

Le **roto-moulage** est une technique de fabrication des articles en plastique creux, figure 1, également connu sous le nom de **moulage par rotation**. C'est un procédé de fabrication dans lequel un objet creux est obtenu en chauffant une matière plastique dans un moule, généralement en aluminium ou en acier.

La matière plastique sous forme de poudre est d'abord dosée puis chargée dans le moule. Ce dernier est ensuite chauffé tout en étant mis en rotation autour de deux axes orthogonaux, ce qui permet à la matière plastique fondue de se répartir de façon homogène et de recouvrir toute la surface intérieure du moule.

Le moule est enfin refroidi, ce qui entraîne la solidification du plastique et ainsi la formation du produit final. Ce procédé est largement utilisé dans la production de divers produits tels que des conteneurs, des réservoirs industriels, des composants automobiles etc...



Figure 1 : Exemples de produits fabriqués par roto-moulage

La figure 2 montre les étapes principales du procédé de roto-moulage :

- ✓ Etape (a) : dosage et chargement du moule.
- ✓ Etape (b) : chauffage et mise en rotation du moule.
- ✓ Etape (c) : refroidissement du moule.
- ✓ Etape (d) : éjection de la pièce.

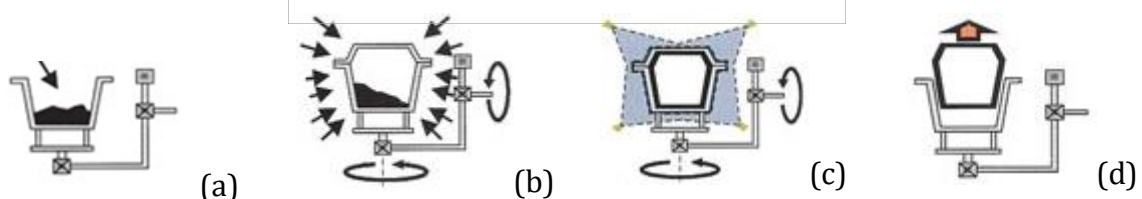


Figure 2 : Principales étapes du procédé de roto-moulage

La machine de roto-moulage, objet de cette étude (figure 3), appartient à la catégorie connue sous le nom « **tout en un** ». Ce type de machine se caractérise par des éléments de chauffage et de refroidissement intégrés directement dans le moule. Ce dernier est d'abord chauffé en un temps relativement court, puis entraîné en rotation autour de deux axes perpendiculaires. Cette conception permet de contrôler automatiquement le processus de roto-moulage, d'accélérer la production et d'améliorer l'efficacité énergétique.

L'épreuve comporte trois parties :**A. Conception Mécanique (C.M)** dont les objectifs sont :

- 1) *Faire une analyse fonctionnelle et structurelle de la machine de roto-moulage,*
- 2) *Identifier et caractériser un élément de transmission.*

B. Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I) dont les objectifs sont :

- 1) *Déterminer le temps nécessaire pour l'ouverture du moule (4),*
- 2) *Déterminer l'expression du couple exercé par le moteur (M2) pour assurer la fermeture du moule (4),*
- 3) *Déterminer l'expression du couple nécessaire pour faire actionner l'unité de rotation,*
- 4) *Déterminer la relation entre les rotations principale et secondaire du système,*
- 5) *Déterminer l'expression du couple délivré par le moteur (M_1).*

C. Automatique dont les objectifs sont :

- 1) *Faire une étude séquentielle pour la préparation du matériau pour le procédé de roto-moulage,*
- 2) *Etudier la commande du moteur d'entraînement du tapis Tp1.*

NB : Les trois parties A, B et C sont indépendantes et utilisent des notations indépendantes.

2-Données et Hypothèses

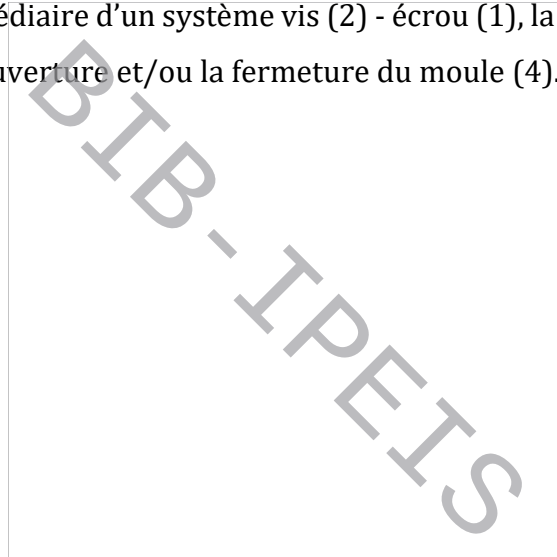
Partie A : Conception Mécanique

❖ Principe de fonctionnement de l'unité de rotation (figure 3) :

L'énergie électrique alimente un moteur (M_1) par un contacteur (KM_1). Ce dernier entraîne, par l'intermédiaire d'un système poulies-courroie (P_1, P_2) et d'un réducteur à engrenages coniques (6,8), la rotation du moule (4) suivant deux axes.

❖ Principe de fonctionnement de l'unité de fermeture (figures 3 et 4):

L'énergie électrique alimente un moteur (M_2) par un contacteur (KM_2). Ce dernier entraîne par l'intermédiaire d'un système vis (2) - écrou (1), la translation du couvercle (3) assurant ainsi l'ouverture et/ou la fermeture du moule (4).



Partie B : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I)

Description de l'unité de fermeture et d'ouverture du moule (figure 4)

Le moteur (M_2), délivrant un couple moteur C_{m2} et tournant à une vitesse ω_{m2} , entraîne en rotation l'écrou (1) qui, à son tour entraîne la translation de la vis (2) solidaire au couvercle (3) assurant ainsi l'ouverture et/ou la fermeture du moule (4).

Il est à noter que, **pendant la phase d'ouverture et/ou de fermeture du moule (4)**, le moteur (M_1) est à l'arrêt, le moyeu (7) est par conséquent fixe. L'ensemble $\{E_2\}=\{(4),(6)\}$ est supposé bloqué. De même un système de freinage (non représenté) permet de bloquer la rotation de (5) par rapport à (7).

Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à (7) est supposé galiléen.

La figure 5 montre le graphe des liaisons correspondant à l'unité d'ouverture et de fermeture du moule.

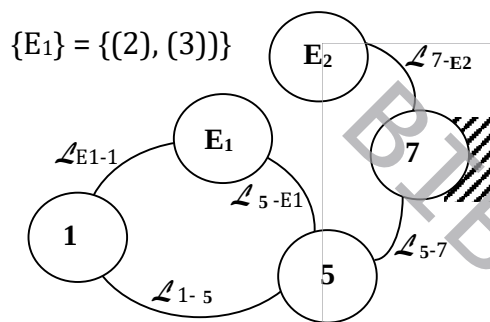


Figure 5 : Graphe des liaisons de l'unité d'ouverture et de fermeture du moule
(Configuration moule ouvert)

$\mathcal{L}_{5-E1}$: glissière d'axe $(C, \vec{y}_0)$

$\mathcal{L}_{E1-1}$: hélicoïdale d'axe $(B, \vec{y}_0)$

$\mathcal{L}_{1-5}$: pivot d'axe $(K, \vec{y}_0)$

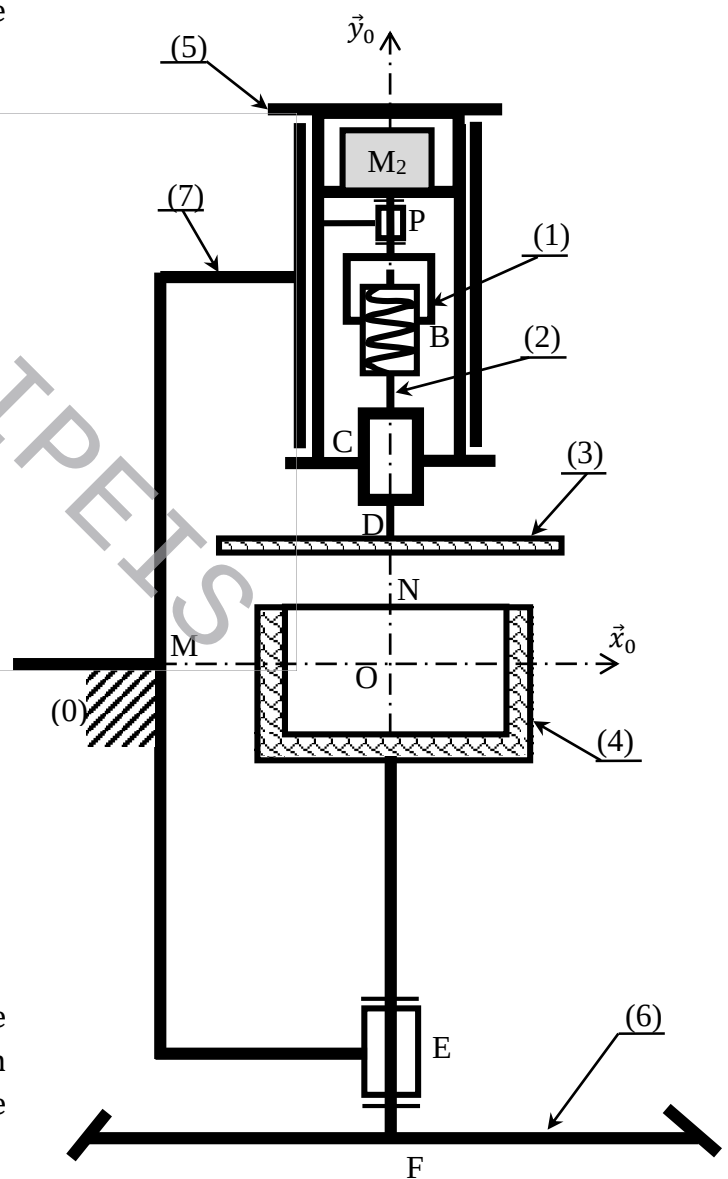
$\mathcal{L}_{7-E2}$: pivot d'axe $(E, \vec{y}_0)$

$\mathcal{L}_{5-7}$: pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$

A est le centre de la liaison $\mathcal{L}_{5-7}$ (figure 6)

On désigne par :

- ✓ p : le pas de la vis (2), $p=5\text{mm}$.
- ✓ λ : le paramètre de translation de l'ensemble $\{E_1\}$ au cours de son mouvement par rapport (5) tel que $\vec{ND} = \lambda \vec{y}_0$
- ✓ φ : l'angle de rotation de l'écrou (1) par rapport à (5) tel que $\vec{\Omega}(1/5) = -\dot{\varphi} \vec{y}_0$. $\dot{\varphi} = \omega_{m2}$ est la



vitesse angulaire de l'arbre moteur
(M_2).

Figure 4 : Unité de fermeture et
d'ouverture du moule (moule ouvert)

Description de l'unité de rotation (Figure 6)

La figure 6 présente une modélisation simplifiée de l'unité de rotation faisant montrer la rotation du moule autour des deux axes perpendiculaires $(O, \vec{x}_0)$ et $(O, \vec{y}_4)$. Durant le fonctionnement de la machine, le moule (4) est fermé et forme avec le couvercle (3) un ensemble qui sera noté : $(S_4) = \{(3), (4)\}$.

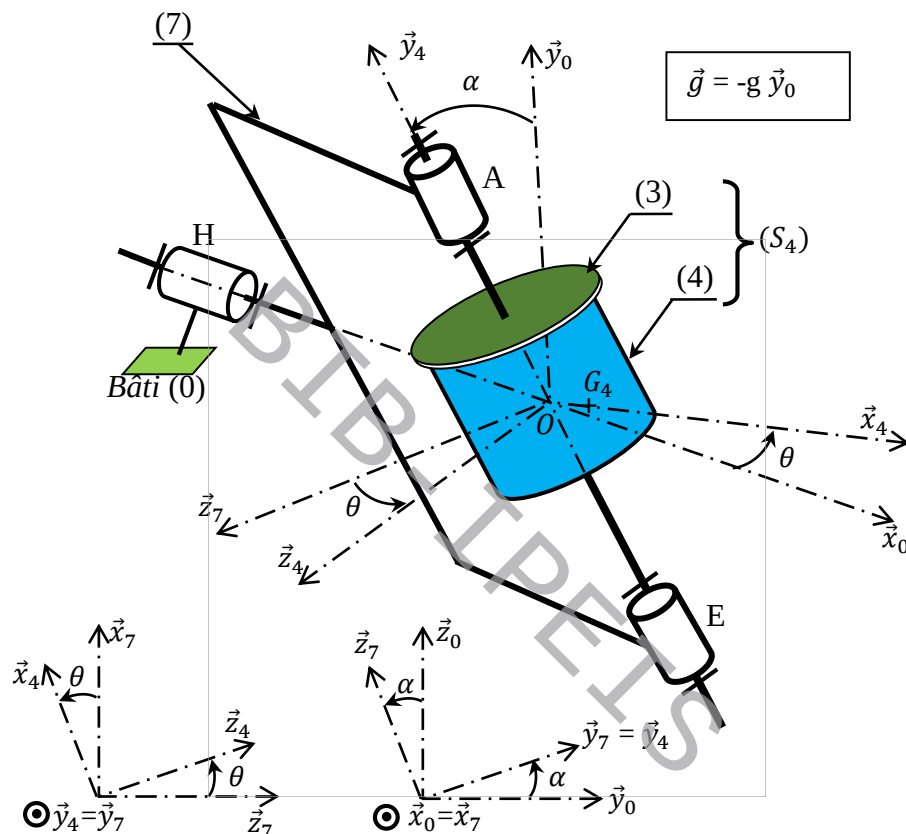
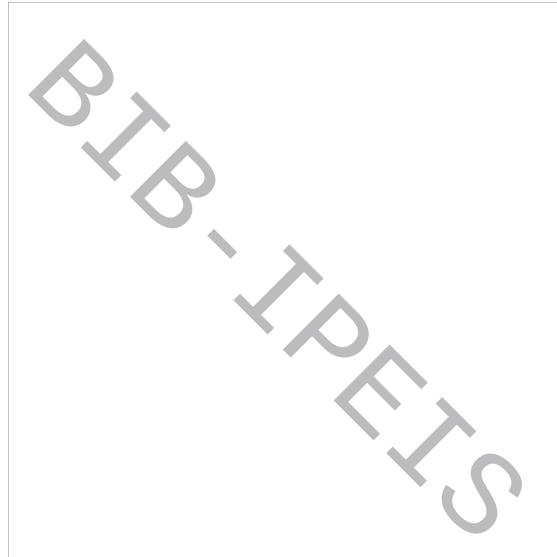


Figure 6 : Schéma cinématique de l'unité de rotation

On désigne par :

- ✓ $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: le repère, supposé galiléen, lié au bâti (0).
- ✓ $R_7(O, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$: le repère lié au moyeu (7).
- ✓ $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$: le repère lié au solide (S_4)
- ✓ α : le paramètre de la rotation principale, tel que $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_7) = (\vec{z}_0, \vec{z}_7)$.
- ✓ θ : le paramètre de la rotation secondaire, tel que $\theta = (\vec{z}_7, \vec{z}_4) = (\vec{x}_7, \vec{x}_4)$.

