

I-1 Torseurs cinématiques

$$\bullet \{V_{1/0}\}_A = \{\vec{r}_{1/0} | \vec{v}_{A/R_0}\} \text{ avec } \vec{r}_{1/0} = -\vec{\theta} \vec{z}_0, \vec{v}_{A/R_0} = \vec{0}$$

$$\bullet \{V_{2/0}\}_C = \{\vec{r}_{2/0} | \vec{v}_{C/R_0}\} \text{ avec } \vec{r}_{2/0} = -\vec{\varphi} \vec{z}_0, \vec{v}_{C/R_0} = \vec{0}$$

I-2 Vitesses de B

$$2-a. \vec{v}_{B/R_0} = \vec{r}_{1/0} \wedge \vec{AB} = -\vec{\theta} \vec{z}_0 \wedge a \vec{y}_1 = a \vec{\theta} \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = a \vec{\theta} (\cos \theta \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0)$$

$$2-b. \vec{v}_{B/R_0} = \frac{d\vec{CB}}{dt} / R_0$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2 - \lambda \dot{\varphi} \vec{y}_2 + b \dot{\varphi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) (\cos \varphi \vec{x}_0 - \sin \varphi \vec{y}_0) - \lambda \dot{\varphi} (\sin \varphi \vec{x}_0 + \cos \varphi \vec{y}_0)$$

$$= [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi] \vec{x}_0 - [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi] \vec{y}_0$$

I-3 Relations entre paramètres

$$a \vec{\theta} \cos \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$a \vec{\theta} \sin \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi$$

I-4. $\dot{\lambda}$ en fonction de $\vec{\theta}$.

$$(1) \cos \varphi + (2) \sin \varphi \Rightarrow$$

$$a \vec{\theta} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$$

$$a \vec{\theta} \cos(\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$$

$$(1) \sin \varphi - 2 \cos \varphi$$

$$a \vec{\theta} (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) = -\lambda \dot{\varphi}$$

$$a \vec{\theta} \sin(\varphi - \theta) = -\lambda \dot{\varphi}$$

$$a \vec{\theta} \sin(\theta - \varphi) = \lambda \dot{\varphi}$$

$$a \vec{\theta} \cos(\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + \frac{b}{\lambda} a \vec{\theta} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\dot{\lambda} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

I-5. Roulement sans glissement en I

$$\vec{v}_{IeR/4} = \vec{v}_{IeR/2} - \vec{v}_{Ie4/2} = \vec{0}$$

$$= \vec{\theta} \vec{x}_2 \wedge R_5 \vec{y}_2 + \dot{\varphi} \vec{x}_2 \wedge (-R_4 \vec{y}_2)$$

$$R_5 \vec{\theta} \vec{z}_0 + R_4 \dot{\varphi} \vec{z}_0 = 0$$

$$R_4 \dot{\varphi} + R_5 \vec{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{R_5}{R_4} \vec{\theta}$$

I-6 Torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D

$$\{V_{3/4}\}_D = \{\vec{r}_{3/4} | \vec{v}_{D \in 3/4}\}$$

$$\vec{r}_{3/4} = \vec{r}_{3/2} + \vec{r}_{2/4} = \vec{r}_{2/4} = -\vec{r}_{4/2}$$

$$= -\dot{\varphi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{D \in 3/4} = \vec{v}_{D \in 3/2} + \vec{v}_{D \in 2/4}$$

$$= \vec{v}_{D \in 3/2} - \vec{v}_{D \in 4/2}$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2$$



$$\{V_{3/4}\}_D = \left\{ -\dot{\varphi} \vec{x}_2 \mid \dot{\lambda} \vec{x}_2 \right\}$$

I-7 Relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\varphi}$

$$\dot{\lambda} = \frac{P_4}{2\pi} \dot{\varphi} \text{ (liaison hélicoïdale)}$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\beta} \Rightarrow \dot{\lambda} = - \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\beta} + c$$

I-8. loi entrée - sortie.

