

Système 1 (34 points)

1°) Premier principe: système fermé, $\Delta(E_{c_{mac}} + E_{p_{mac}} + U) = \dots$

1°) Soit $M(t)$ la masse de (Σ) ; $dM = M(t+dt) - M(t) = \delta M^{ech} = \delta m_1 - \delta m_2$

• $M(t+dt) + \delta m_2 = M(t) + \delta m_1$: bilan de masse

• régime stationnaire $M(t+dt) = M(t) \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2 \Rightarrow D_{m_1} = D_{m_2} = D_m$

2°) système fermé: à t : $\{(\Sigma) + \delta m_1\}$

à $t+dt$: $\{(\Sigma) + \delta m_2\}$

1^{er} principe: $dE_{c_{mac}} + dE_{p_{mac}} + dU = \delta W_u + \delta W_p + \delta Q$

$$dU = U(t+dt) - U(t) = [U_{\Sigma}(t+dt) + \delta m_2 u_2] - [U_{\Sigma}(t) + \delta m_1 u_1] = \delta m (u_2 - u_1)$$

$$dE_{c_{mac}} = \delta m \left(\frac{1}{2} c_2^2 - \frac{1}{2} c_1^2 \right) = D_m \left(\frac{1}{2} c_2^2 - \frac{1}{2} c_1^2 \right) dt = D_m (u_2 - u_1) dt$$

$$\delta W_p = \delta m (P_1 v_1 - P_2 v_2) = D_m (P_1 v_1 - P_2 v_2) dt$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(u_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right) - \left(u_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \right) \right] dt = D_m (P_1 v_1 - P_2 v_2) dt + \delta W_u + \delta Q$$

$$\Rightarrow D_m \left[\underbrace{\left(u_2 + P_2 v_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right)}_{h_2} - \underbrace{\left(u_1 + P_1 v_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \right)}_{h_1} \right] = P_u + P_{th}$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \right) \right] = P_u + P_{th}$$

2.3°) Détente de Joule Thomson:

i) Régime stationnaire

ii) Conduite horizontale, rigide, adiabatique

iii) Écoulement très lent.

$$\left. \begin{array}{l} \text{i)} \Rightarrow \text{on peut appliquer le résultat 2-2} \\ \text{ii)} \Rightarrow P_u = 0 ; P_{th} = 0 \\ \text{iii)} \Rightarrow \Delta E_{c_{mac}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D_m (h_2 - h_1) = 0 \\ \Rightarrow h_2 = h_1 \\ \text{Détente isenthalpique} \end{array}$$

3°) Second principe: système fermé: $\Delta S = S_{ech} + S_{cré} = \int \frac{\delta Q}{T_0} + S_{cré}$
 $S_{cré} \geq 0$

4°) Bilan entropique: $dS = \frac{\delta Q}{T_0} + S_{cré}$, $S_{cré} \geq 0 \Rightarrow dS \geq \frac{\delta Q}{T_0}$

$$\text{ou } dS = S(t+dt) - S(t) = \delta m (s_2 - s_1) \text{ et } \delta Q = \delta m \cdot q$$

$$Sm(\Delta_2 - \Delta_1) \geq \frac{\delta m \cdot g}{T_0} \Rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 \geq \frac{g}{T_0} \quad \text{--- --- ---}$$

$$\text{II) 5-1°) } PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow Pv = rT \quad \text{--- --- ---}$$

$$5-2°) dh = C_p dT ; \gamma = \frac{C_p}{C_v} ; C_p - C_v = r \Rightarrow dh = \frac{r\gamma}{\gamma-1} dT \quad \text{--- --- ---}$$

$$5-3°) \text{ Identité thermodynamique: } dh = Tds + vdp$$

$$\Rightarrow ds = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad \text{--- --- ---}$$

$$6-1°) \Delta h = 0 \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow T_f = T_i \quad (T_2 = T_1) \quad \text{--- --- ---}$$

