

Correction de l'épreuve de physique
Concours Physique et Chimie
Session Juin 2012

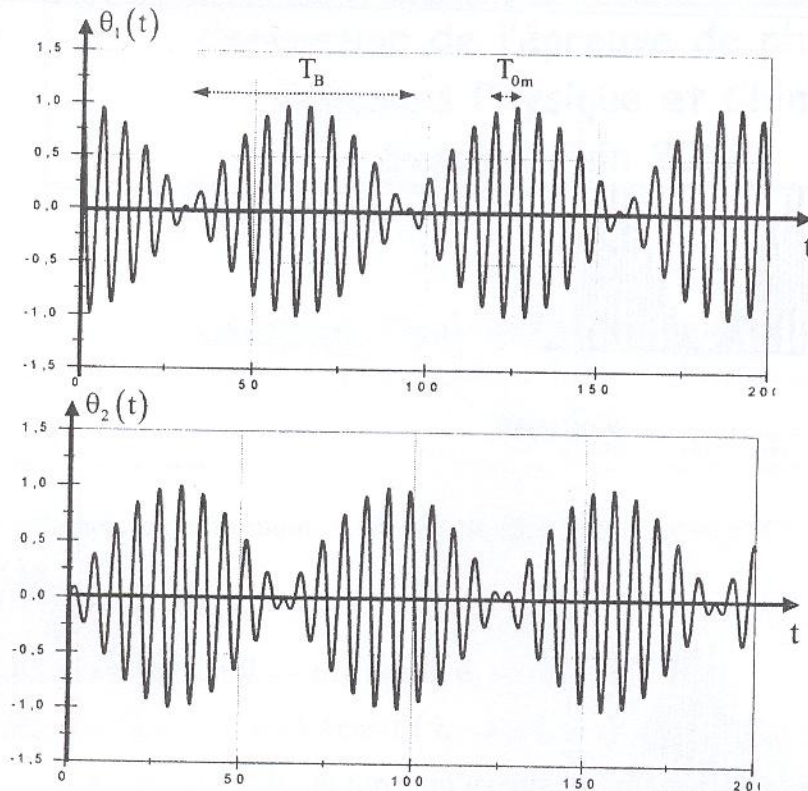


Exercice : Deux oscillateurs couplés (25/100)

Q	Réponses	Barèmes
1-	Le théorème de moment cinétique est appliqué aux points O_1 et O_2 ; * $\frac{d\vec{L}_{/O_1}}{dt} = \sum \vec{M}_{/O_1, \vec{F}_{ext}} = \vec{M}_{/O_1, \vec{P}} + \vec{M}_{/O_1, \vec{T}_1} + \vec{M}_{/O_1, \vec{F}_1}$; $\vec{M}_{/O_1, \vec{P}} = \vec{O_1 M_1} \wedge m \vec{g} = -m g \ell \sin \theta_1 \vec{e}_y \approx -m g \ell \theta_1 \vec{e}_y$, $\vec{M}_{/O_1, \vec{T}_1} = \vec{O_1 M_1} \wedge \vec{T}_1 = -k \ell \cos \theta_1 (x_1 - x_2) \vec{e}_y \approx -k \ell (x_1 - x_2) \vec{e}_y = -k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \vec{e}_y$ et $\vec{M}_{/O_1, \vec{F}_1} = \vec{O_1 M_1} \wedge \vec{F}_1 = \vec{0}$; la force qu'exerce la tige est orientée vers l'axe de rotation $\frac{d\vec{L}_{/O_1}}{dt} = \vec{O_1 M_1} \wedge m \vec{v}(M_1) = m \dot{\theta}_1 \ell^2 \vec{e}_y = -m g \ell \theta_1 \vec{e}_y - k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \vec{e}_y$ Projection suivant $O_1 y$, on obtient l'équation différentielle couplée : $m \ddot{\theta}_1 \ell^2 = -m g \ell \theta_1 - k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{\ell} \theta_1 + \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) = 0$ $\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 + \Omega^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0$ (I) * De même, pour le deuxième pendule, le théorème de moment cinétique $\frac{d\vec{L}_{/O_2}}{dt} = \sum \vec{M}_{/O_2, \vec{F}_{ext}} = \vec{M}_{/O_2, \vec{P}_2} + \vec{M}_{/O_2, \vec{T}_2} + \vec{M}_{/O_2, \vec{F}_2}$ amène à la deuxième équation différentielle couplée : $\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell} \theta_2 + \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1) = 0$ $\Rightarrow \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 + \Omega^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0$ (II).	1 1 1
2-1-	(I) + (II) $\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$, on pose $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $\Rightarrow u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ (I) - (II) $\Rightarrow \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 - \theta_2) + 2\Omega^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \ddot{v}(t) + (\omega_0^2 + 2\Omega^2) v(t) = 0$ on pose $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$ et $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \Rightarrow v(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$	1 1
2-2-	$\theta_1(t) = \frac{u(t) + v(t)}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$ $\theta_2(t) = \frac{u(t) - v(t)}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$	1
3-1-	Un mode propre d'un système d'oscillateurs couplés est représenté par une solution	

