

**Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012**

**Concours Physique et Chimie, et Technologie
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques**



PARTIE I

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $AP'' + BP'$ est un polynôme, donc $\mathcal{L}(P) \in \mathbb{R}[X]$.
 - Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
 $\mathcal{L}(\lambda P + Q) = A(\lambda P'' + Q'') + B(\lambda P' + Q') = \lambda(AP'' + BP') + (AQ'' + BQ')$.
Donc $\mathcal{L}(\lambda P + Q) = \lambda \mathcal{L}(P) + \mathcal{L}(Q)$ et par suite $\mathcal{L}$ est linéaire.
 - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $p \leq n$.
On a : P'' est nul ou de degré $(p-2)$ et P' est nul ou de degré $(p-1)$.
Comme $A \in \mathbb{R}_2[X]$ et $B \in \mathbb{R}_1[X]$, alors $\deg(AP'') \leq p$ et $\deg(BP') \leq p$. Ainsi, $\deg(\mathcal{L}(P)) \leq p \leq n$ et finalement $\mathcal{L}(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ceci montre que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Puisque : $\mathcal{L}(1) = 0$, $\mathcal{L}(X) = B = \beta_0 + \beta_1 X$
et $\mathcal{L}(X^2) = 2A + 2BX = 2\alpha_0 + 2(\alpha_1 + \beta_0)X + 2(\alpha_2 + \beta_1)X^2$, la matrice M de $\mathcal{L}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2(\alpha_1 + \beta_0) \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix}$$

- M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc les éléments de la diagonale. Ainsi, les valeurs propres de M sont : $0, \beta_1$ et $2(\alpha_2 + \beta_1)$. Or, par hypothèse, $\beta_1 \neq 0, \alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ et $2\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ ce qui donne $2(\alpha_2 + \beta_1) \neq \beta_1$. Les 3 valeurs propres de M sont donc 2 à 2 distinctes et comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors M est diagonalisable.
- Dans ce cas $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 2\beta_1 \end{pmatrix}$ et les hypothèses du 2) (b) sont vérifiées. La matrice M est donc diagonalisable.
 - M étant diagonalisable et admettant 3 valeurs propres distinctes, cherchons une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de M :
 - pour $\lambda = 0$, $\boxed{P_0 = 1}$ est un vecteur propre.
 - pour $\lambda = \beta_1$, on cherche $P \in \ker(M - \beta_1 I)$. Comme $M - \beta_1 I = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & 0 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$, alors :
 $\boxed{P_1 = \beta_0 + \beta_1 X}$ est dans $\ker(M - \beta_1 I)$.
 - pour $\lambda = 2\beta_1$, on va résoudre :
 $(M - 2\beta_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta_1 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & -\beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ce qui donne un vecteur propre $\boxed{P_2 = \alpha_0\beta_1 + \beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1 X + \beta_1^2 X^2}$
cl : (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui diagonalise M .

$$4. \text{ Dans ce cas, } M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & -2\alpha_2 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

M admet donc 2 valeurs propres : 0 et β_1 , qui sont distinctes avec β_1 de multiplicité 2.
Alors M est diagonalisable si et seulement si $\dim(\ker(M - \beta_1 I)) = 2$, ce qui signifie que $(M - \beta_1 I)$ est de rang 1.

Or $M - \beta_1 I = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $M - \beta_1 I$ est de rang 1 si et seulement si $\beta_0 = 0$.