$$\dot{\lambda} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

$$- \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\beta} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\vec{\theta}} = \frac{2\pi R_4}{P_4 R_5} \left[\frac{2b\pi R_4}{P_4 R_5} \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) \right]$$

II. ENERGETIQUE

II-1. Actions extérieures appliquées à (Σ)

- poids de 1 en G.

$$\vec{P}_1 = -Mg \vec{y} \Rightarrow \left\{ \vec{P}_1 \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} -Mg \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ -Mg \cos \alpha & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$$

I-1 Torseurs cinématiques

$$\bullet \{V_{1/0}\}_A = \{\vec{\omega}_{1/0} | \vec{v}_{A/R_0}\} \text{ avec } \vec{\omega}_{1/0} = -\dot{\theta} \vec{z}_0, \vec{v}_{A/R_0} = \vec{0}$$

$$\bullet \{V_{2/0}\}_C = \{\vec{\omega}_{2/0} | \vec{v}_{C/R_0}\} \text{ avec } \vec{\omega}_{2/0} = -\dot{\varphi} \vec{z}_0, \vec{v}_{C/R_0} = \vec{0}$$

I-2 Vitesses de B

$$2.a. \vec{v}_{B/R_0} = \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} = -\dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge a \vec{y}_1 = a \dot{\theta} \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = a \dot{\theta} (\cos \theta \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0)$$

$$2.b. \vec{v}_{B/R_0} = \frac{d\vec{CB}}{dt} / R_0$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2 - \lambda \dot{\varphi} \vec{y}_2 + b \dot{\varphi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) (\cos \varphi \vec{x}_0 - \sin \varphi \vec{y}_0) - \lambda \dot{\varphi} (\sin \varphi \vec{x}_0 + \cos \varphi \vec{y}_0)$$

$$= [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi] \vec{x}_0 - [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi] \vec{y}_0$$

3 Relations entre paramètres

$$a \dot{\theta} \cos \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$a \dot{\theta} \sin \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi$$

I-4. $\dot{\lambda}$ en fonction de $\dot{\theta}$

$$(1) \cos \varphi + (2) \sin \varphi \Rightarrow$$

$$a \dot{\theta} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$$

$$a \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$$

$$(1) \sin \varphi - 2 \cos \varphi$$

$$a \dot{\theta} (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) = -\lambda \dot{\varphi}$$

$$a \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) = -\lambda \dot{\varphi}$$

$$a \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi) = \lambda \dot{\varphi}$$

$$a \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + \frac{b}{\lambda} a \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\dot{\lambda} = a \dot{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

5. Roulement sans glissement en I

$$\vec{v}_{I \in R_1 / R_4} = \vec{v}_{I \in R_1 / R_2} - \vec{v}_{I \in R_4 / R_2} = \vec{0}$$

$$= \dot{\theta} \vec{x}_2 \wedge R_5 \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{x}_2 \wedge (-R_4 \vec{y}_2)$$

$$R_5 \dot{\theta} \vec{z}_0 + R_4 \dot{\varphi} \vec{z}_0 = 0$$

$$R_4 \dot{\varphi} + R_5 \dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{R_5}{R_4} \dot{\theta}$$

I-6 Torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D

$$\{V_{3/4}\}_D = \{\vec{\omega}_{3/4} | \vec{v}_{D \in 3/4}\}$$

$$\vec{\omega}_{3/4} = \vec{\omega}_{3/2} + \vec{\omega}_{2/4} = \vec{\omega}_{2/4} = -\vec{\omega}_{4/2}$$

$$= -\dot{\varphi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{D \in 3/4} = \vec{v}_{D \in 3/2} + \vec{v}_{D \in 2/4}$$

$$= \vec{v}_{D \in 3/2} - \vec{v}_{D \in 4/2}$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2$$

$$\{V_{3/4}\}_D = \left\{ -\dot{\varphi} \vec{x}_2 \mid \dot{\lambda} \vec{x}_2 \right\}$$