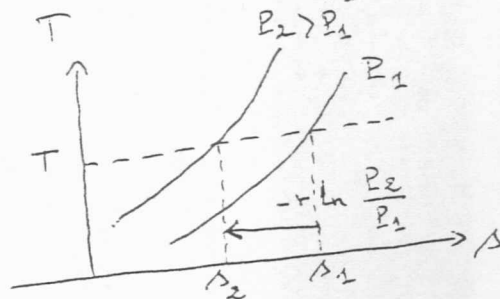
2^e loi de Joule: Gaz parfait: $H = H(T)$

$$6-2°) dT = 0 \Rightarrow ds = -r \frac{dp}{p} \Rightarrow \Delta s = -r \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) = -r \ln \frac{p_2}{p_1} = s_{\text{ré}}$$

$$\text{détente } p_2 < p_1 \Rightarrow s_{\text{ré}} = -r \ln \frac{p_2}{p_1} > 0 : \text{transformation irréversible ---}$$

$$7-1°) \frac{r\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = ds + r \frac{dp}{p} \Rightarrow s(T, p_1) - s(T_2, p_2) = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_2}$$

$$\Rightarrow T = T_2 \exp\left[\frac{\gamma-1}{r\gamma} (s - s_1)\right]$$



$$7-2°) s(T, p_2) = s(T, p_1) - r \ln \frac{p_2}{p_1} : \text{translation par}$$

rappart à l'isobare p_2 de la quantité: $-r \ln \frac{p_2}{p_1} = -r \ln 3$

7-3°) isobare p_2 est obtenue à partir de l'isobare p_1 par une translation de $(-r \ln \frac{p_2}{p_1})$.

III

8°) Gaz réel:

- particules non ponctuelles $\Rightarrow$ autres degrés de liberté que ceux de la translation
- Énergie potentielle d'interaction non négligeable.

9-1°) a) $-\frac{a}{V^2}$: Pression moléculaire: caractérise les interactions de van der Waals

b) b : covolume: volume exclu dans le modèle des sphères dures.

$$9-2°) \delta q = C_v dT + l dv \Rightarrow ds = C_v \frac{dT}{T} + l dv$$

$$\text{et } du = C_v dT + (l - p) dv$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{C_V}{T} \right) \right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P}{T} \right) \right]_V \text{ et } \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} (l - P) \right]_V$$

En combinant les deux équations $\Rightarrow l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ et $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$

$$9-3) \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b} ; \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V = 0 \Rightarrow C_V \text{ est indépendant de } V,$$

$$l = \frac{rT}{V-b} \Rightarrow du = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV \Rightarrow \Delta u = C_V (T_2 - T_1) + a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

$$ds = C_V \frac{dT}{T} + \frac{r dV}{V-b} \Rightarrow \Delta s = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + r \ln \frac{(V_2-b)}{(V_1-b)}$$

9-4)

$$9-4-1) \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = b - \frac{2a}{rT}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T > 0 \Rightarrow T > \frac{2a}{br}$$

h est une fonction T de P si $T > \frac{2a}{br}$

h " " $\forall dP$ si $T < \frac{2a}{br}$

9-4-2) Détente de Joule Thomson : $dh = 0 ; dP < 0$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP = 0 \Rightarrow C_P dT = - \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\text{Pour avoir } dT < 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T < 0 \Rightarrow T < \frac{2a}{br} = T_i$$

Pour N_2 : $T_{i,N_2} = 321 K \Rightarrow T_{\text{ambiante}} < T_{i,N_2} \Rightarrow$ Possibilité de refroidissement

Pour H_2 : $T_{i,H_2} = 222,7 K \Rightarrow T_{\text{ambiante}} > T_{i,H_2} \Rightarrow$ refroidissement impossible.

IV - 10) Le potentiel thermodynamique est une fonction permettant de déterminer l'évolution du système libéré de ses contraintes extérieures et vérifiant les propriétés suivantes :

- un potentiel thermodynamique décroît lors d'une évolution spontanée
- à l'équilibre thermodynamique, le potentiel thermodynamique est minimal

$$11-1) S_{\text{né}} = \Delta S - S_{\text{éch}} \geq 0 \Rightarrow \Delta S \geq 0 \Rightarrow \Delta(-S) \leq 0$$

Potentiel thermodynamique : fonction néguentropie $(-S)$

$$11-2) \Delta S - \frac{Q}{T_0} \geq 0 \Rightarrow \Delta S - \frac{\Delta U}{T_0} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{T_0} \Delta(U - T_0 S) \leq 0$$

$$\Delta U = W + Q = Q$$

Potentiel thermodynamique : $F^* = U - T_0 S$

$$11-3) \quad \Delta S - \frac{Q}{T_0} \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta U = W + Q &= -P_0 \Delta V + Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta S - \frac{1}{T_0} (\Delta U + P_0 \Delta V) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_0} \Delta (U + P_0 V - T_0 S) \leq 0$$