Pour l'ensemble du mécanisme, les masses de tous les solides sont négligées sauf celles des solides **(7)** et **(S₄)**.



Description de la chaîne de transmission (Figure 7)

La rotation principale est assurée par un moteur électrique (M_1) et un système poulies-courroie $((P_1)-(P_2))$ de rapport de réduction r_1 , alors que la rotation secondaire provient d'un engrenage conique $((6)-(8))$, (figures 3 et 7).

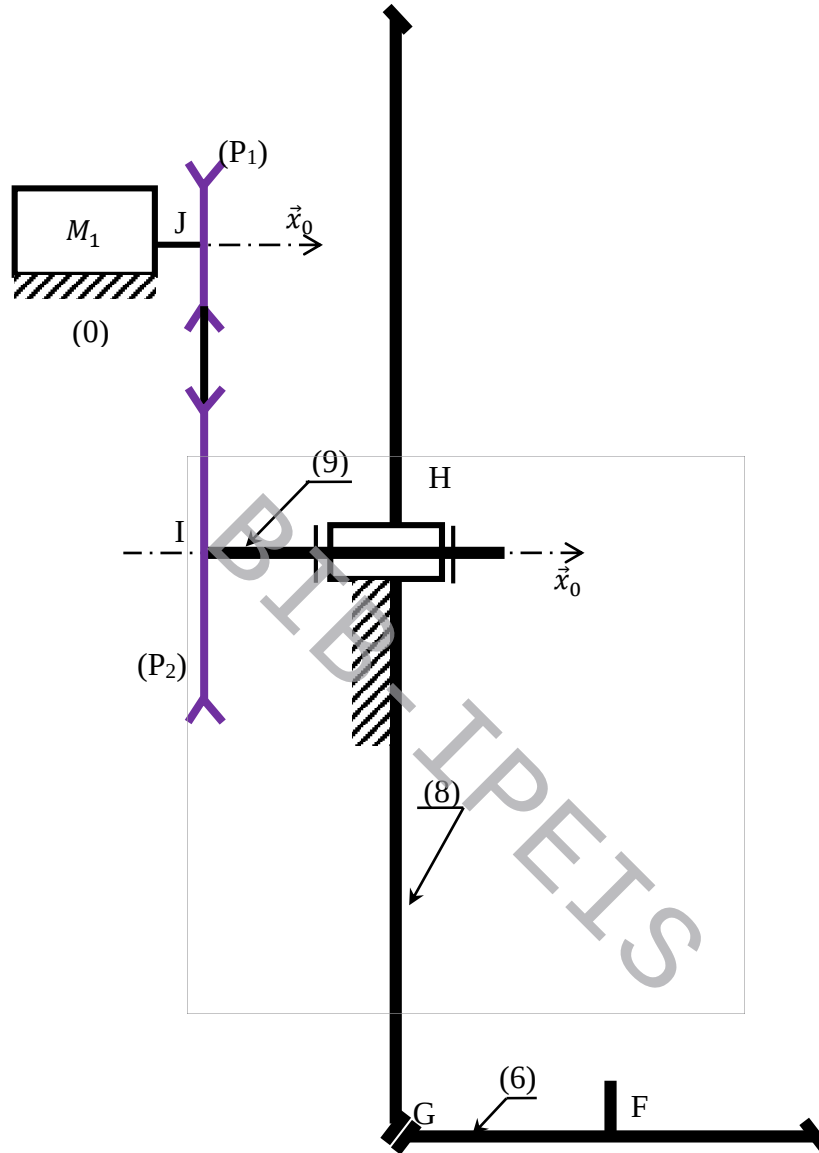


Figure 7: Schéma cinématique de la chaîne de transmission

On pose :

$$\checkmark \quad r_1 = \frac{\omega_7}{\omega_{m1}}$$

ω_{m1} est la vitesse de rotation délivrée par le moteur (M_1) tel que $\omega_{m1} = \omega_{P1}$.

ω_7 est la vitesse de rotation du moyeu principal (7) tel que $\omega_7 = \omega_{P2} = \omega_9 = \dot{\alpha}$.

- ✓ J_1 : le moment d'inertie de l'ensemble $\Sigma_1 = \{\text{arbre moteur } M_1, P_1\}$ par rapport à son axe de rotation $(J, \vec{x}_0)$.
- ✓ J_2 : le moment d'inertie de l'ensemble $\Sigma_2 = \{\text{arbre (9), } P_2\}$ par rapport à l'axe $(I, \vec{x}_0)$.

Partie C : Automatique

Broyage et coloration pour la préparation des matériaux pour le roto-moulage

Le broyage et la coloration dans le processus de roto-moulage sont deux étapes importantes de la préparation des matériaux. La matière plastique se présente d'abord sous forme de granulés d'environ 3 mm de diamètre.

Pour préparer la matière, les granulés doivent être réduits en particules très fines, figure 8, et qui peuvent être mélangées à sec avec des pigments (colorants) ou d'autres additifs pour créer des propriétés spécifiques.

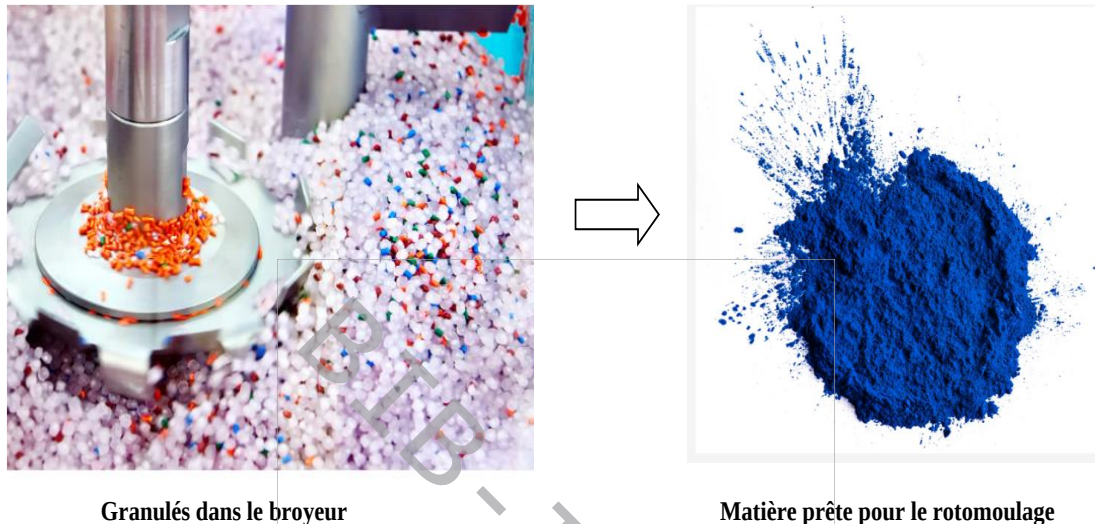


Figure 8 : Broyage et coloration pour la préparation des matériaux pour le roto-moulage

Le **broyage** est un processus de préparation des matériaux qui consiste à réduire la taille des granulés de plastique en poudre. Cette opération s'effectue à l'aide d'un broyeur qui utilise des lames rotatives à grande vitesse pour hacher les granulés en très petits morceaux.

Le **procédé de mélange à sec** peut être utilisé dans la préparation de la poudre de plastique pour le processus de roto-moulage. Il consiste à mélanger la résine plastique avec d'autres ingrédients, tels que les pigments (colorants), les charges, les stabilisateurs et les inhibiteurs d'UV, sous forme sèche.

Cette opération peut être réalisée à l'aide d'une machine de mélange à sec, qui comprend généralement une chambre de mélange, une vis sans fin et une goulotte d'évacuation. Les ingrédients sont ajoutés à la chambre de mélange, où ils sont mélangés par la vis sans fin, puis évacués par la goulotte. Le processus de mélange à sec permet d'obtenir un mélange cohérent et homogène, nécessaire pour obtenir une couleur homogène et d'autres propriétés dans le produit fini. La poudre mélangée peut être utilisée pour le roto-moulage.

DOSSIER

DOCUMENT REPONSES

- ✓ Ce dossier comporte 22 pages numérotées de 1 à 22.
- ✓ Un seul dossier document réponses est fourni au candidat et doit être rendu en totalité, même sans réponses, à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

Partie A : Conception Mécanique

A1 –A4. En se référant au texte explicatif du fonctionnement du système (page 6 du document technique) et au schéma cinématique de la figure 3, répondre aux questions suivantes :

A1 – Donner le nom et justifier le choix des liaisons suivantes :

Liaison en B :

.....

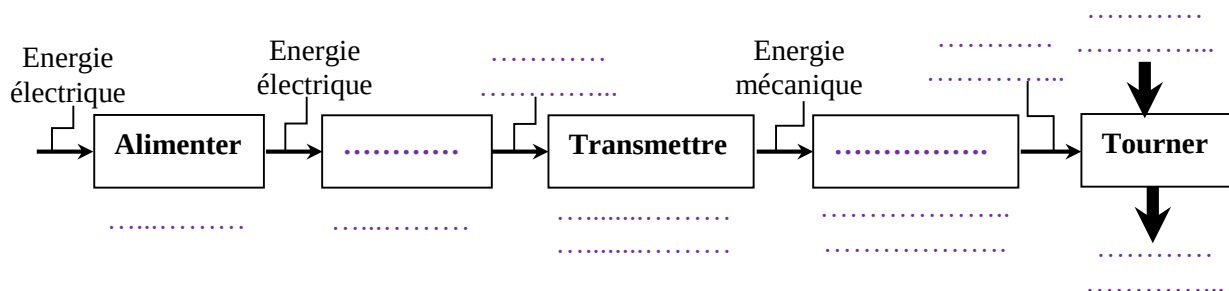
Liaison en C :

.....

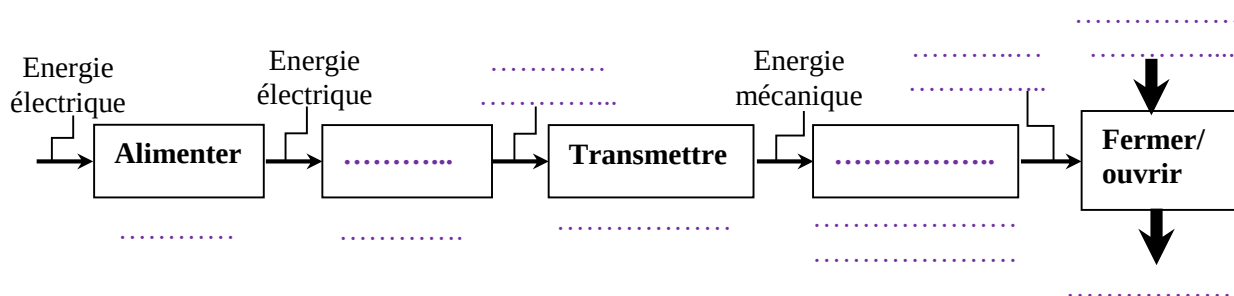
A2 – Compléter le tableau ci-dessous :

	Unité de rotation	Unité de fermeture
Pré-actionneur		
actionneur		
Transmetteur de puissance		
effecteur		

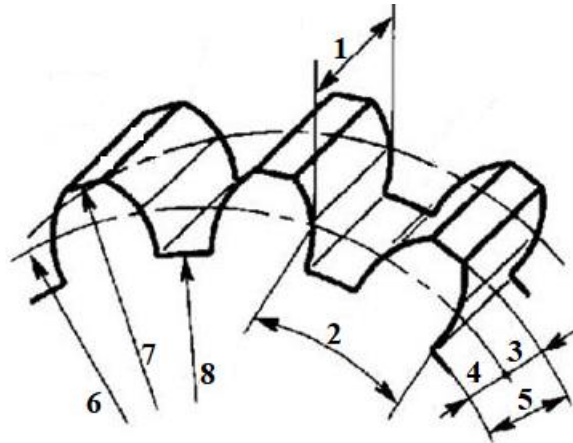
A3 – Compléter le diagramme correspondant à la **chaîne d'énergie de l'unité de rotation**.



A4 – Compléter le diagramme correspondant à la **chaîne d'énergie de l'unité de fermeture**

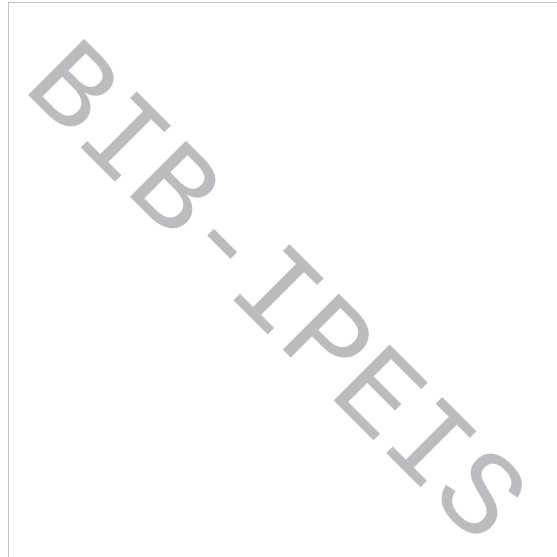


A5 -A11. On considère le dessin ci-dessous d'une partie d'une roue à denture droite.
On donne : le nombre de dents $Z = 21$, le module $m=2\text{mm}$; et un facteur $k = 10$.



On demande de compléter le tableau suivant :

Num	Nom & symbole	Expression	valeur
	1	Largeur de la roue (b)	$b = k.m$ $b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ mm}$
A5	2	Pas au primitif (p)	
A6	3	Saillie (ha)	
A7	4	Creux (hf)	
A8	5	Hauteur de la dent (h)	
A9	6	Diamètre primitif (d)	
A10	7	Diamètre des têtes (da)	
A11	8	Diamètre des pieds (df)	



Partie B : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I.)

B-1 - Étude de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (figure 4).

❖ Étude statique

L'objectif de l'étude statique est de déterminer l'expression du couple fourni par le moteur (M_2) pour la fermeture du moule (4).