PARTIE II

1. (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ et $2xy \leq x^2 + y^2$ (car $(x-y)^2 \geq 0$). Ainsi $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.
- (b) • On a $H \subset C(I, \mathbb{R})$ et $0 \in H$.
 • Si $f, g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est continue sur I .
 • On a ωf^2 est intégrable sur I , donc $\omega \lambda^2 f^2$ l'est aussi.
 De plus, par 1) (a), $(\lambda f + g)^2 \leq 2(\lambda^2 f^2 + g^2)$ donc
 $|\omega|(\lambda f + g)^2 = \omega(\lambda f + g)^2 \leq 2(\omega \lambda^2 f^2 + \omega g^2)$ qui est intégrable sur I , car
 $\omega \lambda^2 f^2$ et ωg^2 le sont. Ainsi $\omega(\lambda f + g)^2$ est intégrable sur I .
 cl : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in H, \lambda f + g \in H$, H est donc un sous-espace vectoriel de $C(I, \mathbb{R})$.
2. • On a $2|f| \cdot |g| \leq (f^2 + g^2)$ et $\omega > 0$, donc $\omega |f \cdot g| \leq \frac{1}{2}(\omega f^2 + \omega g^2)$. Comme
 $(\omega f^2 + \omega g^2)$ est intégrable sur I (car $f, g \in H$), alors $\omega |f \cdot g|$ est intégrable sur I et par suite $\omega \cdot f \cdot g$
 est intégrable sur I .
3. • En utilisant 2), il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini sur $H \times H$.
 • Soit $f, g \in H$. On a $\langle f, g \rangle = \int_I \omega(t) f(t) g(t) dt = \int_I \omega(t) g(t) f(t) dt = \langle g, f \rangle$.
 • Soit $f_1, f_2, g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\langle \lambda f_1 + f_2, g \rangle = \int_I (\lambda \omega(t) f_1(t) g(t) + \omega(t) f_2(t) g(t)) dt = \lambda \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{ère} variable, et par symétrie,
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

• $\forall f \in H, \langle f, f \rangle = \int_I \omega(t) (f(t))^2 dt \geq 0$, car $\forall t \in I, \omega(t) (f(t))^2 \geq 0$.

De plus, $\langle f, f \rangle = 0 \implies \int_I \omega(t) (f(t))^2 dt = 0$. Comme ωf^2 est continue et positive sur I , alors
 $\forall t \in I, \omega(t) (f(t))^2 = 0$ et par suite $\forall t \in I, f(t) = 0$. Ceci montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

PARTIE III

1. $\forall x \in]-1, 1[, (x^2 - 1)\omega'(x) = -(x^2 - 1) \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x}{1+x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \omega(x)$
2. (a) $\mathcal{L}(1) = 0, \mathcal{L}(X) = B = 1 + 2X$
 et pour $k \geq 2, \mathcal{L}(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.
- (b) La matrice M de $\mathcal{L}$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

- (c) M est triangulaire supérieure, car $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \deg(\mathcal{L}(X^k)) \leq k$. Ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale, qui sont donc :
 $\lambda_k = k(k+1), k \in \{0, \dots, n\}$.
- (d) On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et M admet $(n+1)$ valeurs propres distinctes
 $(k(k+1) = p(p+1) \implies k = p)$, donc M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

3. (a) Il existe une base de $\mathbb{R}_n[X]$ qui diagonalise M , formée de vecteurs propres de M , donc de $\mathcal{L}$. Comme les sous-espaces propres $\ker(\mathcal{L} - \lambda_k \text{id})$; $k \in \{0, \dots, n\}$ sont de dimension 1, alors dans chacun d'eux, il existe un seul polynôme unitaire. Il existe donc une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $P_k \in \ker(\mathcal{L} - \lambda_k \text{id})$ et P_k soit unitaire pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

(b) On a pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathcal{L}(P_k) = \lambda_k \cdot P_k$. Soit $p = \deg(P_k)$, on a :

$$\mathcal{L}(P_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 0, \\ 2X + 1, & \text{si } p = 1, \\ p(p+1)X^p + \dots, & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

En comparant les coefficients dominants de $\mathcal{L}(P_k)$ et de $\lambda_k \cdot P_k$, on a : $\lambda_k = k(k+1) = p(p+1)$, d'où $p = k$. Ainsi, $\deg(P_k) = k$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

(c) • $P_0 \in \ker(\mathcal{L})$ et P_0 est unitaire $\Rightarrow P_0 = 1$.