	des équations du mouvement où tous les oscillateurs vibrent d'une façon harmonique de pulsation ω . Elle constitue la pulsation propre du mode propre considéré. Si le système couplé est excité initialement dans l'un de ses modes propre, il y reste par la suite	1,5
3-2-	Un système de N oscillateurs couplés possède N modes propres auquel on associe N pulsations propres seulement. La solution générale est une superposition des modes propres. Mode 1 : $\theta_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) = \theta_2(t)$ les deux pendules se déplacent selon les mêmes lois sinusoïdales à la pulsation $\omega_1 = \omega_0$. Le ressort effectue un mouvement de translation sans déformation : mode symétrique. Mode 2 : $\theta_1(t) = \frac{A_2}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) = -\theta_2(t)$ Les pendules se déplacent sinusoïdalement à la pulsation $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$ suivant des sens opposés. Il s'agit du mode anti-symétrique.	1 1
3-3-	Un choix convenable des conditions initiales imposées au système couplé permet de sélectionner un mode propre parmi les deux.	1
4-1-	Avec les conditions initiales indiquées, on trouve : $A_1 = -\theta_0$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = -\theta_0$ et $\varphi_2 = 0$. $\theta_1(t) = -\frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_2 t)$ $\theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_2 t)$ Les mouvements des pendules sont constitués d'une combinaison des lois sinusoïdales.	1 1 0,5
4-2-	$\theta_1(t) = -\frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = -\theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ $\theta_1(t) = -\theta_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega_m t)$ $\theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ $\theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\omega_m t)$	0,5 0,5
5-1-	$\omega_1 = \omega_0$ $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\alpha^2} = \omega_0 (1 + 2\alpha^2)^{1/2} \approx \omega_0 (1 + \alpha^2)$ puisque le couplage est faible * $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0 (1 + \alpha^2) - \omega_0 = \omega_0 \alpha^2$ * $\omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \frac{\omega_0 (1 + \alpha^2) + \omega_0}{2} \Rightarrow \omega_m = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$	1 1

5-2-



1,5

Les graphiques font apparaître deux durées caractéristiques $T_{0m} = \frac{2\pi}{\omega_{0m}}$ et T_B ; les masses oscillent avec la période T_{0m} . Les amplitudes de leurs oscillations varient lentement suivant la période T_B

1

Il s'agit du phénomène de battements et T_B est appelée période de battements.

0,5

$$T_B = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \alpha^2}$$

5-3-

A l'instant initial, l'énergie mécanique est sous forme énergie potentielle $E_0 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2$ puisque θ_0 est faible. En tenant compte des conditions initiales, cette énergie mécanique est appropriée au premier pendule.

$$E_1(0) = E_0 = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \text{ et } E_2(0) = 0$$

0,5

A l'instant t , les énergies mécaniques relatives aux deux pendules s'écrivent :

$$E_1(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_1^2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos^2(\omega_{0m}t)$$

$$\Rightarrow E_1(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega_0 \alpha^2}{2}t\right) \cos^2\left(\omega_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)$$