On suppose que :

- ✓ Toutes les liaisons sont parfaites,
- ✓ Tous les solides sont homogènes.
- ✓ La notation $\{\tau_{i \rightarrow j}\}_Q = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{array} \middle| \begin{array}{c} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{array} \right\}_Q^{B_0}$ est adoptée pour présenter le torseur des actions mécaniques de liaison qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) en un point Q, exprimé dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- ✓ L'action du moteur (M_2) sur l'écrou (1) (de filetage droit) au point B est modélisée par le torseur suivant : $\{\tau_{M_2 \rightarrow 1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_{m2} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B^{B_0}$.
- ✓ Tous les solides de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (4) sont supposés de masses négligeables.
- ✓ Pendant la **phase de fermeture** du moule (4), les actions exercées par l'ensemble $\{E_1\}$ sur (4) sont modélisées par le torseur suivant $\{\tau_{E_1 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} -N_D \vec{y}_0 \\ \vec{M}_D \end{array} \right\}_D^{B_0}$.
- ✓ Pendant l'ouverture et la fermeture du moule, l'arbre du moteur M_2 tourne à une vitesse de rotation N_{m2} , ($N_{m2}=100\text{tr/mn}$).

1. Ecrire les torseurs des actions mécaniques des liaisons indiquées dans le tableau ci-dessous :

Liaisons	Torseurs des actions mécaniques dans $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
$\mathcal{L}_{5-E_1}$	$\{\tau_{5-E_1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_C^{B_0}$
$\mathcal{L}_{E_1-1}$	$\{\tau_{E_1-1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_B^{B_0}$
$\mathcal{L}_{1-5}$	$\{\tau_{1-5}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_B^{B_0}$

2. Pour la liaison $\mathcal{L}_{E_1-1}$, donner l'expression de la composante du moment suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ en fonction de la composante de la force suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ et du pas de filetage.

.....

.....

.....

.....

.....

3. On suppose que (5) est fixe, écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment statique à l'écrou (1) en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

4. Le moule est fermé, écrire l'équation scalaire déduite de l'application du théorème de la résultante statique à l'ensemble $\{E_1\}$ en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

5. Dédurre l'expression du couple C_{m2} du moteur (M_2) en fonction de la force de fermeture du moule N_D .

.....

.....

.....

.....

.....

$$C_{m2} = \dots\dots\dots$$

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer le temps nécessaire pour l'ouverture du moule (4).

6. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(1/5)\}_B$ du solide **(1)** au point P au cours de son mouvement par rapport à (5),

$$\{\mathcal{R}(1/5)\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ P}}$$

7. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(E_1/5)\}_D$ de l'ensemble **(E1)** au point D au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{\mathcal{R}(E_1/5)\}_D = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ D}}$$

8. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(1/E_1)\}_B$ de l'ensemble **(E1)** au point B au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{\mathcal{R}(1/E_1)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ B}}$$

9. Donner la relation liant la vitesse linéaire de la vis (2) $\dot{\lambda}$ à la vitesse de rotation de l'écrou (1) $\dot{\phi}$.

$$\dot{\lambda} = \dots\dots\dots$$

10. Afin de faciliter l'opération de démoulage, le couvercle **(3)** doit s'éloigner du moule d'une distance $\lambda_0 = 500 \text{ mm}$. Déterminer l'expression du temps t nécessaire à l'ouverture du moule en fonction de λ_0 , ω_{m2} et le pas p .

$$\dots\dots\dots$$

11. Calculer le temps t .

$$\dots\dots\dots$$

$$t = \dots\dots\dots \text{s}$$

B-2-Etude cinématique et dynamique de l'unité de rotation (figures 3 et 6)

L'objectif de cette partie est de déterminer l'expression du couple, au niveau de l'arbre (9), (noté C_{m7}) nécessaire pour faire actionner l'unité de rotation.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le moyeu principal (7) de masse m_7 et de centre d'inertie G_7 situé sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$ est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (0). Le repère $R_7(O, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$ est lié à (7), on désigne par α (rotation principale) le paramètre de rotation tel que $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_7) = (\vec{z}_0, \vec{z}_7)$ (figure 6). La matrice d'inertie du moyeu (7) en O, dans la

$$\text{base } B_7(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7) \text{ est définie par : } [I_O(7)] = \begin{bmatrix} A_7 & 0 & 0 \\ 0 & B_7 & 0 \\ 0 & 0 & C_7 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)}$$

- ✓ Le solide (S_4) de masse m_4 et de centre d'inertie G_4 est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{y}_4)$ avec le moyeu principal (7). Le repère $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est lié à (S_4), on désigne par θ (rotation secondaire) le paramètre de rotation tel que $\theta = (\vec{z}_7, \vec{z}_4) = (\vec{x}_7, \vec{x}_4)$. $\vec{OG}_4 = a \vec{x}_4$. La matrice d'inertie du solide (S_4) en O, dans la

$$\text{base } B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4) \text{ est définie par : } [I_O(S_4)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

- ✓ Le couple (au niveau de l'arbre 9) appliqué sur le moyeu principal (7) de la machine est noté : $\vec{C}_{m7} = C_{m7} \vec{x}_0$.

12. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{S}(S_4 / 0)\}_O$ du solide (S_4) au point O au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$) :

.....

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{S}(S_4 / 0)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \end{array} \right\}_{B_4}^O$$

- 13.** Déterminer le moment cinétique du solide **(S₄)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{\sigma}_O(S_4/0)$ (exprimé dans la base $B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$) :

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{\sigma}_O(S_4/0) = \dots\dots\dots$$

- 14.** Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide **(S₄)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_4/0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_4/0) = \dots\dots\dots$$

- 15.** Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide **(7)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(7/0)$.

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(7/0) = \dots\dots\dots$$

16. Déterminer le moment des efforts extérieurs appliqués à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 \cdot \vec{M}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{M}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \dots\dots\dots$$

17. En appliquant le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$, déduire l'expression du couple C_{m7} en fonction de α, θ , leurs dérivées et des données du mécanisme.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$C_{m7} = \dots\dots\dots$$

B-3- Étude de la chaîne de transmission (figures 3 et 7)

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer la relation entre la rotation principale $\dot{\alpha}$ et la rotation secondaire $\dot{\theta}$ du système.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le rayon de la roue (6) est noté R_6 .
- ✓ Le rayon de la roue (8) est noté R_8 .

18. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{G}(6/0)\}_F$ de la roue (6) au point F au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_7(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$) :

.....

.....

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{G}(6/0)\}_F = \left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \end{array} \right\}_{\substack{B_7 \\ F}}$$

19. En utilisant la condition de roulement sans glissement entre les roues (6) et (8) au point G, déterminer une relation entre la vitesse de rotation principale $\dot{\alpha}$ et la vitesse de rotation secondaire $\dot{\theta}$.

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Étude énergétique

L'objectif de cette étude est de déterminer l'expression du couple C_{m1} délivré par le moteur (M_1).

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Les poulies (P_1) et (P_2) sont en liaisons pivots d'axe $\vec{x}_0$ avec le bâti (0) aux points J et I respectivement.
- ✓ L'action mécanique du moteur (M_1) sur la poulie (P_1) est modélisé par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m1} = C_{m1} \vec{x}_0$.
- ✓ L'action mécanique de la partie réceptrice de la machine sur la poulie (P_2) est modélisée par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m7} = -C_{m7} \vec{x}_0$.
- ✓ Les courroies sont supposées inextensibles et de masse négligeables.

- 20.** Déterminer l'énergie cinétique du système $\Sigma_3 = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0) en fonction de J_1 , J_2 , r_1 et $\dot{\alpha} = \omega_{m1}$ (**Voir figure 7**).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$E_c(\Sigma_3 / 0) = \dots\dots\dots$$

- 21.** Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

.....

.....

.....

$$P(\bar{\Sigma}_3 \rightarrow \Sigma_3 / 0) = \dots\dots\dots$$

- 22.** Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures s'exerçant au système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$P_{\text{int}}(\Sigma_3) = \dots\dots\dots$$

- 23.** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer une expression du couple moteur C_{m1} en fonction de C_{m7} , J_1 , J_2 , r_1 et $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}_{m1}$.

.....

.....

.....

.....

$$C_{m1} = \dots\dots\dots$$

Partie C : Automatique

Section C-1. Étude séquentielle pour la préparation du matériau pour le roto-moulage

1. Présentation du système

Le système automatisé, figure c1, permet de préparer la matière première (granulés, colorants et additifs) en vue de l'utiliser dans le processus de roto-moulage.

Trois produits (**P₁**, **P₂**, **P₃**) sont placés dans des réservoirs différents :

- **P₁** : Plastique pur sous forme de granulés.
- **P₂** : additif (composé organique).
- **P₃** : Colorant.

Les trois réservoirs sont équipés de trois électrovannes **A**, **B** et **C** qui déversent les produits dans les bascules de pesage **BD** et **BE**.

La dose de chacun des trois produits est déterminée par pesage sur les bascules **BD** et **BE** dont les réservoirs sont équipés d'électrovannes **D** et **E**. Ces électrovannes permettent le déversement des différents produits dans le broyeur.

La bascule **BD** fournit les deux informations suivantes :

- **S₀ = 1** : bascule **BD** vide.
- **S₁ = 1** : bascule **BD** chargée par un poids prédéterminé du granulé **P₁**.

La bascule **BE** fournit les trois informations suivantes :

- **S₂ = 1** : bascule **BE** vide.
- **S₃ = 1** : bascule **BE** chargée par un poids prédéterminé de l'additif **P₂**.
- **S₄ = 1** : bascule **BE** chargée par un poids prédéterminé des deux produits **P₂** et **P₃**.

2. Description du cycle de fonctionnement

2.1. Etat initial du système

- ❖ Les bascules de pesage **BD** et **BE** sont vides.
- ❖ La tige du vérin à double effet **V1** est sortante (**I₁₁ = 1**).
- ❖ Le broyeur est vide (**S₅ = 0** ; **S₅** étant un capteur optique placé au fond du broyeur non représenté sur la figure **c1**).
- ❖ Le pot d'alimentation de la vis d'Archimède est vide (**S₆ = 0**, non représenté sur la figure **c1**)

Remarque : le bouton poussoir de départ cycle "**Dcy**" commande en même temps l'unité de broyage et celle du mélange des produits.

2.2. Unité 1 : Fonctionnement de l'unité de broyage

Une impulsion sur le bouton de départ cycle, **Dcy**, provoque les opérations suivantes :

- ❖ Ouverture de l'électrovanne **A** (**KA = 1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré du produit **P₁**.
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **A** et ouverture de l'électrovanne **D** (**KD = 1**) jusqu'à l'écoulement total du produit **P₁** dans le broyeur, ce qui entraîne la fermeture de l'électrovanne **D**.
- ❖ Mise en marche du moteur **Mt1** du broyeur à grande vitesse (**KM1 = 1**) durant un temps **t₁**.
- ❖ L'écoulement du temps **t₁** implique la fin du broyage.

2.3. Unité 2 : Mélange des différents produits

L'impulsion sur le bouton **Dcy**, provoque les opérations suivantes:

- ❖ Ouverture de l'électrovanne **B** (**KB=1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré du produit **P₂**.
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **B** et ouverture de l'électrovanne **C** (**KC = 1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré (**P₂ + P₃**).
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **C** et attente de la fin du temps **t₁** (fin du broyage).

Dès que le moteur **Mt1** a fini le broyage des granulés (produit **P₁**, voir paragraphe 2.2), c'est à dire le temps **t₁** s'est écoulé (le temps de broyage est supérieur à celui de la pesée de **P₂ + P₃**), on aura alors :

- ❖ Rotation du moteur **Mt1** à petite vitesse (**KM2 = 1**) et ouverture de l'électrovanne **E** (**KE = 1**) jusqu'à l'écoulement total des produits (**P₂ + P₃**) dans le broyeur.
- ❖ Mise en rotation du moteur **Mt2** à petite vitesse (**KM3 = 1**), et ouverture de la vanne **X** (**KX = 1**) pour vider le produit (**P₁+P₂+P₃**) dans le pot d'alimentation de la vis d'Archimède, **Mt1** continu sa rotation jusqu'à ce que le broyeur soit vide (**S₅= 0**).
- ❖ Fermeture de la vanne **X** et arrêt de **Mt1**, le moteur **Mt2** continu sa rotation et s'arrêtera après un nombre de tours prédéterminé signalé par un capteur **c**.

Lorsque le moteur **Mt2** effectue le nombre de tours prédéterminé (**c =1**), le système s'arrête. Le mélange est alors fini et la matière première est prête pour être remplie dans des sacs appropriés.