I-7 Relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\varphi}$

$$\dot{\lambda} = \frac{P_4}{2\pi} \dot{\varphi} \text{ (liaison hélicoïdale)}$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\lambda} = - \frac{P R_5}{2\pi R_4} \dot{\theta} + \text{cte}$$

I-8. $\dot{\omega}$ entre - entre -

$$\dot{\lambda} = a \dot{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

$$- \frac{P R_5}{2\pi R_4} \dot{\theta} = a \dot{\theta} \left[\cos(\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi R_4}{P R_5} \left[\frac{2b\pi R_4}{P R_5} \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) \right]$$

II. ENERGETIQUE

II-1. Actions extérieures appliquées à (Σ)

- poids de 1 en G.

$$\vec{P}_1 = -M \vec{g} = \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{P}_1 \\ \text{torseur } G \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg \sin \alpha \\ 0 \\ -Mg \cos \alpha \end{matrix} \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$$

I-1 Torseurs cinématiques

$$\bullet \{V_{1/0}\}_A = \{\vec{r}_{1/0} | \vec{v}_{A/R_0}\} \text{ avec } \vec{r}_{1/0} = -\vec{\theta} \vec{z}_0, \vec{v}_{A/R_0} = \vec{0}$$

$$\bullet \{V_{2/0}\}_C = \{\vec{r}_{2/0} | \vec{v}_{C/R_0}\} \text{ avec } \vec{r}_{2/0} = -\vec{\phi} \vec{z}_0, \vec{v}_{C/R_0} = \vec{0}$$

I-2 Vitesses de B

$$2-a. \vec{v}_{B/R_0} = \vec{r}_{1/0} \wedge \vec{AB} = -\vec{\theta} \vec{z}_0 \wedge a \vec{\gamma}_1 = a \vec{\theta} \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = a \vec{\theta} (\cos \theta \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0)$$

$$2-b. \vec{v}_{B/R_0} = \frac{d\vec{CB}}{dt} / R_0 \quad \vec{OB} = \frac{1}{2} \vec{OC} + \vec{CB} / R_0$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2 - \lambda \dot{\phi} \vec{\gamma}_2 + b \dot{\phi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{B/R_0} = (\dot{\lambda} + b \dot{\phi}) (\cos \theta \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0) - \lambda \dot{\phi} (\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0)$$

$$= [(\dot{\lambda} + b \dot{\phi}) \cos \theta - \lambda \dot{\phi} \sin \theta] \vec{x}_0 - [(\dot{\lambda} + b \dot{\phi}) \sin \theta + \lambda \dot{\phi} \cos \theta] \vec{y}_0$$

I-3 Relations entre paramètres

$$a \vec{\theta} \cos \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\phi}) \cos \theta - \lambda \dot{\phi} \sin \theta$$

$$a \vec{\theta} \sin \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\phi}) \sin \theta + \lambda \dot{\phi} \cos \theta$$

I-4. $\dot{\lambda}$ en fonction de θ

$$(1) \cos \theta + (2) \sin \theta \Rightarrow$$

$$a \vec{\theta} (\cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta) = \dot{\lambda} + b \dot{\phi}$$

$$a \vec{\theta} \cos(\theta - \phi) = \dot{\lambda} + b \dot{\phi}$$

$$(1) \sin \theta - 2 \cos \theta$$

$$a \vec{\theta} (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \sin \theta) = -\lambda \dot{\phi}$$

$$a \vec{\theta} \sin(\theta - \theta) = -\lambda \dot{\phi}$$

$$a \vec{\theta} \sin(\theta - \phi) = \lambda \dot{\phi}$$

$$a \vec{\theta} \cos(\theta - \phi) = \dot{\lambda} + \frac{b}{\lambda} a \vec{\theta} \sin(\theta - \phi)$$

$$\dot{\lambda} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \phi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \phi) \right]$$