Potentiel thermodynamique: $G^* = U + P_0 V - T_0 S$.

$$12) \quad 12-1) \quad P_{\max} = ?$$

$$\text{d'après 4)}: D_m (s_2 - s_1) \geq \frac{P_{th}}{T_0} = \frac{1}{T_0} [D_m \{ h_2^* + \frac{C_2^2}{2} \} - \{ h_1 + \frac{C_1^2}{2} \}] - P_u$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} C_2^2 \right) - \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} C_1^2 \right) \right] \leq \underbrace{P_u}_{-P_{rec}}$$

$$\Rightarrow P_{rec_{\max}} = -D_m \left[\left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} C_2^2 \right) - \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} C_1^2 \right) \right]$$

$$12-2) \quad P_{rec_{\max}} = D_m w_{rec_{\max}}$$

$$\Rightarrow w_{rec_{\max}} = \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} C_1^2 \right) - \left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} C_2^2 \right)$$

$$12-3) \quad \text{Potentiel thermodynamique: } f^*$$

$$w_{rec_{\max}} = -\Delta f^* \Rightarrow f^* = h - T_0 s + \frac{1}{2} C^2$$

PROBLEME n°02 (46 Points)

page ⑤

Ba

Questions préliminaires :

• Onde sonore émise par un haut parleur. On met en évidence le caractère progressif de l'onde à l'aide d'un microphone relié à un oscilloscope.

①

On peut décrire la propagation de l'onde sonore par la surpression $p(M, t)$ ou le champ de vitesses relatif aux particules de fluide.

On peut prendre l'autre exemple tel que la corde vibrante

• Equation de propagation D'Alembert.

Sa solution générale est une superposition de deux ondes se propageant dans des sens opposés.

②

$$\psi(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

• v est exprimée en $m.s^{-1}$; Elle représente la célérité de propagation de la fonction d'onde relative au phénomène

①

1. • Ondes transversales : les variations temporelle et spatiale se font perpendiculairement à la direction de propagation

②,75

2. Exemples : - Onde mécanique le long d'une corde : $y(x, t)$.

- Onde électromagnétique : $\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t) \dots$

+ ②,75

• Ondes longitudinales : la fonction d'onde varie suivant la direction de propagation.

Exemples : - Onde sonore ou ultrasonore : $p(x, t), \vec{v}(x, t), \dots$

- Onde mécanique le long d'un ressort

5. Ces fonctions d'ondes sont planes, progressives et harmoniques.
Elles se propagent dans les sens opposés avec les célérités
 $+V$ pour $\underline{\psi}_1(x,t)$ et $-V$ pour $\underline{\psi}_2(x,t)$.

En notation complexe.

$$\underline{\psi}_1(x,t) = a_1 \exp j(\omega(t - \frac{x}{V})) \text{ et } \underline{\psi}_2(x,t) = a \exp j(\omega(t + \frac{x}{V})) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial x^2} = -a \frac{\omega^2}{V^2} \underline{\psi}_1(x,t) ; \frac{\partial^2 \underline{\psi}_2(x,t)}{\partial x^2} = -a \frac{\omega^2}{V^2} \underline{\psi}_2(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial t^2} = 0 \text{ \& m\^eme pour } \underline{\psi}_2(x,t)$$

6. $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_1(x,t) + \underline{\psi}_2(x,t) = a \exp j\omega t (\exp(j\frac{\omega}{V}x) + \exp(j\frac{\omega}{V}x))$
 $= 2a \exp j\omega t \cdot \cos(\frac{\omega}{V}x)$

En notation réelle ;

$$\psi(x,t) = 2a \cos(\frac{\omega}{V}x) \cdot \cos \omega t$$

les variables x et t sont indépendantes. la variable x intervient au niveau de l'amplitude des vibrations temporelle $\Rightarrow$ il n'y a plus propagation :
il s'agit d'une onde stationnaire.

A Ligne bifilaire sans perte.