• $P_1 = X + \alpha$ et $\mathcal{L}(P_1) = 2P_1 \Rightarrow P_1 = X + \frac{1}{2}$

• $P_2 = X^2 + \alpha X + \beta$ et $\mathcal{L}(P_2) = 6P_2 \Rightarrow P_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^k \omega(x)$ est continue sur $] -1, 1[$.

Au voisinage de 1, $\lim_{x \rightarrow 1} x^k \omega(x) = 0$, donc $x \mapsto x^k \omega(x)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

Au voisinage de (-1) , on a : $|x^k| \omega(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$: intégrable sur $] -1, 0]$ car $\frac{1}{2} < 1$. D'où $x \mapsto x^k \omega(x)$ est intégrable sur $] -1, 0]$.

(b) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$. On pose $f^2(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$. Comme, $\forall k \in \{0, \dots, m\}$, $x \mapsto x^k \omega(x)$ est intégrable sur $] -1, 1[$, alors ωf^2 est intégrable sur $] -1, 1[$. f étant continue sur $] -1, 1[$, alors $f \in H$ et par suite $\mathbb{R}[X] \subset H$.

5. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a $\mathcal{L}(P) - P' = (X^2 - 1)P'' + 2XP' = ((X^2 - 1)P')'$. Ainsi, à l'aide d'une intégration par parties sur $[\alpha, \beta]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathcal{L}(P)(t) - P'(t))Q(t)\omega(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} P'(t)Q(t)\omega(t)dt = \left[(t^2 - 1)P'(t) \cdot Q(t)\omega(t) \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &\quad - \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)(Q\omega)'(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} P'(t)Q(t)\omega(t)dt = \\ &\quad \left[(t^2 - 1)P'(t) \cdot Q(t)\omega(t) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt - \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)Q(t)\omega'(t)dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta} P'(t)Q(t)\omega(t)dt. \end{aligned}$$

Or, d'après III) 1), On a $(t^2 - 1)\omega'(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)Q(t)\omega'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} P'(t)Q(t)\omega(t)dt. \text{ D'où} \\ \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt &= \left[(t^2 - 1)P'(t) \cdot Q(t)\omega(t) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt. \end{aligned}$$

- (b) $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $(t^2 - 1)\omega(t) = -(1-t)(1+t)(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} = -(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part, $\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 1)P'(t)Q(t)\omega(t) = \lim_{t \rightarrow -1} (t^2 - 1)P'(t)Q(t)\omega(t) = 0$,

et $t \mapsto (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\omega(t)$ est intégrable sur $] -1, 1[$. Donc, en faisant tendre α vers -1 et β vers 1 , on obtient d'après l'égalité du 5) (a) :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}P'(t)Q'(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}Q'(t)P'(t)dt \\ &= \langle \mathcal{L}(Q), P \rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle. \end{aligned}$$

6. Soit $k, l \in \{0, \dots, n\}$. D'après 5), on a $\langle \mathcal{L}(P_k), P_l \rangle = \langle P_k, \mathcal{L}(P_l) \rangle$. Ce qui donne

$\langle \lambda_k P_k, P_l \rangle = \langle P_k, \lambda_l P_l \rangle \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_l) \langle P_k, P_l \rangle = 0$. Donc si $k \neq l$, on a $\lambda_k \neq \lambda_l$ et par suite $\langle P_k, P_l \rangle = 0$. Ainsi, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE IV