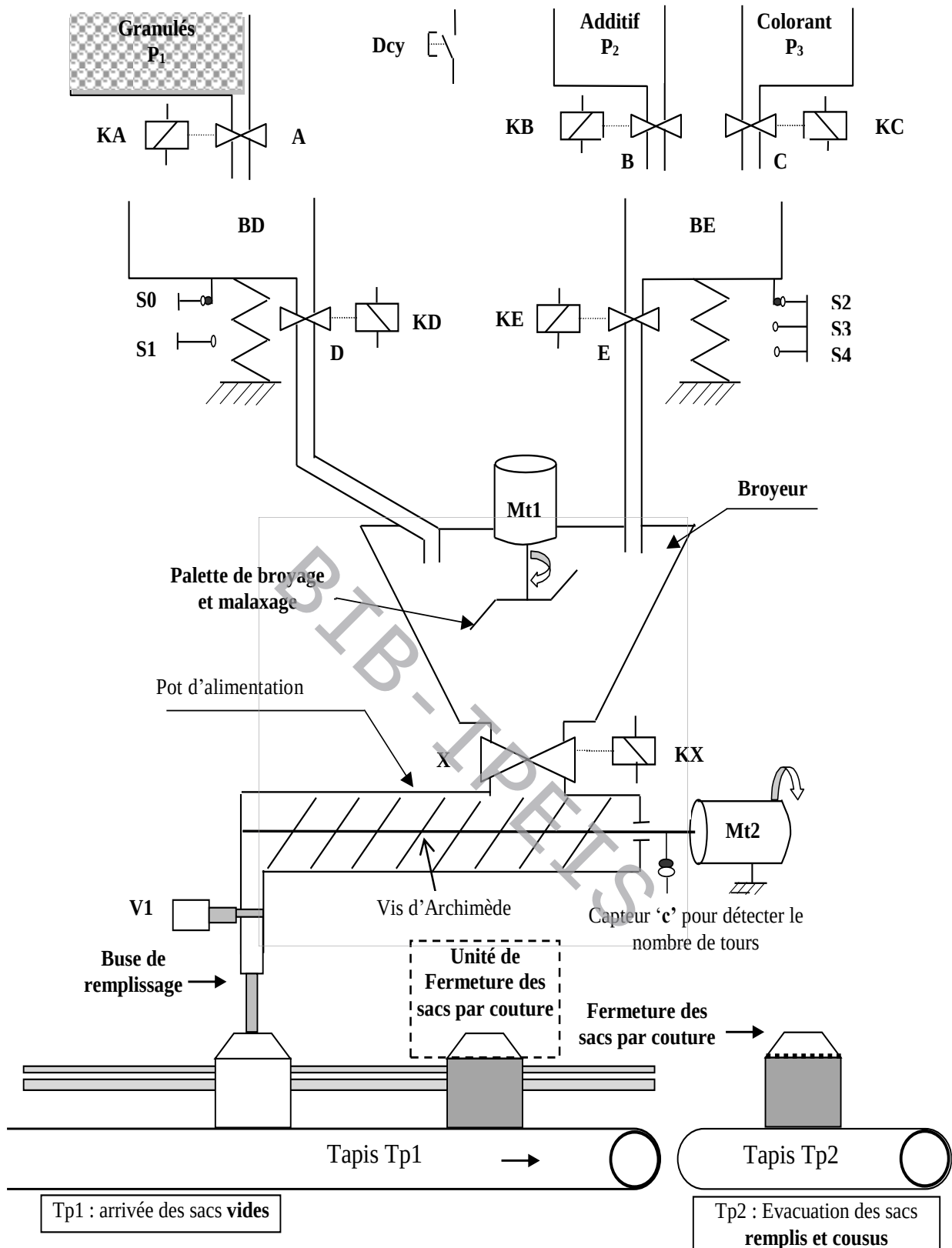
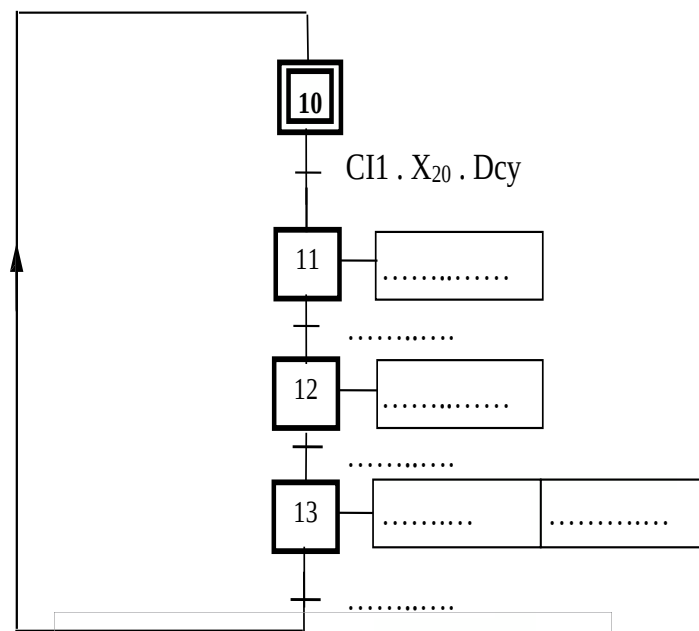
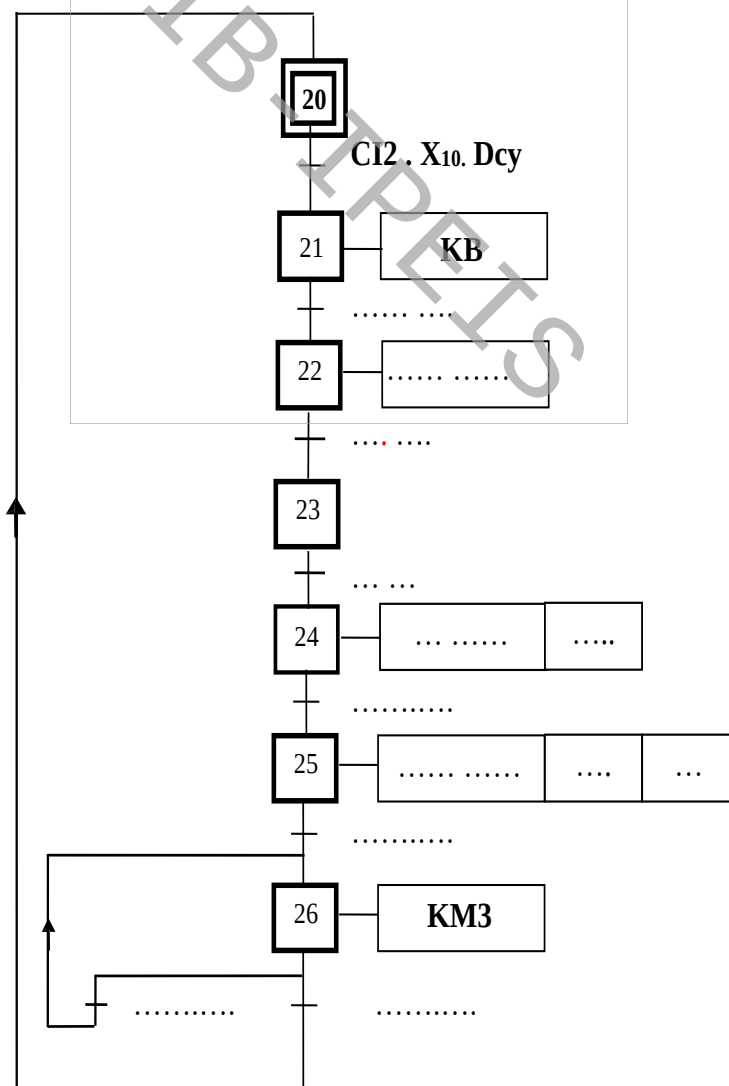


Figure c1. Système de préparation de la matière première pour le roto-moulage

C1. Compléter le GRAFCET du point de vue commande du système de broyage (Unité 1).



C2. Compléter le GRAFCET de point de vue commande de l'unité de mélange (Unité 2).



C3-C4. Proposer les expressions logiques (4 variables au moins) des deux conditions initiales CI1 et CI2.

C3 : CI1 =

C4: CI2 =

Section C-2. Commande du moteur d'entraînement du tapis Tp1

L'objectif de cette partie est d'asservir la vitesse linéaire du tapis Tp1, afin de garantir une bonne fermeture des sacs remplis par couture.

1. Présentation

La translation du tapis Tp1 est obtenue à l'aide d'un moteur électrique (**Mc**) qui entraîne en rotation à travers un réducteur à poulies-courroie, le tambour qui déplace le tapis. La figure c2 présente le système d'entraînement du tapis Tp1.

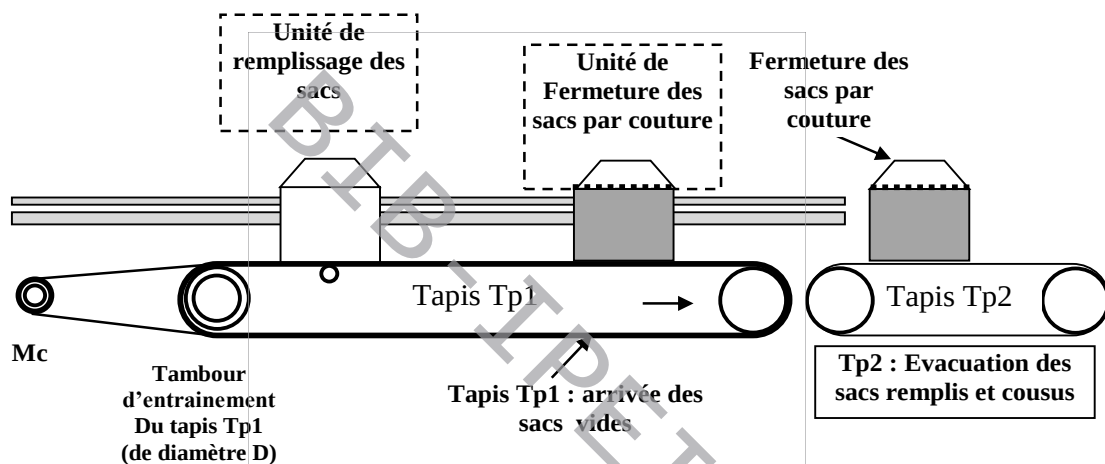


Figure c2 : Système d'entraînement du tapis Tp1

Le schéma de principe de la transmission du mouvement est donné par la Figure c3.

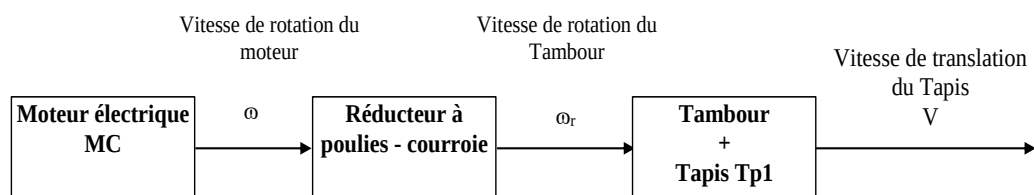


Figure c3 : Principe de la transmission du mouvement.

2. Étude de l'asservissement de vitesse du tapis Tp1

L'objectif de cette étude est de choisir un correcteur pour satisfaire le cahier des charges suivant :

- Un temps de réponse minimal ;
- Aucun dépassement ;
- Les perturbations sont sans effet sur la stabilité ;
- Stabilité assurée avec $M\phi \geq 45^\circ$ et $MG \geq 15$ dB ;
- Erreur statique de position nulle.

Le schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis est donné par la figure c4.

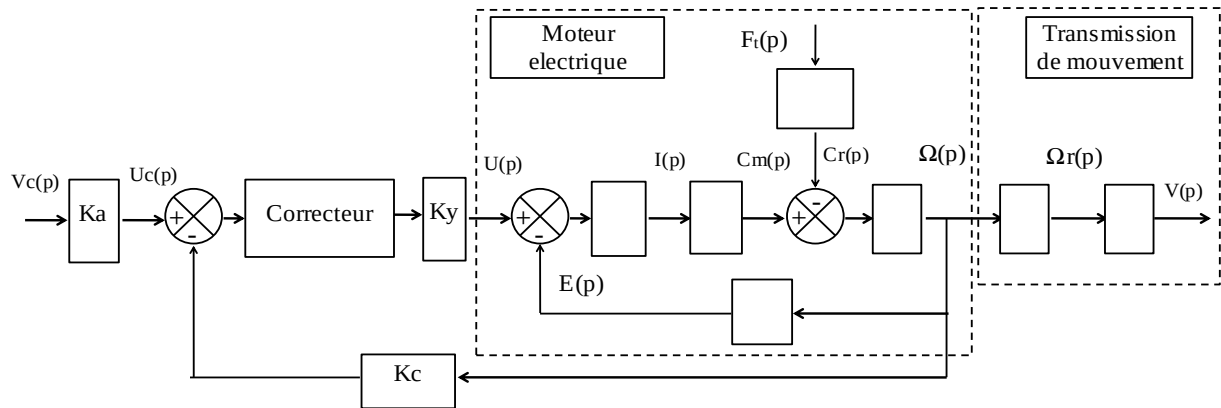


Figure c4 : schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis

Le fonctionnement du moteur est décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) : \text{la tension d'alimentation du moteur} \quad (1)$$

$$e(t) = K_e \omega(t) : \text{la force contre électromotrice} \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t) : \text{équation du mouvement} \quad (3)$$

$$c_m(t) = K_m i(t) : \text{le couple moteur} \quad (4)$$

avec :

V_c : vitesse de consigne.

U_c : tension d'entrée .

$i(t)$: le courant de l'induit .

R et L sont respectivement la résistance et l'inductance de l'induit du moteur.

K_m et K_e sont respectivement les constantes du couple moteur et de la force contre électromotrice ($K_m = K_e$).

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur.

$F_t(t)$: effort résistant appliqué sur le tapis par les sacs remplis .

$c_r(t)$: le couple résistant ramené sur l'axe du rotor résultant de l'effort F_t

$$c_r(t) = 0.5 r.D.F_t(t) \quad (5)$$

r est le rapport de réduction entre le moteur M_c et le tambour du tapis $Tp1$ de diamètre D (figure c2).

Remarques :

- La transformée de laplace de $F_t(t)$ est $F_t(p)$.
- Toutes les conditions initiales sont nulles.

C5. Ecrire les équations de (1 à 5) dans le domaine de Laplace

(1) :

(2) :

(3) :

(4) :

(5) :

C6-C7. En admettant que la transmission est sans glissement, écrire les relations entre :

C6. $V(t)$ et $\omega_r(t)$:

.....

C7. $\omega_r(t)$ et $\omega(t)$

.....

C8. Compléter le schéma bloc de la figure c5 en négligeant l'inductance « L » et le frottement « f ».

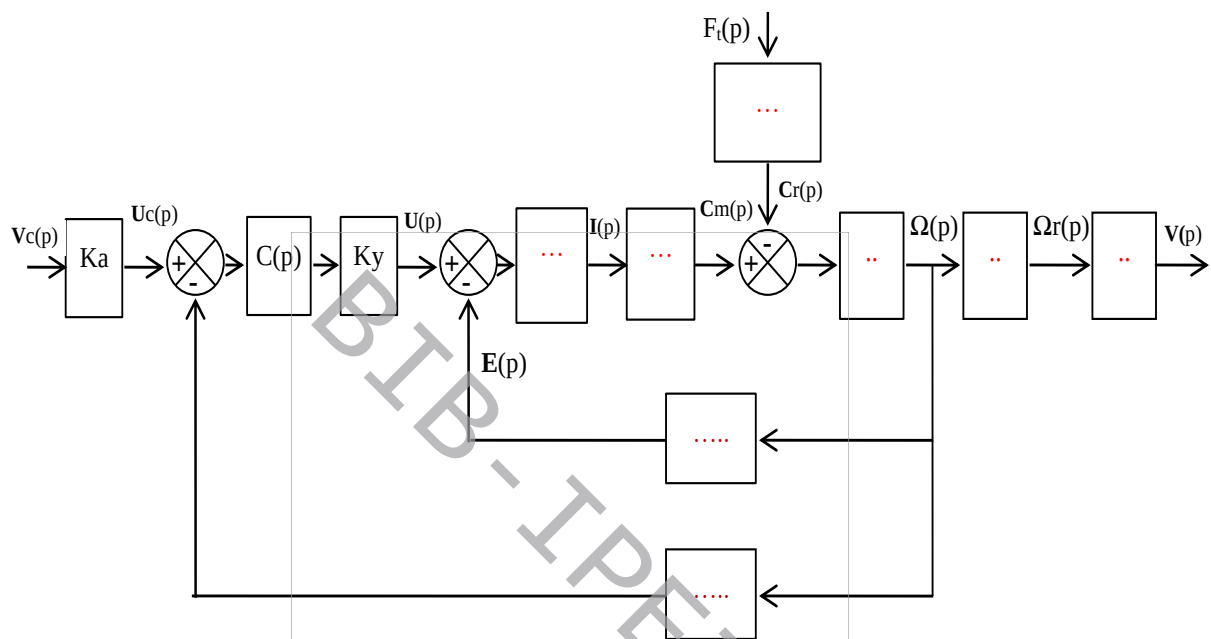


Figure c5 : Schéma bloc du système asservi

On veut mettre le schéma de la figure c5, sous la forme de la figure c6. Déterminer les différentes fonctions de transfert suivantes : (sans détails de calcul).