1 loi des mailles :

$$V(x,t) = L dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + V(x+dx,t)$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx = -L dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\boxed{L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}} \quad \dots \rightarrow (1.5)$$

loi des nœuds :

$$i(x,t) = i_c + i(x+dx,t) ; i_c = \frac{\partial}{\partial t} (L dx \cdot V(x+dx,t))$$

page

$$\dot{i}_C = \Pi dx \cdot \frac{\partial V(x+dx, t)}{\partial t} = \Pi dx \frac{\partial}{\partial t} \left(V(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right).$$

$$= \Pi dx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \Pi (dx)^2 \cdot \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial x}; \text{ le second terme est négligeable d'ordre 2 en } dx.$$

$$\dot{i}_C \approx \Pi dx \cdot \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}.$$

$$i(x, t) - i(x+dx, t) = \Pi dx \cdot \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx.$$

$$\boxed{- \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = \Pi \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}}$$

-----> ①

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t} \quad \textcircled{1} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= \Pi \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial x} \quad \textcircled{2} \end{aligned} \right.$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \Pi \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \Pi L \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = 0}$$

-----> ①

de même

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial x} \quad \textcircled{1}' \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{\Pi} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t} \quad \textcircled{2}' \end{aligned} \right.$$

$$\textcircled{1}' - \textcircled{2}' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} - \Pi L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = 0}$$

-----> ①

ce sont des équations de propagation de type D'Alembert.
les solutions $V(x, t)$ et $i(x, t)$ sont des fonctions d'onde progressives à la célérité $V = \frac{1}{\sqrt{\Pi L}}$ puisque $\frac{1}{\Pi L}$ est exprimé en $m^2 s^{-2}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\Pi L}}; \quad \Pi L = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(\frac{L}{a})} \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{L}{a} = \epsilon_0 \mu_0$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\Pi L}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c.$$

-----> ①

le long de la ligne, le signal électrique se propage à la célérité de la lumière. $V=c$
 Solution générale :

$$v(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

superposition de deux ondes progressives.

1
$$V(x,t) = A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x) + B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} x)$$

Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques se propageant dans des sens opposés.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left[-j \frac{\omega}{c} A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + j \frac{\omega}{c} B \exp(j \frac{\omega}{c} x) \right] \exp j \omega t = -L j \omega i(x,t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow i(x,t) = \left(\frac{1}{cL} A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - \frac{1}{cL} B \exp(j \frac{\omega}{c} x) \right) \exp j \omega t$$

2
$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{i(x,t)} = \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{\frac{1}{cL} (A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x))}$$

$$= cL \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x)} = Z_c$$

$$Z(x) = Z_c \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x)} \quad ; \quad Z_c = cL = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1) + (1)$$

en Ω .

Z_c représente l'impédance caractéristique de la ligne.

3 La ligne est fermée par une résistance R en $x=0$

$$V(0,t) = R i(0,t) \Rightarrow \frac{V(0,t)}{i(0,t)} = R = \frac{A+B}{A-B}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$$

---> (1.5)

le long de la ligne, le signal électrique se propage à la célérité de la lumière. $V=c$

Solution générale :

$$V(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

superposition de deux ondes progressives.

1
$$V(x,t) = A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x) + B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} x)$$

Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques se propageant dans des sens opposés.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left[-j \frac{\omega}{c} A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + j \frac{\omega}{c} B \exp(j \frac{\omega}{c} x) \right] \exp j\omega t = -L j\omega i(x,t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow i(x,t) = \left(\frac{1}{cL} A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - \frac{1}{cL} B \exp(j \frac{\omega}{c} x) \right) \exp j\omega t$$

2
$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{i(x,t)} = \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{\frac{1}{cL} (A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x))}$$

$$= cL \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x)} = Z_c$$

$$Z(x) = Z_c \frac{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) + B \exp(j \frac{\omega}{c} x)}{A \exp(-j \frac{\omega}{c} x) - B \exp(j \frac{\omega}{c} x)} \quad ; \quad Z_c = cL = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1) + (1)$$

en Ω .

Z_c représente l'impédance caractéristique de la ligne.

3 La ligne est fermée par une résistance R en $x=0$

$$V(0,t) = R i(0,t) \Rightarrow \frac{V(0,t)}{i(0,t)} = R = \frac{A+B}{A-B}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$$

---> (1.5)

- Si la ligne est fermée sur l'impédance caractéristique $\Rightarrow R = Z_c \Rightarrow B = 0$
Seule l'onde incidente se propage le long de la ligne
 $\Rightarrow$ le transfert d'énergie à la charge est maximum
On parle d'adaptation d'impédance.
- Si la ligne est fermée sur un court-circuit: $R = 0$
 $\Rightarrow B = A$; il apparaît le long de la ligne un système d'ondes stationnaires.
 $x=0$, on a ventre de tension et un nœud d'intensité.
- Si la ligne est en circuit-ouvert en $x=0$; $R \rightarrow \infty$
il vient $B = -A$, il s'établit de même des ondes stationnaires.
En $x=0$, il y a un ventre d'intensité et un nœud de tension.