1. $\forall x \in \mathbb{R}, H_0(x) = e^{x^2} \omega^{(0)}(x) = 1, H_1(x) = -e^{x^2} \omega'(x) = 2x$ et $H_2(x) = e^{x^2} \omega''(x) = 4x^2 - 2$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{H_0(x) = 1}, \boxed{H_1(x) = 2x}, \boxed{H_2(x) = 4x^2 - 2}$
2. • Toute fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall k \in \mathbb{N}, |x^k| \omega(x) = |x^k| e^{-x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $x \mapsto x^k \omega(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme elle est continue sur $[0, 1]$, alors elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par parité, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire, on a alors : $\forall f \in \mathbb{R}[X], f\omega$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $f^2 \omega$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $f^2 \in \mathbb{R}[X]$). D'où $\mathbb{R}[X] \subset H$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :
 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \omega^{(n)}(x)$. En dérivant, on obtient :
 $H'_n(x) = (-1)^n [2xe^{x^2} \omega^{(n)}(x) + e^{x^2} \omega^{(n+1)}(x)]$
 $\quad = 2xH_n(x) - (-1)^{n+1} e^{x^2} \omega^{(n+1)}(x)$
 $\quad = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.
D'où, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \omega^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} (\omega')^{(n)}(x)$.
Or, $\omega'(x) = -2xe^{-x^2}$, en posant $f(x) = -2x$, on a $\omega' = f\omega$. Utilisons la formule de Leibniz, on aura $(\omega')^{(n)} = (f\omega)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \omega^{(n-k)}$.
Or $f^{(k)} = 0, \forall k \geq 2$, donc $(\omega')^{(n)}(x) = C_n^0 f(x) \omega^{(n)}(x) + C_n^1 f'(x) \omega^{(n-1)}(x)$. D'où, $\omega^{(n+1)}(x) = -2x\omega^{(n)}(x) - 2n\omega^{(n-1)}(x)$. Ce qui donne
 $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} (-2x\omega^{(n)}(x) - 2n\omega^{(n-1)}(x)) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$, par 3)
 $\quad = 2nH_{n-1}(x)$, par 4)(a).
5. (a) Montrons par récurrence que H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n = 2^n$.
• Pour $n = 0, H_0 = 1$, le résultat est vrai.
• Pour $n = 1, H_1 = 2X$, le résultat est vrai.
• Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai pour tout $k \leq n$ et montrons le pour $n + 1$.
Par 4) : $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}, H_n$ et H_{n-1} sont des polynômes, donc H_{n+1} est un polynôme. D'autre part,
 $\deg(H_n) = n \Rightarrow \deg(XH_n) = n + 1$ et $\deg(H_{n-1}) = n - 1 < n + 1$, donc $\deg(2XH_n - 2nH_{n-1}) = n + 1$ c-à-d $\deg(H_{n+1}) = n + 1$. De plus, le coefficient dominant de H_{n+1} est $a_{n+1} = 2a_n = 2^{n+1}$.
(b) Par récurrence sur n . Pour $n = 0$ et $n = 1$, le résultat est vrai.
Pour $n \geq 1$, on suppose que $H_k(-x) = (-1)^k H_k(x)$, pour tout $k \leq n$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(-x) = -2xH_n(-x) - 2nH_{n-1}(-x)$
 $\quad = 2(-1)^{n+1} xH_n(x) - 2(-1)^{n-1} nH_{n-1}(x)$
 $\quad = (-1)^{n+1} [2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)]$
 $\quad = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)$. D'où le résultat pour $n + 1$.
6. On a : $\mathcal{L}(H_n) = AH_n'' + BH_n' = H_n'' - 2XH_n'$. Donc $\mathcal{L}(H_0) = 0$ et d'après 4)(b), on a pour $n \geq 1$, $H_n' = 2nH_{n-1}$.
Ainsi, $\mathcal{L}(H_n) = 2nH_{n-1}' - 4nXH_{n-1} = -2n(2XH_{n-1} - H_{n-1}') = -2nH_n$, d'après 3). Finalement, $\mathcal{L}(H_n) = -2nH_n$, ce qui implique que H_n est un vecteur propre de $\mathcal{L}$.
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \omega^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2}$.
Alors, $P(x) \omega^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (resp. $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$), car pour tout $k \in \mathbb{N}$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^{-x^2} = 0$, et PH_{n-1} est un polynôme. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \omega^{(n-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) \omega^{(n-1)}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
(b) \bullet \text{ Pour } n \geq 1, \langle H_n, H_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) H_n(t) H_0(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (-1)^n e^{t^2} \omega^{(n)}(t) dt \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t) dt \\
&= (-1)^n \left[\omega^{(n-1)}(t) \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{t \rightarrow -\infty} \omega^{(n-1)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega^{(n-1)}(t) = 0$, d'après (a), donc $\langle H_n, H_0 \rangle = 0$, pour $n \geq 1$.