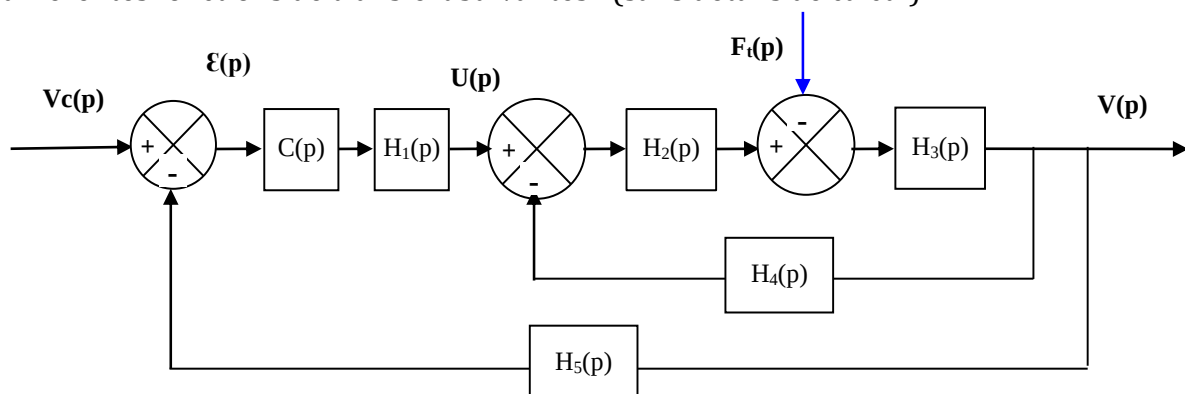


Figure c6: Schéma bloc du système simplifié

C9. $H_1(p)$?:

$H_1(p)$ =

C10. $H_2(p)$?:

$H_2(p) = \dots\dots\dots$

C11. $H_3(p)$?:

$H_3(p) = \dots\dots\dots$

C12. $H_4(p)$?:

$H_4(p) = \dots\dots\dots$

C13. $H_5(p)$?:

$H_5(p) = \dots\dots\dots$

Dans la suite du sujet on prendra :

$H_1(p) = K_1$; $H_2(p) = K_2$; $H_3(p) = K_3 / p$; $H_4(p) = K_4$ et $H_5(p) = K_5 = 1$

Où les constantes K_n sont positifs, $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

On donne : $V(p) = T_1(p) V_c(p) - T_2(p) F_t(p)$

C14-C15. On veut déterminer la fonction de transfert $T_1(p)$ en fonction des K_n .

C14. Compléter le schéma de la **figure c7**

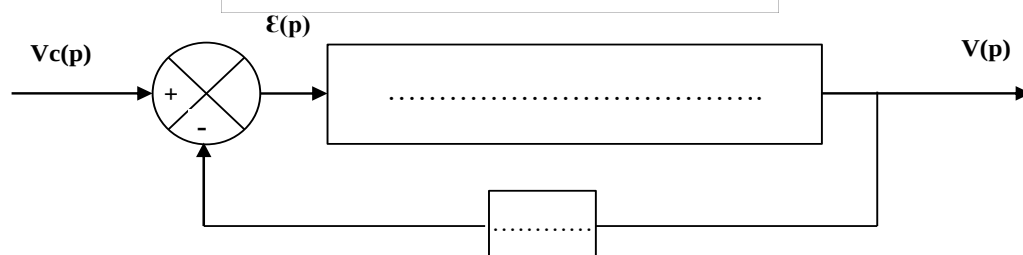


Figure c7 : schéma fonctionnel simplifié vis à vis de la consigne

C15. Donner alors l'expression de $T_1(p)$

.....

.....

.....

$T_1(p) = \dots\dots\dots$

C16-C17. Détermination de la fonction de transfert $T_2(p)$ en fonction des K_n .

C16. Compléter le schéma de la figure c8.

- $F_t(p)$

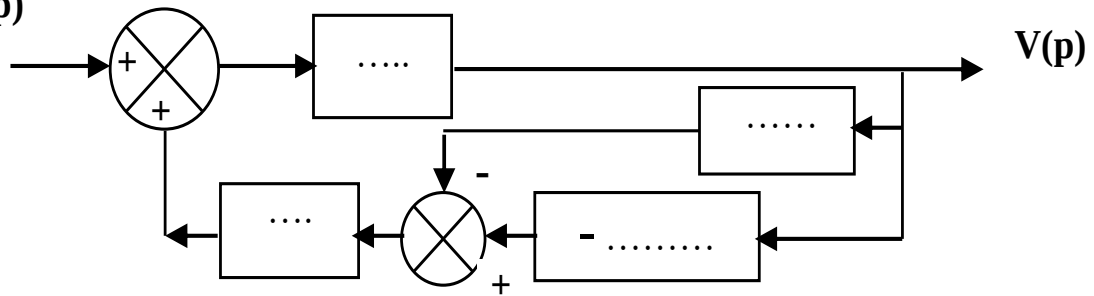


Figure c8 : schéma fonctionnel simplifié vis à vis de la perturbation

C17. Donner alors l'expression de $T_2(p)$

.....

 $T_2(p) =$

C18. Dites pourquoi si le système est stable vis à vis de la consigne $V_c(p)$ il est aussi stable par rapport à la perturbation. (on ne vous demande pas d'étudier la stabilité).

.....

 Dans ce qui suit on prendra $C(p) = K_p$

C19. En justifiant la réponse, le système est-il stable ?

.....

C20. Déterminer, en le justifiant, l'erreur statique unitaire de position $\epsilon_p(\infty)$

$\epsilon_p(\infty) =$

.....

C21. En justifiant la réponse, le choix du correcteur $C(p) = K_p$ est-il acceptable ?

.....

.....

Dans ce qui suit on prendra :

- $C(p) = \frac{K_i}{p}$ et $F_t(p) = 0$
- Le moteur possède la fonction de transfert : $H_m(p) = \frac{K_x}{1 + \tau p}$
- Le schéma bloc est celui de la figure c10

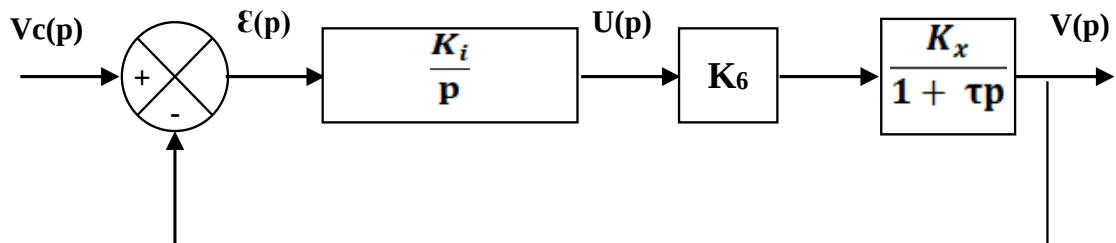


Figure c10 : schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis

C22. Déterminer la fonction de transfert (FT) en boucle ouverte $T_{Bo}(p)$. En déduire, son gain statique K_{Bo} , son ordre et sa classe.

$T_{Bo}(p) = \dots\dots\dots$

$K_{Bo} = \dots\dots\dots$

Ordre = $\dots\dots\dots$

Classe = $\dots\dots\dots$

C23. Déterminer la FT en boucle fermée $T_{Bf}(p)$ en fonction de K_{Bo} et τ , la mettre sous forme canonique.

$T_{Bf}(p) = \dots\dots\dots$

Forme canonique : $T_{Bf}(p) = \frac{\dots\dots\dots}{1 + \dots\dots\dots}$

24. En justifiant la réponse, le système est-il stable ?

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

C25. Déterminer, en le justifiant, l'erreur statique unitaire de position $\varepsilon_p(\infty)$

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

C26. Quelle relation doit exister entre K_{BO} et τ , pour avoir un asservissement le **plus rapide** mais **sans dépassement** ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C27-C28. Déterminer la marge du gain **MG** et la marge de Phase **M ϕ** pour $\tau = 0.01s$.
C27. MG = ?

.....

MG =

C28. M ϕ = ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

M ϕ =

C29. Préciser, en le justifiant, si le cahier des charges est respecté pour le choix d'un correcteur de type intégral pur.

.....

.....

.....

.....

.....

DOSSIER

DOCUMENT REPONSES

- ✓ Ce dossier comporte 22 pages numérotées de 1 à 22.
- ✓ Un seul dossier document réponses est fourni au candidat et doit être rendu en totalité, même sans réponses, à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

Partie A : Conception Mécanique

A1 –A4. En se référant au texte explicatif du fonctionnement du système (page 6 du document technique) et au schéma cinématique de la figure 3, répondre aux questions suivantes :

A1 – Donner le nom et justifier le choix des liaisons suivantes :

Liaison en B :

.....

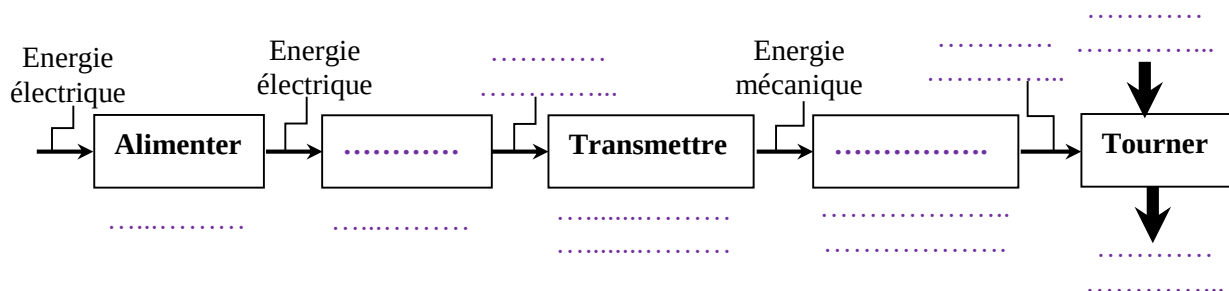
Liaison en C :

.....

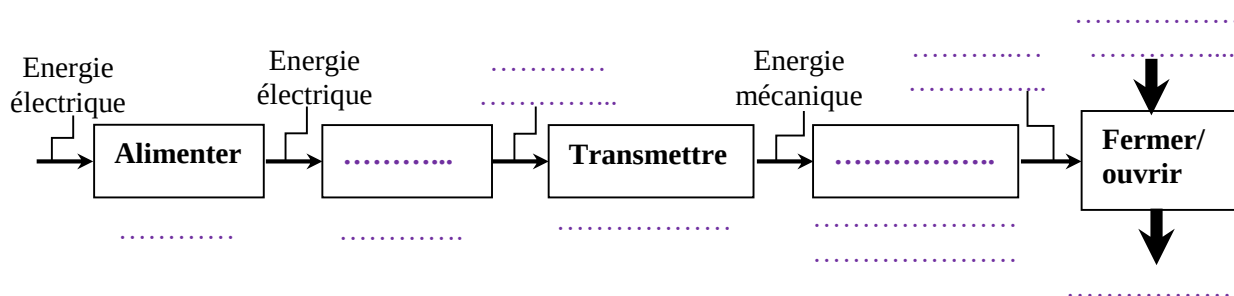
A2 – Compléter le tableau ci-dessous :

	Unité de rotation	Unité de fermeture
Pré-actionneur		
actionneur		
Transmetteur de puissance		
effecteur		

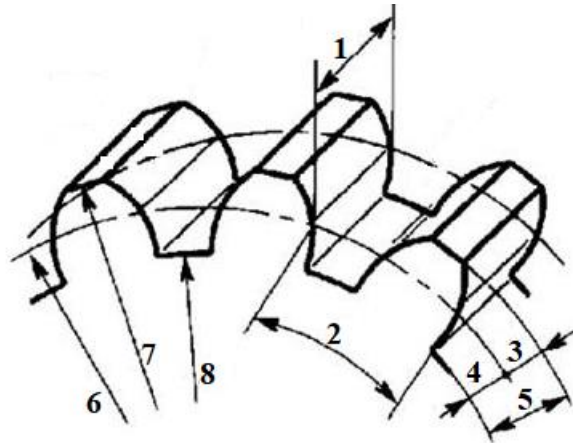
A3 – Compléter le diagramme correspondant à la **chaîne d'énergie de l'unité de rotation**.



A4 – Compléter le diagramme correspondant à la **chaîne d'énergie de l'unité de fermeture**

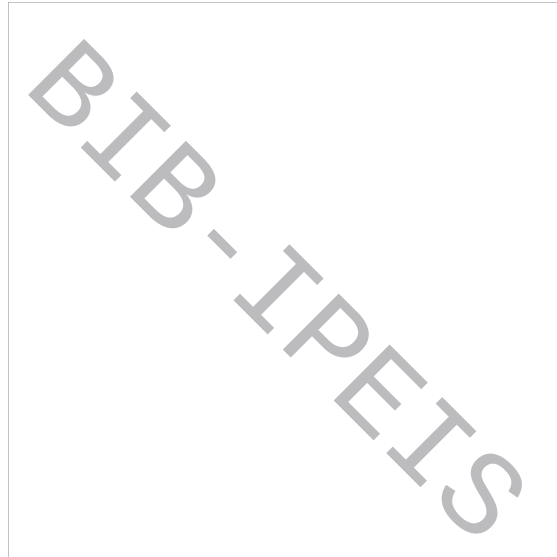


A5 -A11. On considère le dessin ci-dessous d'une partie d'une roue à denture droite.
On donne : le nombre de dents $Z = 21$, le module $m=2\text{mm}$; et un facteur $k = 10$.



On demande de compléter le tableau suivant :

Num	Nom & symbole	Expression	valeur
	1	Largeur de la roue (b)	$b = k.m$ $b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ mm}$
A5	2	Pas au primitif (p)	
A6	3	Saillie (ha)	
A7	4	Creux (hf)	
A8	5	Hauteur de la dent (h)	
A9	6	Diamètre primitif (d)	
A10	7	Diamètre des têtes (da)	
A11	8	Diamètre des pieds (df)	



Partie B : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I.)