I-5. Roulement sans glissement en I

$$\vec{v}_{I \in R_1 / 4} = \vec{v}_{I \in R_2 / 2} - \vec{v}_{I \in R_4 / 2} = \vec{0}$$

$$= \vec{\theta} \vec{x}_2 \wedge R_2 \vec{\gamma}_2 + \dot{\phi} \vec{x}_2 \wedge (-R_4 \vec{\gamma}_2)$$

$$R_2 \vec{\theta} \vec{z}_0 + R_4 \dot{\phi} \vec{z}_0 = 0$$

$$R_4 \dot{\phi} + R_2 \vec{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\phi} = - \frac{R_2}{R_4} \vec{\theta}$$

I-6 Torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D

$$\{V_{3/4}\}_D = \{\vec{r}_{3/4} | \vec{v}_{D \in 3/4}\}$$

$$\vec{r}_{3/4} = \vec{r}_{3/2} + \vec{r}_{2/4} = \vec{r}_{2/4} = -\vec{r}_{4/2}$$

$$= -\dot{\phi} \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_{D \in 3/4} = \vec{v}_{D \in 3/2} + \vec{v}_{D \in 2/4}$$

$$= \vec{v}_{D \in 3/2} - \vec{v}_{D \in 4/2}$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_2$$

$$\{V_{3/4}\}_D = \left\{ -\dot{\phi} \vec{x}_2 \mid \dot{\lambda} \vec{x}_2 \right\}$$

I-7 Relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\phi}$

$$\dot{\lambda} = \frac{P_4}{2\pi} \dot{\phi} \quad (\text{liaison hélicoïdale})$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{P_1 R_5}{2\pi R_4} \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\lambda} = - \frac{P R_5}{2\pi R_4} \dot{\phi} + \text{cte}$$

I-8. loi entrée - sortie.

$$\dot{\lambda} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \phi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \phi) \right]$$

$$- \frac{P_1 R_5}{2\pi R_4} \dot{\phi} = a \vec{\theta} \left[\cos(\theta - \phi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \phi) \right]$$

$$\frac{\dot{\phi}}{\vec{\theta}} = \frac{2\pi R_4}{P R_5} \left[\frac{2b\pi R_4}{P R_5} \sin(\theta - \phi) - \cos(\theta - \phi) \right]$$

II. ENERGETIQUE

II-1. Actions extérieures appliquées à (Σ)

- poids de 1 en G.

$$\vec{P}_1 = -M \vec{g} \Rightarrow \left\{ \vec{g} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -Mg \sin \alpha \\ 0 \\ -Mg \cos \alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

• bâti (0) sur (1)

1 (2)

$$\{E_{0/1}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{01} \\ y_{01} \\ z_{01} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{01} \\ M_{01} \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

• bâti sur (2)

$$\{E_{0/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{02} \\ y_{02} \\ z_{02} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{02} \\ M_{02} \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

II.2 Actions intérieures

• Moteur sur piston (5)

$$\{E_{4/5}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur moteur

$$\{E_{2/4}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{24} \\ y_{24} \\ z_{24} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{24} \\ M_{24} \\ N_{24} \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (5)

$$\{E_{2/5}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{25} \\ y_{25} \\ z_{25} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{25} \\ M_{25} \\ N_{25} \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (4)

$$\{E_{4/4}\}_H = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{24} \\ y_{24} \\ z_{24} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{24} \\ N_{24} \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (3)

$$\{E_{4/3}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{matrix} & \begin{matrix} M_{23} \\ N_{23} \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• (4) sur (3)

$$\{E_{4/3}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{43} \\ y_{43} \\ z_{43} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{43} \\ M_{43} \\ N_{43} \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• (4) sur (3) en I

$$\{E_{4/3}\}_I = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{43} \\ y_{43} \\ z_{43} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

(3) sur (1) au point B

$$\{E_{3/1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{31} \\ M_{31} \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