$$\bullet \text{ pour } n = 0, \langle H_0, H_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(c) Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) H_n(t) H_m(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t) H_m(t) dt (*).$$

Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} \omega^{(n)}(t) H_m(t) dt &= \left[\omega^{(n-1)}(t) H_m(t) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \omega^{(n-1)}(t) H'_m(t) dt \\
&= \left[\omega^{(n-1)}(t) H_m(t) \right]_{\alpha}^{\beta} - 2m \int_{\alpha}^{\beta} \omega^{(n-1)}(t) H_{m-1}(t) dt
\end{aligned}$$

(car $H'_m = 2m H_{m-1}$). Or $H_m \in \mathbb{R}[X]$, alors d'après (a), on a

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \omega^{(n-1)}(t) H_m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega^{(n-1)}(t) H_m(t) = 0. \text{ Ce qui donne lorsque}$$

$$\alpha \rightarrow -\infty \text{ et } \beta \rightarrow +\infty : \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t) H_m(t) dt = -2m \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n-1)}(t) H_{m-1}(t) dt. \text{ Par suite, } \langle$$

$$\begin{aligned}
H_n, H_m \rangle &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t) H_m(t) dt \\
&= 2m(-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n-1)}(t) H_{m-1}(t) dt \\
&= 2m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle, \text{ par } (*).
\end{aligned}$$

(d) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$. D'après (b) et (c), on a

$\langle H_n, H_m \rangle = 2m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle = \dots = 2^m m! \langle H_{n-m}, H_0 \rangle = 0$, car $n-m \neq 0$. Ainsi, par symétrie, $\langle H_n, H_m \rangle = 0$, si $n \neq m$. Donc la famille $(H_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale. D'autre part, $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc libre et de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) D'après (d) et (b), on a $\langle H_n, H_n \rangle = 2^n n! \langle H_0, H_0 \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(H_0, \dots, H_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que : } P = \sum_{k=0}^n a_k H_k. \text{ Comme } (H_0, \dots, H_n) \text{ est orthogonale } \langle P, H_p \rangle = a_p \langle$$

$$H_p, H_p \rangle = a_p 2^p p! \sqrt{\pi}. \text{ Ainsi } a_p = \frac{\langle P, H_p \rangle}{2^p p! \sqrt{\pi}}, \text{ d'où le résultat.}$$

8. (a) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\bullet \text{ Pour } n = 1, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial}{\partial t} (e^{-(x-t)^2}) = 2(x-t)e^{-(x-t)^2} = H_1(x-t)e^{-(x-t)^2}$$

$\bullet$ Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} (e^{-(x-t)^2}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-(x-t)^2}) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (H_n(x-t)e^{-(x-t)^2}) \\
&= 2(x-t)H_n(x-t)e^{-(x-t)^2} - H'_n(x-t)e^{-(x-t)^2} \\
&= e^{-(x-t)^2} [2(x-t)H_n(x-t) - H'_n(x-t)] \\
&= e^{-(x-t)^2} H_{n+1}(x-t), \text{ d'après 3).}
\end{aligned}$$

(b) i. On a $t \mapsto e^{2xt}$ est développable en série entière en 0, de rayon infini et $t \mapsto e^{-t^2}$ est développable en série entière en 0, de rayon infini, leur produit g_x est alors développable en série entière en 0, de rayon infini.

ii. g_x étant développable en série entière en 0, de rayon infini, elle est alors la somme de sa série de Taylor en 0. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_x^{(n)}(0)}{n!} t^n$.