B-1 - Étude de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (figure 4).

❖ Étude statique

L'objectif de l'étude statique est de déterminer l'expression du couple fourni par le moteur (M_2) pour la fermeture du moule (4).

On suppose que :

- ✓ Toutes les liaisons sont parfaites,
- ✓ Tous les solides sont homogènes.

- ✓ La notation $\{\tau_{i \rightarrow j}\}_Q = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{array} \middle| \begin{array}{c} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{array} \right\}_Q^{B_0}$ est adoptée pour présenter le torseur des

actions mécaniques de liaison qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) en un point Q, exprimé dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

- ✓ L'action du moteur (M_2) sur l'écrou (1) (de filetage droit) au point B est modélisée par le torseur suivant : $\{\tau_{M_2 \rightarrow 1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_{m2} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B^{B_0}$.

- ✓ Tous les solides de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (4) sont supposés de masses négligeables.

- ✓ Pendant la **phase de fermeture** du moule (4), les actions exercées par l'ensemble $\{E_1\}$ sur (4) sont modélisées par le torseur suivant $\{\tau_{E_1 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} -N_D \vec{y}_0 \\ \vec{M}_D \end{array} \right\}_D^{B_0}$.

- ✓ Pendant l'ouverture et la fermeture du moule, l'arbre du moteur M_2 tourne à une vitesse de rotation N_{m2} , ($N_{m2}=100\text{tr/mn}$).

1. Ecrire les torseurs des actions mécaniques des liaisons indiquées dans le tableau ci-dessous :

Liaisons	Torseurs des actions mécaniques dans $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
$\mathcal{L}_{5-E_1}$	$\{\tau_{5-E_1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_C^{B_0}$
$\mathcal{L}_{E_1-1}$	$\{\tau_{E_1-1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_B^{B_0}$
$\mathcal{L}_{1-5}$	$\{\tau_{1-5}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \middle \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_B^{B_0}$

2. Pour la liaison $\mathcal{L}_{E_1-1}$, donner l'expression de la composante du moment suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ en fonction de la composante de la force suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ et du pas de filetage.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. On suppose que (5) est fixe, écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment statique à l'écrou (1) en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Le moule est fermé, écrire l'équation scalaire déduite de l'application du théorème de la résultante statique à l'ensemble $\{E_1\}$ en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Dédurre l'expression du couple C_{m2} du moteur (M_2) en fonction de la force de fermeture du moule N_D .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$C_{m2} = \dots\dots\dots$$

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer le temps nécessaire pour l'ouverture du moule (4).

6. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(1/5)\}_B$ du solide **(1)** au point P au cours de son mouvement par rapport à (5),

$$\{\mathcal{R}(1/5)\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ P}}$$

7. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(E_1/5)\}_D$ de l'ensemble **(E1)** au point D au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{\mathcal{R}(E_1/5)\}_D = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ D}}$$

8. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{R}(1/E_1)\}_B$ de l'ensemble **(E1)** au point B au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{\mathcal{R}(1/E_1)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_0 \\ B}}$$

9. Donner la relation liant la vitesse linéaire de la vis (2) $\dot{\lambda}$ à la vitesse de rotation de l'écrou (1) $\dot{\phi}$.

$$\dot{\lambda} = \dots\dots\dots$$

10. Afin de faciliter l'opération de démoulage, le couvercle **(3)** doit s'éloigner du moule d'une distance $\lambda_0 = 500 \text{ mm}$. Déterminer l'expression du temps t nécessaire à l'ouverture du moule en fonction de λ_0 , ω_{m2} et le pas p .

$$t = \dots\dots\dots$$

11. Calculer le temps t .

$$t = \dots\dots\dots \text{s}$$

B-2-Etude cinématique et dynamique de l'unité de rotation (figures 3 et 6)

L'objectif de cette partie est de déterminer l'expression du couple, au niveau de l'arbre (9), (noté C_{m7}) nécessaire pour faire actionner l'unité de rotation.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le moyeu principal (7) de masse m_7 et de centre d'inertie G_7 situé sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$ est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (0). Le repère $R_7(O, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$ est lié à (7), on désigne par α (rotation principale) le paramètre de rotation tel que $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_7) = (\vec{z}_0, \vec{z}_7)$ (figure 6). La matrice d'inertie du moyeu (7) en O, dans la

$$\text{base } B_7(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7) \text{ est définie par : } [I_O(7)] = \begin{bmatrix} A_7 & 0 & 0 \\ 0 & B_7 & 0 \\ 0 & 0 & C_7 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)}$$

- ✓ Le solide (S_4) de masse m_4 et de centre d'inertie G_4 est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{y}_4)$ avec le moyeu principal (7). Le repère $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est lié à (S_4), on désigne par θ (rotation secondaire) le paramètre de rotation tel que $\theta = (\vec{z}_7, \vec{z}_4) = (\vec{x}_7, \vec{x}_4)$. $\vec{OG}_4 = a \vec{x}_4$. La matrice d'inertie du solide (S_4) en O, dans la

$$\text{base } B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4) \text{ est définie par : } [I_O(S_4)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

- ✓ Le couple (au niveau de l'arbre 9) appliqué sur le moyeu principal (7) de la machine est noté : $\vec{C}_{m7} = C_{m7} \vec{x}_0$.

12. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{S}(S_4 / 0)\}_O$ du solide (S_4) au point O au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$) :

.....

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{S}(S_4 / 0)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \\ \text{.....} \end{array} \right\}_{B_4}^O$$

- 13.** Déterminer le moment cinétique du solide **(S₄)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{\sigma}_O(S_4/0)$ (exprimé dans la base $B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$) :

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{\sigma}_O(S_4/0) = \dots\dots\dots$$

- 14.** Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide **(S₄)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_4/0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_4/0) = \dots\dots\dots$$

- 15.** Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide **(7)** au point O dans son mouvement par rapport au bâti **(0)** : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(7/0)$.

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}_O(7/0) = \dots\dots\dots$$

16. Déterminer le moment des efforts extérieurs appliqués à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 \cdot \vec{M}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{M}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \dots\dots\dots$$

17. En appliquant le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$, déduire l'expression du couple C_{m7} en fonction de α, θ , leurs dérivées et des données du mécanisme.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$C_{m7} = \dots\dots\dots$$

B-3- Étude de la chaîne de transmission (figures 3 et 7)

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer la relation entre la rotation principale $\dot{\alpha}$ et la rotation secondaire $\dot{\theta}$ du système.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le rayon de la roue (6) est noté R_6 .
- ✓ Le rayon de la roue (8) est noté R_8 .

18. Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{G}(6/0)\}_F$ de la roue (6) au point F au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_7(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$) :

.....

.....

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{G}(6/0)\}_F = \left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \end{array} \right\}_{\substack{B_7 \\ F}}$$

19. En utilisant la condition de roulement sans glissement entre les roues (6) et (8) au point G, déterminer une relation entre la vitesse de rotation principale $\dot{\alpha}$ et la vitesse de rotation secondaire $\dot{\theta}$.

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Étude énergétique

L'objectif de cette étude est de déterminer l'expression du couple C_{m1} délivré par le moteur (M_1).

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Les poulies (P_1) et (P_2) sont en liaisons pivots d'axe $\vec{x}_0$ avec le bâti (0) aux points J et I respectivement.
- ✓ L'action mécanique du moteur (M_1) sur la poulie (P_1) est modélisé par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m1} = C_{m1} \vec{x}_0$.
- ✓ L'action mécanique de la partie réceptrice de la machine sur la poulie (P_2) est modélisée par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m7} = -C_{m7} \vec{x}_0$.
- ✓ Les courroies sont supposées inextensibles et de masse négligeables.

- 20.** Déterminer l'énergie cinétique du système $\Sigma_3 = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0) en fonction de J_1 , J_2 , r_1 et $\dot{\alpha} = \omega_{m1}$ (**Voir figure 7**).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$E_c(\Sigma_3 / 0) = \dots\dots\dots$$

- 21.** Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

.....

.....

.....

$$P(\bar{\Sigma}_3 \rightarrow \Sigma_3 / 0) = \dots\dots\dots$$

- 22.** Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures s'exerçant au système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$P_{\text{int}}(\Sigma_3) = \dots\dots\dots$$

- 23.** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer une expression du couple moteur C_{m1} en fonction de C_{m7} , J_1 , J_2 , r_1 et $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}_{m1}$.

.....

.....

.....

.....

$$C_{m1} = \dots\dots\dots$$

Partie C : Automatique

Section C-1. Étude séquentielle pour la préparation du matériau pour le roto-moulage

1. Présentation du système

Le système automatisé, figure c1, permet de préparer la matière première (granulés, colorants et additifs) en vue de l'utiliser dans le processus de roto-moulage.

Trois produits (**P₁**, **P₂**, **P₃**) sont placés dans des réservoirs différents :

- **P₁** : Plastique pur sous forme de granulés.
- **P₂** : additif (composé organique).
- **P₃** : Colorant.

Les trois réservoirs sont équipés de trois électrovannes **A**, **B** et **C** qui déversent les produits dans les bascules de pesage **BD** et **BE**.

La dose de chacun des trois produits est déterminée par pesage sur les bascules **BD** et **BE** dont les réservoirs sont équipés d'électrovannes **D** et **E**. Ces électrovannes permettent le déversement des différents produits dans le broyeur.

La bascule **BD** fournit les deux informations suivantes :

- **S₀ = 1** : bascule **BD** vide.
- **S₁ = 1** : bascule **BD** chargée par un poids prédéterminé du granulé **P₁**.

La bascule **BE** fournit les trois informations suivantes :

- **S₂ = 1** : bascule **BE** vide.
- **S₃ = 1** : bascule **BE** chargée par un poids prédéterminé de l'additif **P₂**.
- **S₄ = 1** : bascule **BE** chargée par un poids prédéterminé des deux produits **P₂** et **P₃**.

2. Description du cycle de fonctionnement

2.1. Etat initial du système

- ❖ Les bascules de pesage **BD** et **BE** sont vides.
- ❖ La tige du vérin à double effet **V1** est sortante (**I₁₁ = 1**).
- ❖ Le broyeur est vide (**S₅ = 0** ; **S₅** étant un capteur optique placé au fond du broyeur non représenté sur la figure **c1**).
- ❖ Le pot d'alimentation de la vis d'Archimède est vide (**S₆ = 0**, non représenté sur la figure **c1**)

Remarque : le bouton poussoir de départ cycle "**Dcy**" commande en même temps l'unité de broyage et celle du mélange des produits.

2.2. Unité 1 : Fonctionnement de l'unité de broyage

Une impulsion sur le bouton de départ cycle, **Dcy**, provoque les opérations suivantes :

- ❖ Ouverture de l'électrovanne **A** (**KA = 1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré du produit **P₁**.
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **A** et ouverture de l'électrovanne **D** (**KD = 1**) jusqu'à l'écoulement total du produit **P₁** dans le broyeur, ce qui entraîne la fermeture de l'électrovanne **D**.
- ❖ Mise en marche du moteur **Mt1** du broyeur à grande vitesse (**KM1 = 1**) durant un temps **t₁**.
- ❖ L'écoulement du temps **t₁** implique la fin du broyage.

2.3. Unité 2 : Mélange des différents produits

L'impulsion sur le bouton **Dcy**, provoque les opérations suivantes:

- ❖ Ouverture de l'électrovanne **B** (**KB=1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré du produit **P₂**.
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **B** et ouverture de l'électrovanne **C** (**KC = 1**) jusqu'à l'obtention du poids désiré (**P₂ + P₃**).
- ❖ Fermeture de l'électrovanne **C** et attente de la fin du temps **t₁** (fin du broyage).

Dès que le moteur **Mt1** a fini le broyage des granulés (produit **P₁**, voir paragraphe 2.2), c'est à dire le temps **t₁** s'est écoulé (le temps de broyage est supérieur à celui de la pesée de **P₂ + P₃**), on aura alors :

- ❖ Rotation du moteur **Mt1** à petite vitesse (**KM2 = 1**) et ouverture de l'électrovanne **E** (**KE = 1**) jusqu'à l'écoulement total des produits (**P₂ + P₃**) dans le broyeur.
- ❖ Mise en rotation du moteur **Mt2** à petite vitesse (**KM3 = 1**), et ouverture de la vanne **X** (**KX = 1**) pour vider le produit (**P₁+P₂+P₃**) dans le pot d'alimentation de la vis d'Archimède, **Mt1** continu sa rotation jusqu'à ce que le broyeur soit vide (**S₅= 0**).
- ❖ Fermeture de la vanne **X** et arrêt de **Mt1**, le moteur **Mt2** continu sa rotation et s'arrêtera après un nombre de tours prédéterminé signalé par un capteur **c**.

Lorsque le moteur **Mt2** effectue le nombre de tours prédéterminé (**c =1**), le système s'arrête. Le mélange est alors fini et la matière première est prête pour être remplie dans des sacs appropriés.