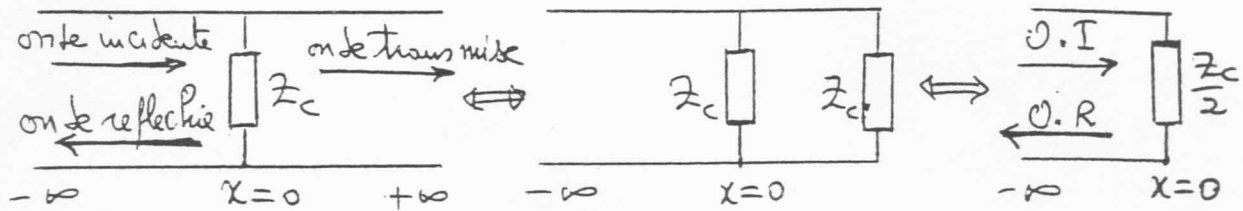
4 $R = 1500 \Omega$
Dans le cas où il n'y a pas réflexion $\Rightarrow R = Z_c$.
 $R = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1500 \Omega$.
d'autre part $C = \sqrt{\frac{1}{L R}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
 $\Rightarrow C = \frac{1}{45} \cdot 10^{-10} \text{ F/m} = 2.22 \text{ pF/m}$.
 $L = 5 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$.

1 Dans la zone où $x > 0$, il n'existe qu'une onde transmise; on a aucune possibilité de la réflexion de l'onde de courant.

$\Rightarrow$ l'impédance de la ligne dans cette région ($x > 0$) est:

$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{i(x,t)} = \frac{A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x)}{\frac{A}{cL} \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x)} = cL = Z_c = \text{cte} \quad \forall x > 0. \quad \rightarrow (1)$$

L'impédance vue en $x=0$ depuis la région $x < 0$ est donc équivalente aux deux impédances $R = Z_c$ et Z_c placées en parallèles : $Z_{eq} = Z_c // Z_c = \frac{Z_c}{2}$.



(1)

2. $\underline{V}(x,t) = A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x) + B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} x)$
 $\underline{i}(x,t) = \frac{1}{cL} (A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x) - B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} x)) = \underline{i}^+(x,t) + \underline{i}^-(x,t)$
 en $x=0$ $\underline{V}(0,t) = Z_{eq} \underline{i}(0,t) = \frac{Z_c}{2} \underline{i}(0,t)$.

$\Rightarrow (A+B) \exp(j\omega t) = \frac{Z_c}{2} \frac{1}{Z_c} (A-B) \exp(j\omega t)$

$A+B = \frac{1}{2} (A-B) \Rightarrow -\frac{1}{2} A = \frac{3}{2} B \Rightarrow \frac{B}{A} = -\frac{1}{3}$

$\rho = \left| \frac{\underline{i}^-(x=0,t)}{\underline{i}^+(x=0,t)} \right| = \frac{-B}{A} = \frac{1}{3}$

33% de l'onde incidente (en courant ou en tension) subit la réflexion.

(2)

B. Ligne bifilaire avec perte

0. loi des mailles :

$\underline{V}(x,t) = r dx \underline{i}(x,t) + \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t} \cdot L dx + \underline{V}(x+dx,t)$

$\underline{V}(x+dx,t) - \underline{V}(x,t) = -r dx \underline{i}(x,t) - L dx \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t}$

$\left| \frac{\partial \underline{V}(x,t)}{\partial x} = -r \underline{i}(x,t) - L \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t} \right|$

----- $\rightarrow$ (1.5)

loi des nœuds : $\underline{i}(x,t) = \underline{i}(x+dx,t) + \underline{i}_r + \underline{i}_c$.