Or $g_x(t) = e^{x^2} e^{-(x-t)^2}$, ce qui donne $g_x^{(n)}(t) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-(x-t)^2})$, donc d'après (a), pour $t = 0$, $g_x^{(n)}(0) = e^{x^2} H_n(x) e^{-x^2} = H_n(x)$.

D'où, $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$.

(c) i. φ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\omega(x)\varphi^2(x) = e^{-x^2} e^{2x} = e \cdot e^{-(x-1)^2}$, alors $\omega(x)\varphi^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $\omega(x)\varphi^2(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$. Ainsi, $\omega\varphi^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite $\varphi \in \mathbf{H}$.

ii. On a : $\langle \varphi, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^t H_n(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^t \omega^{(n)}(t) e^{t^2} dt$
 $= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \omega^{(n)}(t) dt (**)$

Une intégration par parties donne alors :

$$\langle \varphi, H_n \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left((-1)^n \left[e^t \omega^{(n-1)}(t) \right]_{-\alpha}^{\alpha} - (-1)^n \int_{-\alpha}^{\alpha} e^t \omega^{(n-1)}(t) dt \right).$$

Comme $\omega^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} H_{n-1}(t) e^{-t^2}$ et H_{n-1} est un polynôme, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t) = 0.$$

D'où, $\langle \varphi, H_n \rangle = -(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t) dt = \langle \varphi, H_{n-1} \rangle$, par (**).

iii. D'après ce qui précède, $\langle \varphi, H_n \rangle = \langle \varphi, H_0 \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Or

$$\langle \varphi, H_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}} e^{-(t-\frac{1}{2})^2} dt = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{1}{4}}$$

par le changement de variable $u = t - \frac{1}{2}$. Donc $\langle \varphi, H_n \rangle = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{1}{4}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d) En prenant $t = \frac{1}{2}$ dans 8) (b), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{2^n \cdot n!} e^{\frac{1}{4}}.$$

D'où, d'après (c) iii), on obtient $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle \varphi, H_n \rangle}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} H_n(x)$.

PARTIE V

1. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|e^{itx} f(t)| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto e^{itx} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f, g \in L_c^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(\widehat{\lambda f + g})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \widehat{f}(x) + \widehat{g}(x). \text{ Ainsi } (\widehat{\lambda f + g}) = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}.$$

3. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. L'application : $(x, t) \mapsto e^{itx} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse de domination, car : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} |e^{itx} f(t)| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathbb{R}, |\widehat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} f(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt,$$

donc $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Soit $\psi : (x, t) \mapsto e^{itx} f(t)$. On a :

- ψ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et vérifie l'hypothèse de domination.
- $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) = ite^{itx} f(t) = ie^{itx} h(t)$, donc $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right| = |h(t)|$ et $|h|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ vérifie donc l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a :

$$(\widehat{f})'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) dt = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} h(t) dt = i \widehat{h}(x).$$

5. (a) f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$ et comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, f admet une limite finie l en $+\infty$ et une limite finie l' en $-\infty$.
Si $l \neq 0$, alors $|f(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} |l|$ et par suite ceci contredit le fait que $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. Ainsi, $l = 0$.
De même, si $l' \neq 0$, $|f(x)| \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} |l'|$ et comme $x \mapsto |l'|$ n'est pas intégrable sur $] -\infty, 0]$, on a nécessairement $l' = 0$. Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(\widehat{f'})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f'(t) dt$. On effectue une intégration par parties :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{itx} f'(t) dt = \left[e^{itx} f(t) \right]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} ix e^{itx} f(t) dt.$$

Or, d'après (a), $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{itx} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{itx} f(x) = 0$, car $|e^{itx} f(t)| = |f(t)|$, donc lorsque α tend vers $+\infty$, on obtient : $(\widehat{f'})(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} f(t) dt = -ix \widehat{f}(x)$.