II.3 Puissance développée par les forces extérieures

$$P_{ext} = P_{ele} = C_m \dot{\theta}$$

$$P_{R_0} (\text{terre} \rightarrow 1) = P \cdot \vec{V}_{0/R_0}$$

$$\vec{V}_{0/R_0} = -\dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge a_0 \vec{x}_1 = -a_0 \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$$= -a_0 \dot{\theta} [\cos \theta \vec{y}_0 + \sin \theta \vec{z}_0]$$

$$P_{R_0} (\text{terre} \rightarrow 1) = \dot{\theta} H_g a_0 \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$P_{R_0} (\text{terre} \rightarrow 1) = H_g a_0 \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta$$

$$P_{R_0} (0 \rightarrow 1) = \{V_{1/0}\} \cdot \{E_{0/1}\} = 0$$

$$P_{R_0} (0 \rightarrow 2) = \{V_{2/0}\} \cdot \{E_{0/2}\} = 0$$

II.4 Puissance des forces intérieures

$$P (\text{moteur} \leftrightarrow 5) = C_m \dot{\theta}$$

$$P (\text{moteur} \leftrightarrow 2) = 0$$

$$P (3 \leftrightarrow 1) = 0$$

$$P (4 \leftrightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{43} \\ y_{43} \\ z_{43} \end{matrix} & \begin{matrix} L_{43} \\ M_{43} \\ N_{43} \end{matrix} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} x_{43}$$

II.5 Energie cinétique

$$E_R (1/0) = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{1/0} \wedge [I_0(1)] \cdot \vec{\omega}_{1/0}$$

$$= \frac{1}{2} (m a_0^2 + C_1) \dot{\theta}^2$$

II.6 Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$(m a_0^2 + C_1) \ddot{\theta} = H_g a_0 \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta + C_m \dot{\theta}$$

$$-\dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} x_{43}$$

CORRECTION

Partie C : Automatique

Partie C-I : Modélisation

I.1 A partir des équations mécaniques, on déduit :

$$C_m - nC_r = J_e \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_e \omega_m(t)$$

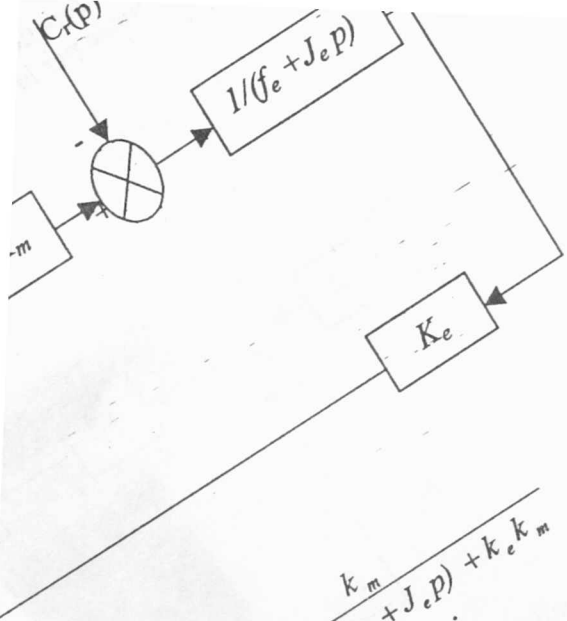
En effet, à partir des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m - C_1 = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m \\ n = \frac{\omega_c}{\omega_m} = \frac{C_1}{C_2} \\ C_2 - C_1 = J_c \frac{d\omega_c(t)}{dt} + f_c \omega_c \end{array} \right.$$

on peut écrire :

$$C_m - nC_r = (J_m + n^2 J_c) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (f_m + n^2 f_c) \omega_m$$

I-2. En appliquant la transformée de Laplace aux équations électriques et mécaniques et en considérant que les conditions initiales sont nulles, le schéma fonctionnel du système est :



$$T_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{E_a(p)} = \frac{k_m}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$$

$T_2(p)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = \frac{n(R_a + L_a p)}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$$

$$s(p) = 1/p$$

Les expressions de :

Gain statique K_s :

$$K_s = \frac{k_e}{\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

Le coefficient d'amortissement m :

$$m = \frac{L_a f_e + R_a f_e}{2\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