$\underline{i}_r = g dx \underline{V}(x+dx,t) = g dx \left(\underline{V}(x,t) + \frac{\partial \underline{V}(x,t)}{\partial x} dx \right)$
 $= g dx \underline{V}(x,t) + g (dx)^2 \frac{\partial \underline{V}(x,t)}{\partial x}$

On néglige le terme infiniment petit d'ordre en dx .

$$\Rightarrow i_r = g dx \cdot V(x,t).$$

$$i_c = \Gamma dx \frac{\partial}{\partial t} (V(x+dx, t)) \approx \Gamma dx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\text{d'où } i(x, t) = i^0(x+dx, t) + g dx V(x, t) + \Gamma dx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$i(x+dx, t) - i(x, t) = \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx = -g dx V(x, t) + \Gamma dx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -g V(x, t) - \Gamma \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = -r i(x, t) - L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \times \frac{\partial}{\partial x} & (1) \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -g V(x, t) - \Gamma \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{r}{L} \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - g \frac{\partial V}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$- \frac{1}{L} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{r}{L} (-g V(x, t) - \Gamma \frac{\partial V}{\partial t}) - g \frac{\partial V}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - r g V(x, t) - r \Gamma \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - g \Gamma \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \Gamma \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} - (r \Gamma + g \Gamma) \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - r g V(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} - \frac{2K}{c} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - \frac{s^2}{c^2} V(x, t) = 0$$

$$c^2 = \frac{1}{\Gamma L} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma L}} ; \frac{2K}{c} = r \Gamma + g \Gamma$$

$$\Rightarrow K = \frac{c}{2} (r \Gamma + g \Gamma)$$

$$\frac{s^2}{c^2} = r g \Rightarrow s^2 = r g c^2 \Rightarrow s^2 = \frac{r g}{L \Gamma}$$

l'équation de propagation obtenue est appelée
équation de Télégraphiste.

1. $\underline{V}(x,t) = \underline{V}(x) \exp(j\omega t)$

on remplace dans l'équation (II), on obtient:

$$\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} \exp(j\omega t) - \frac{1}{C^2} (\omega^2) \underline{V}(x) \exp(j\omega t) - \frac{2K}{C} j\omega \exp(j\omega t) \underline{V}(x) - \frac{S_2^2}{C^2} \underline{V}(x) \exp(j\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{C^2} + \frac{2K}{C} j\omega + \frac{S_2^2}{C^2} \right) \underline{V}(x) = 0$$

En Comparant avec l'équation $\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} + \underline{k}^2 \underline{V}(x) = 0$ (3)
on obtient : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{C^2} + \frac{2K}{C} j\omega + \frac{S_2^2}{C^2}$
relation de dispersion

2. $\underline{k}(\omega) = k_1 - j k_2$

l'équation $\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} + \underline{k}^2 \underline{V}(x) = 0$ a pour solution
sans le cas d'un signal progressif.

$$\underline{V}(x) = A \exp(j \underline{k} x) + B \exp(-j \underline{k} x)$$

$$= A \exp(j(k_1 - j k_2)x) + B \exp(-j(k_1 - j k_2)x)$$

$$\underline{V}(x) = A \exp(k_2 x) \exp(j k_1 x) + B \exp(-k_2 x) \exp(j k_1 x)$$

la solution générale d'ondes progressives s'écrit :

$$\underline{V}(x,t) = A \exp(k_2 x) \exp(j(\omega t + k_1 x)) + B \exp(-k_2 x) \exp(j(\omega t - k_1 x))$$

Elle représente la somme d'une onde se propageant
vers les x décroissants : $A \exp(k_2 x) \exp(j(\omega t + k_1 x))$ et
d'une onde se propageant suivant les x croissant :
 $B \exp(-k_2 x) \exp(j(\omega t - k_1 x))$

k_2 est lié à l'atténuation (absorption) du signal au cours de la propagation.

k_1 est lié à la vitesse de phase de l'onde.

Le fait que k_1 est une fonction de la pulsation ω traduit le caractère dispersif du milieu de propagation.