6. (a) • $\varphi_0 \in L_c^1(\mathbb{R})$, car φ_0 est continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi_0(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$,

$$\varphi_0(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- $x \mapsto x\varphi_0(x)$ est de même intégrable sur $\mathbb{R}$, car $x\varphi_0(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0'(x) = -x\varphi_0(x)$, alors φ_0' est intégrable sur $\mathbb{R}$. φ_0 vérifie ainsi les hypothèses de 4) et 5).

(b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0'(x) = -x\varphi_0(x)$.

(c) D'après (b), $\forall x \in \mathbb{R}, (\widehat{\varphi_0'})(x) = -\widehat{h}(x)$, où $h(x) = x\varphi_0(x)$.

D'après 4), $\widehat{h}(x) = -i\widehat{\varphi_0'}(x)$ et d'après 5), $(\widehat{\varphi_0'})(x) = -ix\widehat{\varphi_0}(x)$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, -ix\widehat{\varphi_0}(x) = i\widehat{\varphi_0'}(x)$, ainsi $\widehat{\varphi_0}$ vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{y' + xy = 0}.$$

(d) $y' + xy = 0$ est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\varphi_0}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$. Or $\widehat{\varphi_0}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$ (par le changement de variable C^1 -difféomorphisme $t \mapsto \sqrt{2}t$). D'où $\widehat{\varphi_0}(0) = \sqrt{2\pi}$ et par suite $\widehat{\varphi_0}(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. (a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{n+1}(x) = H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = [2xH_n(x) - H_n'(x)]e^{-\frac{x^2}{2}} = 2x\varphi_n(x) - H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Or, $\varphi_n'(x) = H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, ce qui donne :

$$\varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - (\varphi_n'(x) + x\varphi_n(x)) = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x). \text{ Ainsi,}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x) = h_n(x) - \varphi_n'(x).$$

(b) • On a φ_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme H_n est polynômiale, alors $\varphi_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ et par suite $\varphi_n \in L_c^1(\mathbb{R})$.

- $\varphi_n'(x) = x\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, donc $\varphi_n' \in L_c^1(\mathbb{R})$.

- $h_n(x) = x\varphi_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, donc $h_n \in L_c^1(\mathbb{R})$.

(c) D'après (b), les hypothèses de 4) et de 5) sont vérifiées par φ_n , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{h_n}(x) = -i(\widehat{\varphi_n'})'(x) \text{ et } \widehat{\varphi_n'}(x) = ix\widehat{\varphi_n}(x).$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\varphi_{n+1}}(x) = \widehat{h_n}(x) - \widehat{\varphi_n'}(x) = -i(\widehat{\varphi_n'})'(x) - ix\widehat{\varphi_n}(x) (***)$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $\widehat{\varphi}_n = \lambda_n \varphi_n$.

• Pour $n = 0$, on a montré que $\widehat{\varphi}_0 = \sqrt{2\pi} \cdot \varphi_0$, le résultat est donc vrai, avec $\lambda_0 = \sqrt{2\pi}$.

• Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\varphi}_n = \lambda_n \varphi_n$, et montrons le résultat pour $n + 1$.

$$\widehat{\varphi}_n = \lambda_n \varphi_n \implies (\widehat{\varphi}_n)' = \lambda_n \varphi_n'.$$

En utilisant (***) et (a), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\varphi_{n+1}}(x) = -i\lambda_n \varphi_n'(x) - ix\lambda_n \varphi_n(x) = i\lambda_n (-\varphi_n'(x) + x\varphi_n(x)) = i\lambda_n \varphi_{n+1}(x). \text{ Ainsi,}$$

$$\widehat{\varphi_{n+1}} = \lambda_{n+1} \varphi_{n+1}, \text{ avec } \lambda_{n+1} = i\lambda_n, \text{ ce qui donne : } \lambda_n = i^n \lambda_0 = i^n \sqrt{2\pi}.$$

Finalement, on vient de prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{\varphi}_n = i^n \sqrt{2\pi} \varphi_n$.