1

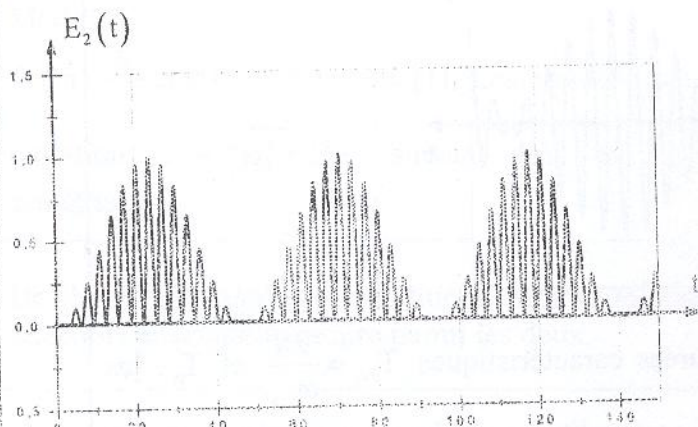
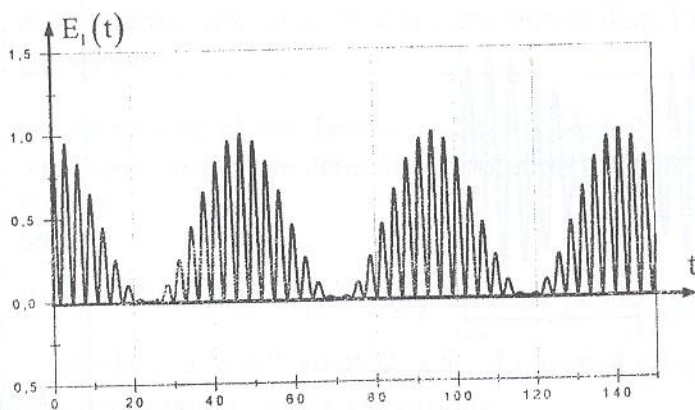
$$\text{et } E_2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_2^2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin^2(\omega_{0m}t)$$

$$\Rightarrow E_2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \sin^2\left(\frac{\omega_0 \alpha^2}{2}t\right) \sin^2\left(\omega_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)$$

1

On choisit l'instant t où l'énergie mécanique est sous forme énergie potentielle.

5-4-



L'énergie mécanique du système couplé est conservative. Au cours du temps, il y a un transfert continu et périodique (T_B) de l'énergie mécanique relative à chaque pendule vers l'autre.

1,5

0,5

5-5-

Lorsque le premier pendule cède totalement son énergie au deuxième $t = \frac{T_B}{2} = n T_{0m}$

$$\frac{T_B}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \alpha^2} \text{ et } T_{0m} = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} \Rightarrow n = \frac{\frac{T_B}{2}}{T_{0m}} = \frac{\pi}{\omega_0 \alpha^2} \frac{\omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\alpha^2}$$

$$\text{Pour } \alpha = 0,05 \Rightarrow n \approx \frac{1}{2\alpha^2} = 200$$

Après 200 oscillations, l'énergie mécanique est transférée vers l'autre pendule.

1,5

Problème I (40 /100)

I- Action d'un champ électrique : Modèle classique

1-	Dans le modèle classique de Drude, un électron mobile est soumis aux forces : $\vec{F}_e = -e\vec{E}$, $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. L'application du principe fondamental de la dynamique amène à l'équation du mouvement d'un électron : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$. Equation différentielle de premier ordre en $\vec{v}(t)$.	0,5 1,5
----	---	----------------