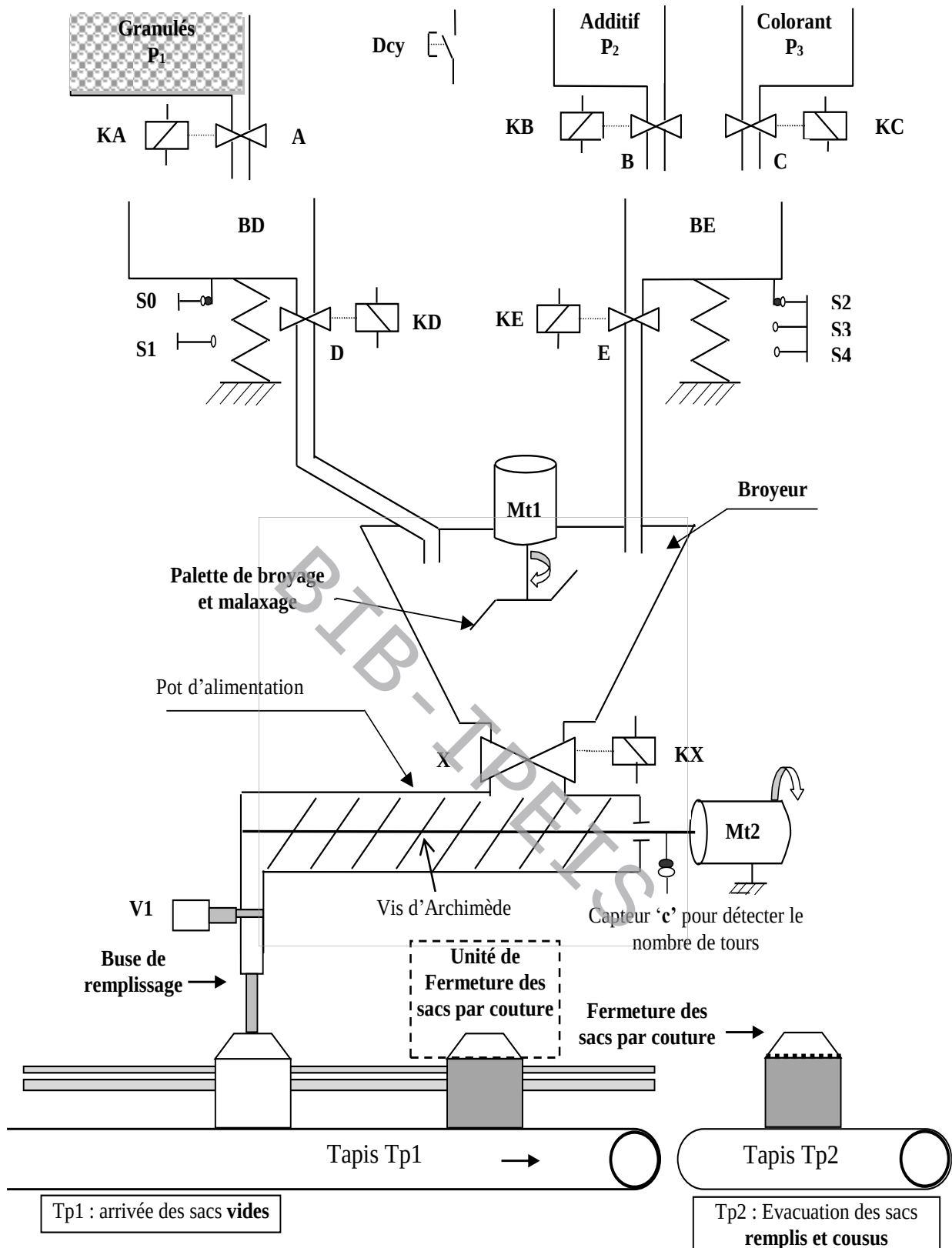
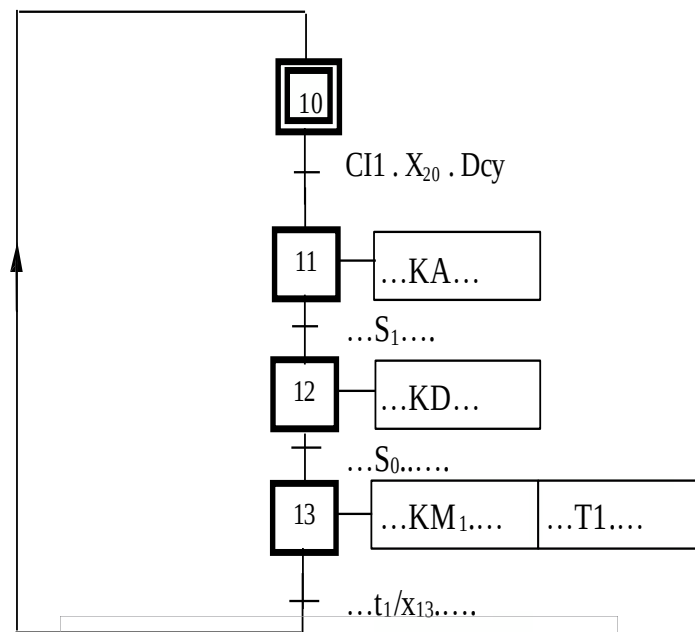
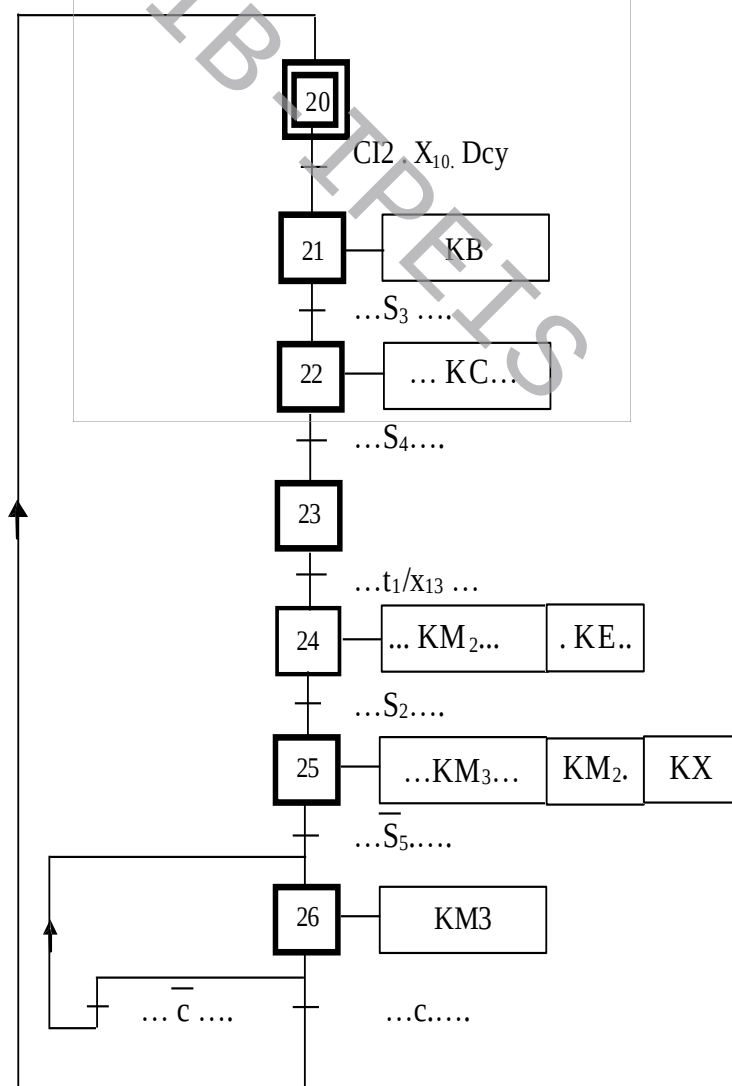


Figure c1. Système de préparation de la matière première pour le roto-moulage

C1. Compléter le GRAFCET du point de vue commande du système de broyage (Unité 1).



C2. Compléter le GRAFCET de point de vue commande de l'unité de mélange (Unité 2).



C3-C4. Proposer les expressions logiques (4 variables au moins) des deux conditions initiales CI1 et CI2.

$$\text{C3 : CI1} = \dots\dots S_0 \ I_{11} \ \overline{S_5} \ \overline{S_6} \ \dots\dots$$

$$\text{C4 : CI2} = \dots\dots S_2 \ I_{11} \ \overline{S_5} \ S_6 \ \dots\dots$$

Section C-2. Commande du moteur d'entraînement du tapis Tp1

L'objectif de cette partie est d'asservir la vitesse linéaire du tapis Tp1, afin de garantir une bonne fermeture des sacs remplis par couture.

1. Présentation

La translation du tapis Tp1 est obtenue à l'aide d'un moteur électrique (**Mc**) qui entraîne en rotation à travers un réducteur à poulies-courroie, le tambour qui déplace le tapis. La figure c2 présente le système d'entraînement du tapis Tp1.

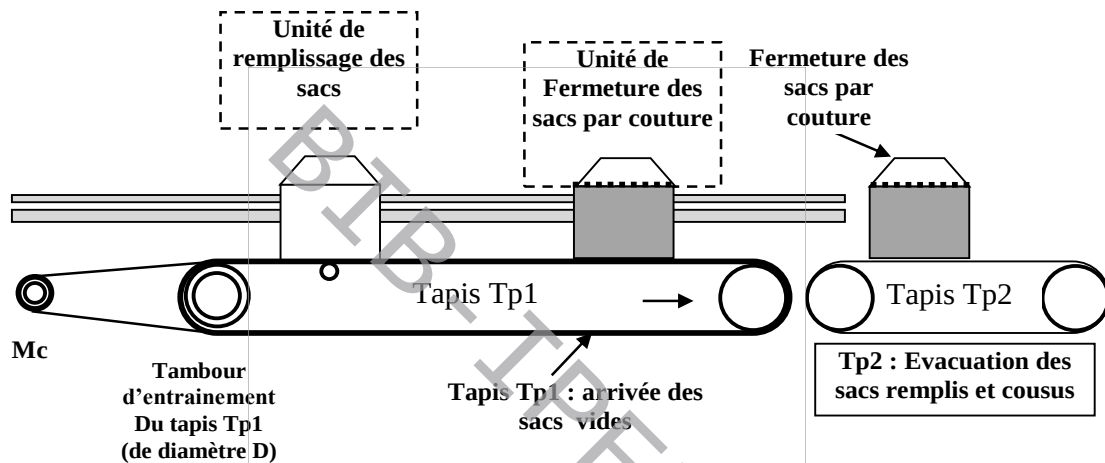


Figure c2 : Système d'entraînement du tapis Tp1

Le schéma de principe de la transmission du mouvement est donné par la Figure c3.

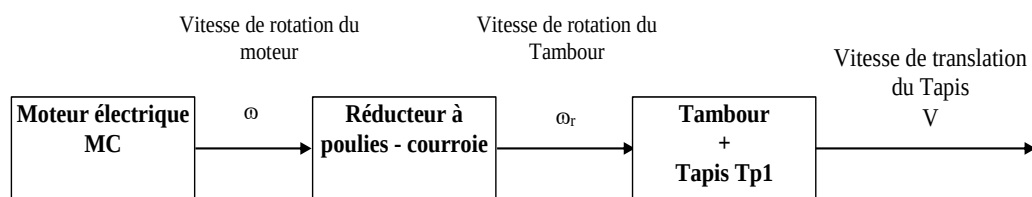


Figure c3 : Principe de la transmission du mouvement.

2. Étude de l'asservissement de vitesse du tapis Tp1

L'objectif de cette étude est de choisir un correcteur pour satisfaire le cahier des charges suivant :

- Un temps de réponse minimal ;
- Aucun dépassement ;
- Les perturbations sont sans effet sur la stabilité ;
- Stabilité assurée avec $M\varphi \geq 45^\circ$ et $MG \geq 15 \text{ dB}$;
- Erreur statique de position nulle.

Le schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis est donné par la figure c4.

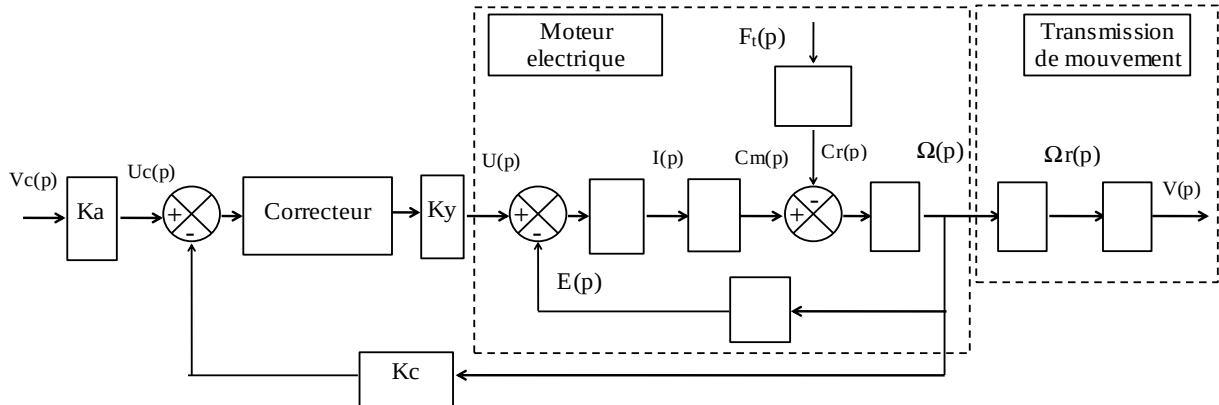


Figure c4 : schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis

Le fonctionnement du moteur est décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) : \text{la tension d'alimentation du moteur} \quad (1)$$

$$e(t) = K_e \omega(t) : \text{la force contre électromotrice} \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t) : \text{équation du mouvement} \quad (3)$$

$$c_m(t) = K_m i(t) : \text{le couple moteur} \quad (4)$$

avec :

V_c : vitesse de consigne.

U_c : tension d'entrée .

$i(t)$: le courant de l'induit .

R et L sont respectivement la résistance et l'inductance de l'induit du moteur.

K_m et K_e sont respectivement les constantes du couple moteur et de la force contre électromotrice ($K_m = K_e$).

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur.

$F_t(t)$: effort résistant appliqué sur le tapis par les sacs remplis .

$c_r(t)$: le couple résistant ramené sur l'axe du rotor résultant de l'effort F_t

$$c_r(t) = 0.5 r.D.F_t(t) \quad (5)$$

r est le rapport de réduction entre le moteur M_c et le tambour du tapis $Tp1$ de diamètre D (figure c2).

Remarques :

- La transformée de laplace de $F_t(t)$ est $F_t(p)$.
- Toutes les conditions initiales sont nulles.

C5. Ecrire les équations de (1 à 5) dans le domaine de Laplace

(1) : $U(p) = RI(p) + Lp I(p) + E(p)$

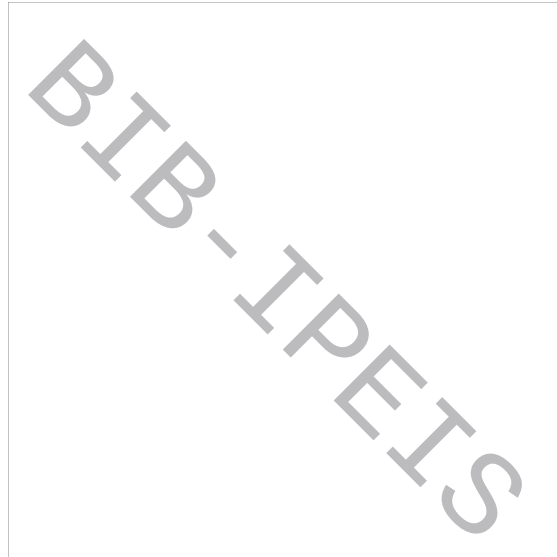
(2) : $(p) = K_e \Omega(p)$

(3) : $Jp\Omega(p) = C_m(p) - C_r(p) - f \Omega(p)$

(4) : $C_m(p) = K_m I(p)$

(5) : $C_r(p) = 0.5 \text{ r.D.F}_t(p)$

.....



