

Exercice

1)

1-a)

$a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$, la suite est décroissante.

on a $0 < a_0 < 1$. Supposons que $0 < a_n < 1$, on a alors $0 < 1 - a_n < 1$ et $0 < a_n(1 - a_n) = a_{n+1} < 1$. Ainsi pour tout $n \geq 0$, $0 < a_n < 1$.

1-b)

(a_n) est décroissante minorée par 0 donc convergente. Sa limite l vérifie $l = l - l^2$ donc $l = 0$.

2)

2-a)

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k^2 = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \longrightarrow a_0.$$

La série $\sum_{n \geq 0} a_n^2$ est alors convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = a_0$.

2-b)

$$\log(a_{n+1}) = \log(a_n - a_n^2) = \log(a_n) + \log(1 - a_n) \implies$$

$$\forall n \geq 0, \log(1 - a_n) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n).$$

$$\sum_{k=0}^n \log(1 - a_k) = \sum_{k=0}^n \log(a_{k+1}) - \log(a_k) = \log(a_{n+1}) - \log(a_0) \longrightarrow -\infty,$$

la série $\sum_{n \geq 0} \log(1 - a_n)$ est alors divergente.

D'autre part $\log(1 - a_n) \sim -a_n$, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est divergente.

3)

$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \right| \leq e^{-x} \frac{|x|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente, d'où $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ converge absolument pour tout x réel.

4)

La suite (a_n) étant décroissante et $x \geq 0$, on a alors :

$$0 \leq G(x) - G_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \leq a_{N+1} e^{-x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq a_{N+1}.$$

En déduire que $\sup_{x \in [0, +\infty[} |G(x) - G_N(x)| \leq a_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ C.U.

sur $[0, 1]$.

On a en plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

T.D.L. montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

5)

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(st) = 0$ d'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} G(st) = 0$.

En plus le théorème de continuité montre que G est continue sur $[0, +\infty[$.

D'où l'application $t \rightarrow e^{(s-1)t} G(st)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6)

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-t} s^n t^n dt$$

Le théorème de permutation série intégrale donne alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} s^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n.$$

Problème

Partie 1 13

1)

L'égalité $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta)$ donne :

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(\varphi(x)) f_n(x).$$

2)

L'égalité $\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta) = 2 \cos(m\theta) \cos(n\theta)$ fournit la relation :

$$f_{m+n}(x) + f_{m-n}(x) = 2 f_m(x) f_n(x).$$

at
e at
le
a

3)

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$,
d'où :

$$e^{in \arccos(x)} = (x + i\sqrt{1-x^2})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}.$$

4)

$$T_n(x) = \operatorname{Re}(e^{in \arccos(x)}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k}.$$

5)

T_n est un polynôme de degré n qui possède la parité de n .

Partie 2

1)

La question 1) de la partie I donne :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

$$T_0(x) = \cos(0) = 1, \text{ et } T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

2)

$$(M_n - xI_n)V_n(x) = \begin{pmatrix} -xT_0(x) + T_1(x) \\ \frac{1}{2}T_0(x) - xT_1(x) + \frac{1}{2}T_2(x) \\ \frac{1}{2}T_1(x) - xT_2(x) + \frac{1}{2}T_3(x) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}T_{n-3}(x) - xT_{n-2}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x) \\ \frac{1}{2}T_{n-2}(x) - xT_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}T_n(x) \end{pmatrix}$$

3)

$$T_n(x_{k,n}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0, \implies x_{k,n} \text{ est une racine de } T_n.$$

Les $(x_{k,n})_{0 \leq k \leq n-1}$ forment n racines deux à deux distinctes du polynôme T_n de degré n , ça fournit donc toutes les racines de T_n .

4)

$$(M_n - x_{k,n} I_n) V_n(x_{k,n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2} T_n(x_{k,n}) \end{pmatrix} = 0.$$

5)

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $V_n(x_{k,n}) \neq 0$. Les $(x_{k,n})_{0 \leq k \leq n-1}$ forment alors n valeurs propres de la matrice M_n , ça fournit donc toutes les valeurs propres de M_n .

$V_n(x_{k,n})$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $x_{k,n}$.

6)

La matrice M_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes, donc diagonalisable.

Partie 3

1)

On fait le changement de variable $\theta = \arccos(x)$ on obtient :

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta)) g(\cos(\theta)) d\theta.$$

2)

Pour $m \neq n$,

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T_m(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = 0.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T_n(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n\theta))^2 d\theta = 1.$$

Pour $n = 0$,

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 d\theta = 2.$$

3)

$(T_0, T_1, \dots, T_n)$ forme une famille de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ deux à deux orthogonaux, donc c'est une base.

4)

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)) d\theta = \langle f, T_n \rangle.$$

5)

$$\frac{1}{2} a_0(g) + \sum_{n=1}^N a_n(g) \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^N \langle f, T_n \rangle T_n(\cos(\theta)) = S_N(f)(\cos(\theta)).$$

6)

Si f est continue et C^1 par morceaux sur $[-1, 1]$, il en est de même de $g : \theta \rightarrow f(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la série de Fourier de g converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} a_n(g)$.

D'autre part, $|\langle f, T_n \rangle T_n(x)| \leq |\langle f, T_n \rangle| = |a_n(g)|$.

Il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 1} \langle f, T_n \rangle T_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

Enfin on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2} a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \cos(n\theta) = g(\theta) = f(\cos(\theta))$$

donc pour tout $x \in [-1, 1]$, en posant $x = \cos(\theta)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, T_n \rangle T_n(x) = f(x).$$

7)

7-a)

On a

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |\alpha_n T_n(x)| \leq |\alpha_n|$$

La série $\sum_{n \geq 1} |\alpha_n|$ est convergente donc la série $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

7-b)

Soit $f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \langle f, T_n \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\alpha_0}{2} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \langle T_0, T_n \rangle + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

On pose $h_k(x) = \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

h_k est intégrable sur $] -1, 1[$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k$ est continue sur $] -1, 1[$.

$\int_{-1}^1 |h_k(x)| dx \leq \pi |\alpha_k|$. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 |h_k(x)| dx$ est alors convergente.

Le théorème de permutation somme intégrale donne alors :

$$\langle f, T_n \rangle = \frac{\alpha_0}{2} \langle T_0, T_n \rangle + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \langle T_k, T_n \rangle = \alpha_n$$

Partie 4

1)

1-a)

1-b)

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos(n\theta) d\theta.$$

On trouve $a_0 = \pi$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\theta}{\pi} \sin(n\theta) \right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi n^2} [\cos(n\theta)]_0^\pi.$$

Si n est pair alors $a_n = 0$. Si n est impair alors $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$.

Ainsi la série de Fourier de h est donnée par :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\theta).$$

1-c)

L'application h est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Sa série de Fourier converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, et a pour somme h .

1-d)

Ainsi pour tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$h(\theta) = \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\theta).$$

2)

On pose $k(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$.

k est continue sur $[-1, 1]$ dérivable sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$, $k'(x) = 0$ donc k est constante sur $[-1, 1]$.

Ainsi $\forall x \in [-1, 1]$, $k(x) = k(0) = \frac{\pi}{2}$

3)

$\forall x \in [-1, 1]$, $\theta = \arccos(x) \in [0, \pi] \implies$

$$\begin{aligned} \arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1) \arccos(x)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

et

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x).$$

4)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$ donc

$$\arcsin(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$\implies$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

~~cos(k(n+1)arcsin(x))~~
cos(k(n+1)arcsin(x))