2-	Solution sans second membre : $\vec{v}_1(t) = \vec{K} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ solution particulière : $\vec{v}_p = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0 = -\frac{e\tau}{m} E_0 \vec{e}_z$ la solution globale, en tenant compte de la condition initiale, s'écrit : $\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} E_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \vec{e}_z.$ τ est homogène à une durée caractérisant le régime transitoire et lié à l'effet de frottement.	1 1 0,5
3-	Lorsque t vaut quelques $\tau \Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow 0$, on atteint le régime permanent : $\vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}_\ell = -\frac{e\tau}{m} E_0 \vec{e}_z = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$ La densité de courant de charge $\vec{J} = n_e (-e) \vec{v}_\ell = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \vec{E}_0 = \gamma_0 \vec{E}_0$ loi d'Ohm locale $\gamma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \text{ en } \text{Sm}^{-1}$ A.N : $\tau = \frac{m \gamma_0}{n_e e^2} = 2,457 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ très faible $\Rightarrow$ l'établissement du régime continu est considéré immédiat	1 1 1
4-1-	Le champ exciteur est sinusoïdal : $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}, \text{ la solution particulière est dominante. Elle suit le champ exciteur}$ $\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \exp(-i\omega t), \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = i\omega \vec{v}$ $\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \vec{E}(t).$	2
4-2-	La densité de courant s'écrit : $\vec{J}(t) = n_e (-e) \vec{v}(t) = \frac{n_e e^2}{m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \vec{E}(t)$ $\vec{J}(t) = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \frac{1}{(1 + i\tau\omega)} \vec{E}(t) = \frac{\gamma_0}{(1 + i\tau\omega)} \vec{E}(t) = \underline{\gamma} \vec{E}(t) \Rightarrow \underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{(1 + i\tau\omega)}$ $\underline{\gamma}$ est complexe. Il existe un déphasage entre $\vec{J}$ et $\vec{E}$ En régime continu où $\omega = 0$, $\underline{\gamma}$ s'identifie avec γ_0. $ \underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = 0,99 \gamma_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = 0,99 \Rightarrow \omega = \frac{0,1424}{\tau} = 5,8 \cdot 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$ Pour que $\underline{\gamma} \geq 0,99 \gamma_0 \Rightarrow \omega \leq \omega_\ell = 5,8 \cdot 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$	1 1 1

II- Propagation des ondes électromagnétiques dans les conducteurs

5-	Equations de Maxwell * $\text{div} \vec{E}(M, t) = 0$; le milieu est globalement neutre, il y a conservation de flux de $\vec{E}$.	0,5
----	---	-----

	* $\text{div } \vec{B}(M,t) = 0$; le flux de $\vec{B}$ est conservé, coexistence des pôles magnétiques. * $\overline{\text{rot}} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$; la variation temporelle de $\vec{B}$ constitue une source de $\vec{E}$. * $\overline{\text{rot}} \vec{B}(M,t) = \mu_0 \left(\vec{J}(M,t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \right)$; $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ homogène à un courant représente une source supplémentaire de $\vec{B}$.	0,5
		0,5
		0,5
6-	Dans l'hypothèse $\omega \leq \omega_c \Rightarrow \underline{\gamma} = \gamma \approx \gamma_0$ (cas du cuivre) Pour comparer les densités des courants, on évalue le rapport $\frac{ \underline{J}_D }{ \underline{J}_C } = \frac{\epsilon_0 \omega \underline{E} }{\sigma_0 \underline{E} } = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma_0}$. Il prend une valeur maximale pour $\omega = \omega_c$. $\frac{ \underline{J}_D }{ \underline{J}_C } = \frac{\epsilon_0 \omega_c}{\sigma_0} = 8,85 \cdot 10^{-7} \ll 1 \Rightarrow \underline{J}_D \ll \underline{J}_C$. Dans ce domaine de pulsation, le courant de conduction est dominant.	1
		0,5
7-	$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\overline{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow \Delta \vec{E}(M,t) - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} = \vec{0} (*)$. Elle est différente de celle D'Alembert traduisant la propagation dans le vide dépourvu de charge et de courant. Sa solution décrit une pseudo onde plane dont le nombre d'onde est a priori complexe.	1
		1
8-	En notation complexe, on a : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i\omega t - k z)$ $\Delta \underline{\vec{E}}(M,t) = -k^2 \underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\frac{\partial \underline{\vec{E}}(M,t)}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}}(M,t)$ (*) $\Rightarrow -k^2 \underline{\vec{E}}(M,t) - \mu_0 \gamma_0 i\omega \underline{\vec{E}}(M,t) = \vec{0}$, puisque $\underline{\vec{E}}(M,t) \neq 0 \Rightarrow k^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$. $k^2 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \mu_0 \gamma_0 \omega \Rightarrow k(\omega) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = k_1 - i k_2$ $k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$.	1,5
		1,5
9-	On définit l'indice complexe du milieu conducteur par : $\underline{n} = \frac{k(\omega)}{k_0} = \frac{c}{\omega} (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = (1-i) \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}} = (n_1 - i n_2) \Rightarrow n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}}$	1
10-	$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i\omega t - \underline{k} z) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i\omega t - (k_1 - i k_2) z)$ $\Rightarrow \underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(-k_2 z) \exp(i\omega t - k_1 z)$ $\Rightarrow \vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp(-k_2 z) \cos(\omega t - k_1 z)$ La pseudo onde est plane $\underline{\vec{B}}(M,t) = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}(M,t)}{\omega} = \frac{(k_1 - i k_2) \vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}_0 \exp(-k_2 z) \exp(i\omega t - k_1 z)}{\omega}$	0,5