3. Les pertes étant faibles; le terme $\frac{\omega^2}{c^2}$ est prépondérant

$$\underline{k}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2j\omega K}{c} - \frac{S^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{S^2}{\omega^2} - \frac{2jKc}{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k}(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{S^2}{\omega^2} - \frac{2jKc}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

on développe le développement limité de $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$\underline{k}(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{S^2}{2\omega^2} - \frac{2jKc}{\omega} + \frac{4K^2c^2}{8\omega^2} \right)$$

$$= \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S^2}{\omega^2} - j \frac{Kc}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{K^2c^2}{\omega^2} \right)$$

$$= \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{K^2c^2}{\omega^2} \right) - j \frac{Kc}{\omega} \frac{\omega}{c} = k_1 - j k_2$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{K^2c^2}{\omega^2} \right) \quad k_2 = K$$

$$k_2 = K = \frac{c}{2} (r\Gamma + g\Lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}} (r\Gamma + g\Lambda)$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2} r g c^2 + \frac{1}{8} c^4 (r\Gamma + g\Lambda)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$= \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2\omega^2} \frac{rg}{\Gamma\Lambda} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{\Lambda} - \frac{g}{\Gamma} \right)^2 \right)$$

$$\left| k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{\Lambda} - \frac{g}{\Gamma} \right)^2 \right) \right| \text{ et } \left| k_2(\omega) = \frac{1}{2} \frac{(r\Gamma - g\Lambda)}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \right|$$

$$V_{\varphi} = \frac{\omega}{k_1(\omega)} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{\Gamma} \right)^2 \right)}$$

$$\Rightarrow V_{\varphi} = \frac{c}{1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{\Gamma} \right)^2}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ω .
Le milieu est donc dispersif $\Rightarrow$ il y a déformation du signal électrique au cours de sa propagation le long de la ligne.

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(r \sqrt{\frac{\Gamma}{L}} + g \sqrt{\frac{L}{\Gamma}} \right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ la propagation est accompagnée d'une atténuation du signal électrique.

on remarque que $V_{\varphi}(\text{ligne sans pertes}) > V_{\varphi}(\text{ligne avec pertes})$

5. Pour éviter la déformation du signal, V_{φ} est indépendante de ω

$$\Rightarrow \frac{r}{L} - \frac{g}{\Gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{r\Gamma = Lg} \quad \text{condition de Heaviside}$$

Si cette condition est réalisée, l'onde de courant se propage à la célérité $c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma L}} = V_{\varphi}$

mais la propagation s'accompagne toujours avec l'atténuation. $k_2 \neq 0$.

6.

$$1. \quad r\Gamma = 45 \cdot 10^{-2} \times 2,22 \cdot 10^{-12} \approx 10^{-13}$$

$$gL = 5 \cdot 10^{-6} \times 2 \cdot 10^{-8} \approx 10^{-13}$$

Condition de Heaviside est vérifiée.

2. Pour une onde se propageant suivant les x croissants la fonction d'onde de tension s'écrit

$$V(x,t) = B \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1(\omega)x)$$

$B \exp(k_2 x)$ représente l'amplitude de l'onde qui décroît exponentiellement.

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\pi} g \sqrt{\frac{\pi}{L}} + g \sqrt{\frac{L}{\pi}} \right) = g \sqrt{\frac{L}{\pi}}$$

x_0 est la valeur de x pour $B \exp(k_2 x) = \frac{B}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow k_2 x_0 = \ln \sqrt{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\ln \sqrt{2}}{k_2}$$

A.N: $k_2 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{\frac{5 \times 10^{-6}}{\frac{1}{45} \cdot 10^{-10}}} = 30 \cdot 10^{-8} \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$
 $= 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ → (1.5)

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2} \ln 2}{3 \cdot 10^{-5}} = 11,55 \cdot 10^3 \text{ m} = 11,55 \text{ km}.$$

La valeur de x_0 montre que l'amortissement de l'onde le long de la ligne téléphonique n'est pas négligeable. Ce qui limite les communications urbaines. → (0.5)

Pour augmenter la distance caractéristique de l'atténuation x_0 , on intercale régulièrement des bobines d'inductance L le long de la ligne téléphonique.

7. Dans ce cas V_φ dépend de ω .

$$V_\varphi = \frac{C}{1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{\pi} \right)^2} \approx C \left(1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{\pi} \right)^2 \right)$$

puisque $\frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{\pi} \right)^2 \ll 1$
 ($L\omega \gg r$ et $\pi\omega \gg g$)

Si ω augmente à un tel point ($f_0 \approx 1 \text{ MHz}$)
on peut négliger le terme $\frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{L} - \frac{g}{C} \right)^2$ devant 1

$$\Rightarrow V_4 = C.$$

Dans le cas d'une ligne téléphonique, f_0 est en
dehors du domaine des fréquences vocales $[20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$
une telle valeur de la fréquence ne peut être
utile pour les signaux électriques se propageant
le long d'une ligne téléphonique.

Fin de la correction