C6-C7. En admettant que la transmission est sans glissement, écrire les relations entre :

C6. $V(t)$ et $\omega_r(t)$:

$V(t) = 0.5 D \omega_r(t)$ $V(p) = r \Omega_r(p)$ (ne pas utiliser R)

C7. $\omega_r(t)$ et $\omega(t)$

$\omega_r(t) = r \omega(t)$ $\Omega_r(p) = r \Omega(p)$ (r minuscule obligatoire)

C8. Compléter le schéma bloc de la figure c5 en négligeant l'inductance « L » et le frottement « f ».

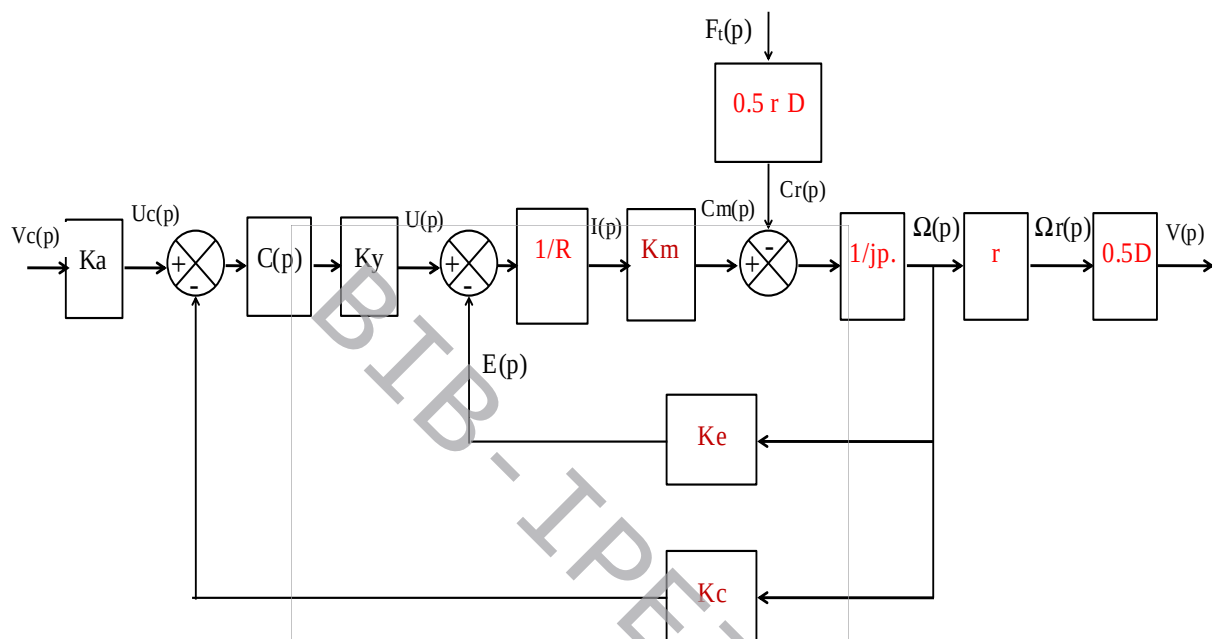


Figure c5 : Schéma bloc du système asservi

On veut mettre le schéma de la figure c5, sous la forme de la figure c6. Déterminer les fonctions de transfert suivantes : (sans détails de calcul).

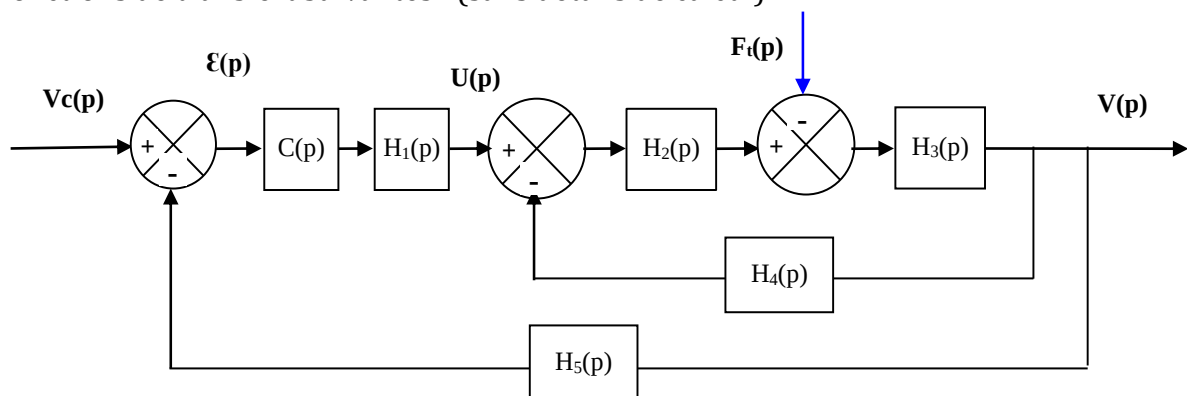


Figure c6: Schéma bloc du système simplifié

C9. $H_1(p)$:

$H_1(p) = \dots\dots\dots Ka \cdot Ky \dots\dots\dots$

C10. $H_2(p)$:

$$H_2(p) = \dots\dots\dots \frac{2.Km}{r.R.D} \dots\dots\dots (\text{attention pas de } R^2) \dots\dots\dots$$

C11. $H_3(p)$:

$$H_3(p) = \dots\dots\dots \frac{r^2 D^2}{4.j.p} \dots\dots\dots$$

C12. $H_4(p)$:

$$H_4(p) = \dots\dots\dots \frac{2.Km}{r.D} \dots\dots\dots$$

C13. $H_5(p)$:

$$H_5(p) = \dots\dots\dots \frac{Kc}{Ka} \cdot \frac{2.}{r.D} \dots\dots\dots$$

Dans la suite du sujet on prendra :

$$H_1(p) = K_1 ; H_2(p) = K_2 ; H_3(p) = K_3 / p ; H_4(p) = K_4 \text{ et } H_5(p) = K_5 = 1$$

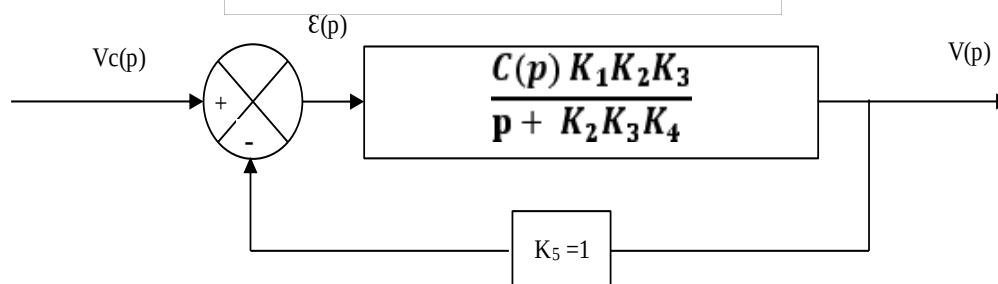
Où les constantes K_n sont **strictement** positifs, $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **On donne : $V(p) = T_1(p) V_c(p) - T_2(p) F_t(p)$** **C14-C15.** On veut déterminer la fonction de transfert $T_1(p)$ en fonction des K_n .**C14.** Compléter le schéma de la figure c7.

Figure c7 : schéma fonctionnel simplifié vis à vis de la consigne

C15. Donner alors l'expression de $T_1(p)$

.....

.....

.....

$$T_1(p) = \dots\dots\dots \frac{C(p) K_1 K_2 K_3}{p + C(p) K_1 K_2 K_3 K_5 + K_2 K_3 K_4} = \frac{C(p) K_1 K_2 K_3}{p + C(p) K_1 K_2 K_3 + K_2 K_3 K_4} \dots\dots\dots$$

C16-C17. Détermination de la fonction de transfert $T_2(p)$ en fonction des K_n .

C16. Compléter le schéma de la figure c8.

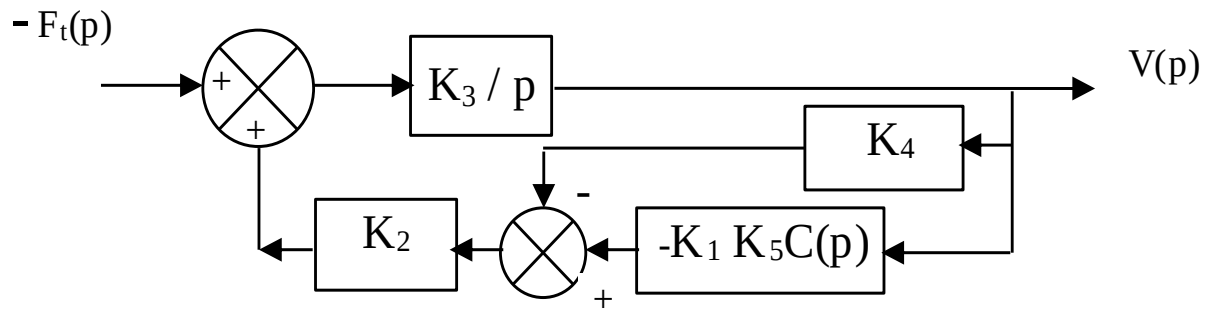


Figure c8 : schéma fonctionnel simplifié vis à vis de la perturbation

C17. Donner alors l'expression de $T_2(p)$

$T_2(p) = \dots\dots\dots \frac{K_3}{p + C(p) K_1 K_2 K_3 + K_2 K_3 K_4} \dots\dots\dots$

C18. Dites pourquoi si le système est stable vis à vis de la consigne $V_c(p)$ il est aussi stable par rapport à la perturbation. (on ne vous demande pas d'étudier la stabilité).

.....**même équation caractéristique**.....

Dans ce qui suit on prendra $C(p) = K_p > 0$ et $F_t(p) = 0$

C19. En justifiant la réponse, le système est il stable ?

..... **système de premier ordre, toujours stable**.....

C20. Déterminer, en le justifiant, l'erreur statique unitaire de position $\varepsilon_p(\infty)$

$\varepsilon_p(\infty) = \frac{1}{1 + K_p K_1 K_2 K_3} \dots\dots\dots$ car le système est **de classe 0**.

C21. En justifiant la réponse, le choix du correcteur $C(p) = K_p$ est il acceptable ?

.....**Non le choix du correcteur $C(p) = K_p$ n'est pas acceptable car l'erreur statique unitaire de position $\varepsilon_p(\infty)$ n'est pas nulle.**

Dans ce qui suit on prendra :

- $C(p) = \frac{K_i}{p}$ et $F_t(p) = 0$, $K_i > 0$
- Le moteur possède la fonction de transfert : $H_m(p) = \frac{K_x}{1 + \tau p}$
- Le schéma bloc est celui de la figure c10

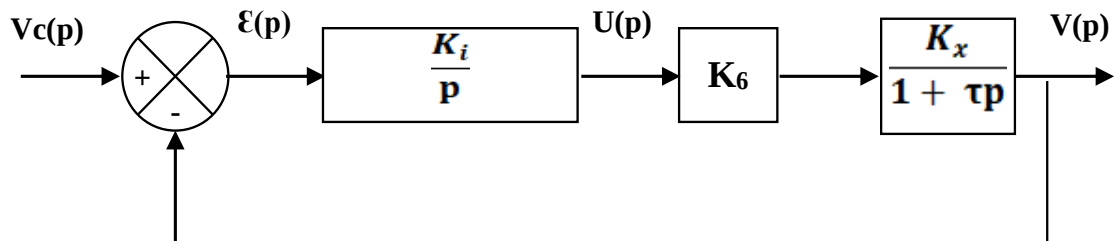


Figure c10 : schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse du tapis

C22. Déterminer la fonction de transfert (FT) en boucle ouverte $T_{BO}(p)$. En déduire, son gain statique K_{BO} , son ordre et sa classe.

$$T_{BO}(p) = \dots\dots\dots \frac{K_6 K_i K_x}{p(1 + \tau p)} \dots\dots\dots$$

$$K_{BO} = \dots\dots\dots K_6 K_i K_x \dots\dots\dots$$

$$\text{Ordre} = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$$

$$\text{Classe} = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$$

C23. Déterminer la FT en boucle fermée $T_{BF}(p)$ en fonction de K_{BO} et τ , la mettre sous forme canonique.

$$T_{BF}(p) = \dots\dots\dots$$

$$\text{Forme canonique : } T_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_6 K_i K_x} p + \frac{\tau}{K_6 K_i K_x} p^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p + \frac{\tau}{K_{BO}} p^2}$$

24. En justifiant la réponse, le système est-il stable ?

..... **Oui le système est toujours stable il est de deuxième ordre à coefficients tjrs positifs**

C25. Déterminer, en le justifiant, l'erreur statique unitaire de position $\varepsilon_p(\infty)$

..... **$\varepsilon_p(\infty) = 0$; car le système est de classe 1**

.....

C26. Quelle relation doit exister entre K_{BO} et τ , pour avoir un asservissement le **plus rapide** mais **sans dépassement** ?

un asservissement le plus rapide et sans dépassement $\xi = 1$

$$\dots \omega^2_0 = \frac{K_{BO}}{\tau}$$

$$\dots 2 \xi / \omega_0 = \frac{1}{K_{BO}} \implies \omega_0 = 2 K_{BO} \dots$$

$$\implies \frac{K_{BO}}{\tau} = 4 K_{BO}^2 \implies \frac{1}{4\tau} = K_{BO} \dots$$

C27-C28. Déterminer la marge du gain **MG** et la marge de Phase **M ϕ** pour $\tau = 0.01s$.

C27. MG = ?

..... **c'est un système de deuxième ordre** fondamentale

$$MG = \dots \infty \dots$$

C28. M ϕ = ?

$$\dots M\phi = 180^\circ + \text{Arg } T_{BO}(j\omega_1) = 90^\circ - \text{Arc tg}(\tau \omega_1) \dots$$

$$\omega_1 / \dots \text{Module de } T_{BO}(j\omega_1) = 1 \dots (\text{on prendra } K_{BO} = 25) \dots$$

$$\dots \omega_1 = 24.3 \text{ rad / s } \dots$$

$$M\phi = \dots 76.3^\circ \dots$$

C29. Préciser, en le justifiant, si le cahier des charges est respecté pour le choix d'un correcteur de type intégral pur.

... oui, le cahier des charges est respecté pour le choix d'un correcteur $C(p) = \frac{K_i}{p}$

:

Stabilité assurée et les perturbations sont sans effet ;

La marge de phase $M\phi \geq 45^\circ$ et la marge de gain $MG \geq 15 \text{ dB}$;

Erreur statique de position nulle;

Le temps de réponse est minimal sans dépassement ;