	$\vec{B}(M,t) = \frac{k_1}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0) \exp(-k_2 z) (\exp(i(\omega t - k_1 z)) - i \exp(i(\omega t - k_1 z)))$ $\vec{B}(M,t) = \frac{k_1}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0) \exp(-k_2 z) (\cos(\omega t - k_1 z) + \sin(\omega t - k_1 z))$ L'amplitude du champ électromagnétique subit une décroissance lors de la propagation dans le milieu conducteur. La propagation de l'onde est dispersive puisque $v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}$ fonction de ω Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas en phase.	1 1 0,5
11-	Puissance volumique cédée au conducteur : $\mathcal{P}_v(z,t) = \vec{j}(z,t) \cdot \vec{E}(z,t) = \gamma_0 E^2(z,t) = \gamma_0 \vec{E}(M,t) = \gamma_0 E_0^2 \exp(-2k_2 z) \cos^2(\omega t - k_1 z)$ $\langle \mathcal{P}_v \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 \exp(-2k_2 z)$ elle décroît exponentiellement lors de la propagation. La diminution du flux d'énergie s'explique par l'interaction entre les charges du métal avec l'onde électromagnétique.	1,5 1

III- Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique sur un conducteur réel

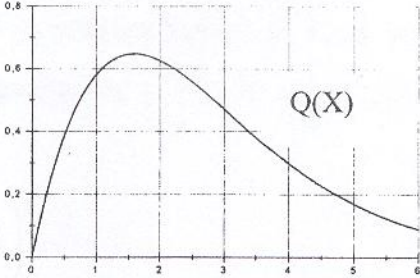
12-	$\vec{k}_i = k_0 \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z ;$ $\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z ;$ $\vec{k} = (k_1 - i k_2) \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \underline{n} \vec{e}_z .$	0,5 0,5 0,5
13-	$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x E_{0i} \exp(i(\omega t - k_0 z))}{c} = \frac{E_{0i}}{c} \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{e}_y$ $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{e}_z) \wedge \vec{e}_x \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t + k_0 z))}{c} = -\frac{1}{c} \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{e}_y$ $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{\left(\frac{\underline{n} \omega}{c} \vec{e}_z\right) \wedge \vec{e}_x \underline{t} E_{0i} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z))}{\omega}$ $\vec{B}_t = \frac{\underline{n}}{c} \underline{t} E_{0i} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{e}_y .$	1 1 1
14-	* Continuité de la composante tangentielle de du champ électrique. $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2(z=0,t) - \vec{E}_1(z=0,t)) = \vec{0} ; \vec{n}_{12} \equiv \vec{e}_z$ $\vec{E}_1(z,t) = \vec{E}_i(z,t) + \vec{E}_r(z,t) ; \vec{E}_2(z,t) = \vec{E}_t(z,t)$ $\vec{e}_z \wedge [\underline{t} E_{0i} \exp(i\omega t) - (E_{0i} \exp(i\omega t) + \underline{r} E_{0i} \exp(i\omega t))] \vec{e}_x = \vec{0}$ $\Rightarrow 1 + \underline{r} = \underline{t}$ * Continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à cause de l'absence du courant surfacique à l'interface $z=0$. $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2(z=0,t) - \vec{B}_1(z=0,t)) = \vec{0}$ $\vec{e}_z \left[\frac{\underline{n}}{c} \underline{t} E_{0i} \exp(i\omega t) - \left(\frac{E_{0i}}{c} \exp(i\omega t) - \frac{1}{c} \underline{r} E_{0i} \exp(i\omega t) \right) \right] \vec{e}_y = 0$ $\Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{n} \underline{t}$	0,5 1 0,5 1