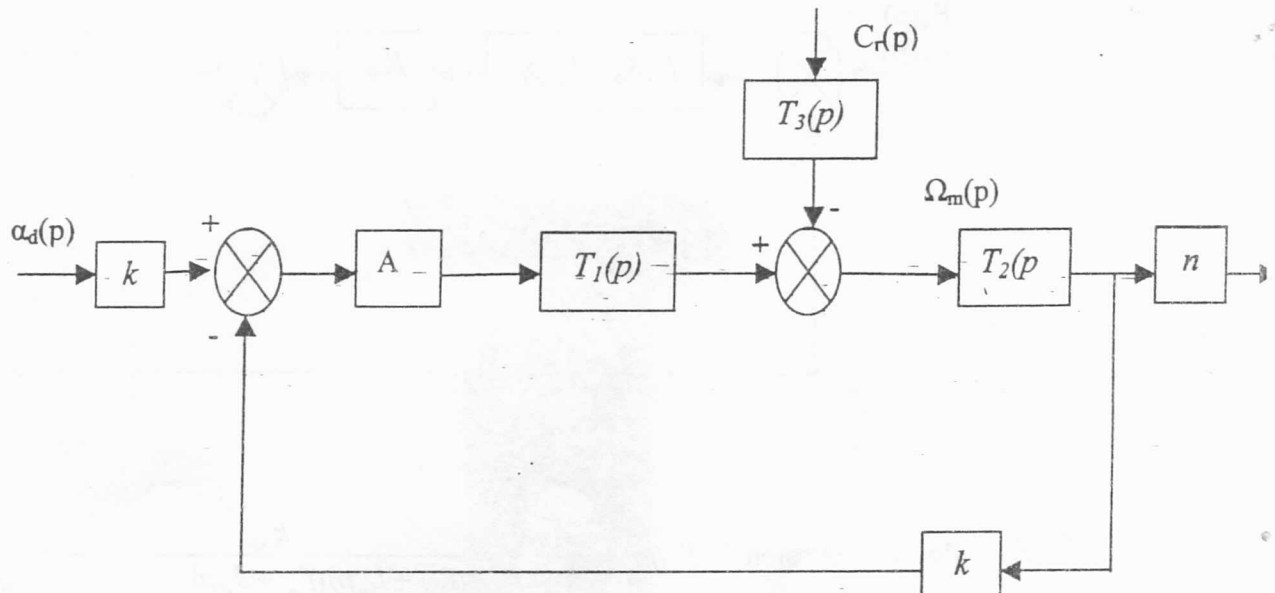
La pulsation propre non amortie :

$$\sqrt{\frac{k_e k_m + R_a f_e}{J_e L_a}}$$

Numérique :

Partie C-II : Etude du système en boucle fermée

II-1. Le schéma fonctionnel du système de régulation de l'angle α (entrée α_d ; sortie α) est donnée par la figure suivante :



Dans ce qui suit on considère que le couple résistant est nul.

II-2. Les valeurs de A qui assurent la stabilité du système en boucle fermée :

L'équation caractéristique du système est :

$$p^3 + 400,2p^2 + 6080p + 200A = 0$$

En appliquant le critère de Routh :

p^3	1	6080
p^2	400,2	200A
p	$(400,2 \times 6080 - 200A \times 1) / 400,2$	
p^0	200A	

$$\text{Donc } A < 1.2166e+004$$

3.a/ valeur de A pour avoir un dépassement du système en boucle fermée égal à 9%.

$$A = 320$$

3.b/ Le système est de classe 1, donc l'erreur statique de vitesse est de la forme :

$$\varepsilon(\infty)=0,3/(320*0,003/0,0912)=0,03 \text{ rd}$$

Les valeurs des grandeurs physiques :

$$\alpha = 0,3-0,03=0,27 \text{ rd}$$

tension d'alimentation du moteur : $E_a=0,96\text{V}$;

Angle sur l'arbre du moteur $\theta_m=\alpha/n=0,027 \text{ rd}$;