15-	$\begin{cases} 1+r=\underline{t} \\ 1-r=\underline{n} \underline{t} \end{cases} \Rightarrow \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2}{1+\underline{n}} ; \underline{n} = n_1 - i n_2 \Rightarrow \underline{t} = \frac{2}{1+n_1 - i n_2}$ avec $n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega}}$ et $\underline{r} = \underline{t} - 1 = \frac{2 - (1+\underline{n})}{1+\underline{n}} \Rightarrow \underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}} \Rightarrow \underline{r} = \frac{(1-n_1) + i n_2}{(n_1+1) - i n_2}$	1
16-	Dans le cas d'un métal parfait, $\gamma_0 \rightarrow +\infty \Rightarrow n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega}} \rightarrow +\infty$. $\Rightarrow \underline{t} \rightarrow 0$ et $\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \rightarrow -1 \Rightarrow E_{0r} = -E_{0i}$ l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente. L'épaisseur de peau $\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ tend vers 0, la densité volumique de courant est partout nulle sauf au voisinage de l'interface. Elle est modélisée par une densité superficielle de courant $\vec{j}_s$.	0,5 1,5 0,5

Problème 2 (35/100)

I- Propulsion d'une fusée

1-	A l'instant t, la masse du système fermé s'identifie avec celle du système ouvert : $m^*(t) = m(t)$ A l'instant $t + dt$, $m^*(t + dt) = m(t + dt) + \delta m$ $m^*(t + dt) - m^*(t) = m(t + dt) - m(t) + \delta m \Rightarrow dm^*(t) = dm(t) + \delta m = 0$ puisque la masse est une grandeur conservative : $\frac{dm^*}{dt} = \frac{Dm}{Dt} = 0$ $\Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = -\frac{\delta m}{dt} = -\frac{\delta m_{\text{sortante}}}{dt} = -q_m < 0$	1,5 1
2-	Considérons le système constitué à l'instant t par la fusée de masse m et de vitesse $\vec{V}$ A l'instant $t + dt$ la fusée de masse $m(t + dt) = m(t) + dm = m(t) - q_m dt$ et de vitesse $\vec{V} + d\vec{V}$ et des gaz éjectés pendant dt sont de masse $-dm = q_m dt$ et de vitesse $\vec{V} + \vec{u}$. A l'instant t, la quantité de mouvement du système fermé $\Sigma^*(t)$ est : $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) = m(t) \vec{V}(t)$ A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé $\Sigma^*(t + dt)$ s'écrit : $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt))$ $= m(t + dt) \vec{V}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt))$ et $\vec{V}(t + dt) = \vec{V}(t) + d\vec{V}$ $\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)$ $= m(t + dt) \vec{V}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt)) - m(t) \vec{V}(t)$	1 1 1

3-	Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système fermé Σ^* s'écrit : $\frac{d\vec{p}^f}{dt} = \frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{(m(t)+dm)(\vec{V}(t)+d\vec{V}) - dm(\vec{V}(t)+\vec{u}) - m(t)\vec{V}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = m(t)\vec{g}$ En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentielles, qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentielles, on obtient : $\frac{d\vec{p}^f}{dt} = m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u} = m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} + q_m\vec{u} = m(t)\vec{g}$ Lorsque la fusée est traitée comme système ouvert, le théorème de la quantité de mouvement écrit : $m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = m(t)\vec{g} + \vec{T} \text{ où } \vec{T} = \frac{dm}{dt}\vec{u} = -q_m\vec{u}$	1,5 1
4-	$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt} \Rightarrow d\vec{V}(t) = \vec{u} \frac{dm}{m}$ $\Rightarrow \vec{V}_f - \vec{V}_i = \vec{u} \int_{m_i}^{m_f} \frac{1}{m} dm = \vec{u} \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$	0,5 1
5-	Par définition, on a : $Q = \frac{\frac{1}{2}m_f V_f^2}{\frac{1}{2}m_e u^2}$ $V_f = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \Rightarrow m_e = m_i - m_f = m_f \left[\exp\left(\frac{V_f}{u}\right) - 1 \right]$ $Q = \frac{x^2}{\exp(x)-1} \text{ où } x = \frac{V_f}{u}$ $Q(x)$ est une fonction positive de la variable x positive ; si $x \rightarrow 0$, $Q(x) \approx x \rightarrow 0$; si $x \rightarrow \infty$, $Q(x) \rightarrow 0$; donc $Q(x)$ présente un maximum pour une valeur de x strictement positive.  La courbe représentée montre que $Q(x)$ est toujours inférieur à 1 et qu'il passe par un maximum pour $x = 1,5936$, ce qui traduit que, quand x est de l'ordre de 1, il y a moins d'énergie cinétique perdue.	0,5 1 1
6-	$T \approx 2mg = q_m u \Rightarrow q_m = \frac{2 \times 2.10^6 \times 10}{4.10^3} = 10^4 \text{ kg/s},$ ce qui représente un débit considérable.	1 0,5
7-	Sous réserve que le débit des gaz soit constant et suffisant pour que la poussée soit supérieure au poids : $\frac{dm}{dt} = -q_m \Rightarrow m(t) = m(0) - q_m t$ $m \frac{dV}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt} \Rightarrow dV = -g dt - u \frac{dm}{m}$ $V(t) = -gt - u \ln\left[\frac{m(t)}{m(0)}\right] = -gt - u \ln\left[1 - \frac{q_m t}{m(0)}\right]$	0,5 1,5

	$z(t) = \int V(t) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \ln(m(0)) - u \int \ln(m) dt$ $\int \ln(m) dt = -\frac{1}{q_m} \int \ln(m) dm = -\frac{1}{q_m} [m \ln(m) - m]_{m(0)}^{m(0)-q_m t}$ $= -\frac{1}{q_m} [(m(0)-q_m t) \ln(m(0)-q_m t) - m(0) \ln(m(0)) - q_m t]$ $\int \ln(m) dt = -\frac{m(0)}{q_m} \ln \left[1 - \frac{q_m t}{m(0)} \right] + t [1 + \ln(m(0)-q_m t)]$ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \left[1 - \ln \left(\frac{1-q_m t}{m(0)} \right) \right] + u \frac{m(0)}{q_m} \ln \left(\frac{1-q_m t}{m(0)} \right)$ $\Rightarrow z(t) = ut - \frac{1}{2}gt^2 + u \left[\frac{m(0)}{q_m} - t \right] \ln \left(1 - \frac{q_m t}{m(0)} \right)$	1
8-	$dE_p = m g(r) dr = \frac{m g_0 R_T^2}{r^2} dr$ $\Rightarrow \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{g_0 R_T^2}{r} \Rightarrow \frac{E_p(r=R_T)}{m} = -g_0 R_T = 6,4 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$	0,5 1,5
9-	L'énergie nécessaire est le triple de l'énergie massique produite par un combustible. Comme en outre le rendement Q est inférieur à 1, il faut une quantité de combustible très supérieure à la masse qu'on veut faire échapper au champ gravitationnel terrestre.	1,5

II- Mouvement d'un satellite

10-	Il faut que la durée de l'expérience soit faible par rapport à la période de révolution de la Terre pour puisse considérer que l'origine est animée d'un mouvement rectiligne uniforme	1
11-	la trajectoire est circulaire $r = R_T + z = C^{te}$; $\overrightarrow{OP} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(P) = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\Rightarrow \vec{a}(P) = \frac{d\vec{v}(P)}{dt} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R_T + z} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$	0,5 1,5
12-	Le théorème du moment cinétique par rapport au point O $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} / R_g = \sum \vec{M}_{O, \vec{F}_{ext}} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OP} \wedge m \vec{v}_{/R}(P) = \vec{C}^{te}$ $\Rightarrow$ le moment cinétique reste toujours orthogonal au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{v}_{/R}(P)$, constituant ainsi le plan de mouvement du satellite autour de la Terre.	1,5 0,5
13-	Principe fondamental de la dynamique : $m \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum \vec{F}_{ext} = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r$ $\Rightarrow m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r \text{ en projetant suivant les directions normale et tangentielle, on obtient : } \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{m v^2}{r} = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = C^{te} = v_0 \\ v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}} \end{cases}$ $\Rightarrow v = v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}}$; le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme.	0,5 1 1

	A la surface de la terre, on peut assimiler la force du poids à celle de gravitation : $m g_0 \approx \frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T^2} \Rightarrow \mathcal{G} M_T \approx g_0 R_T^2 \text{ et on a : } v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}} \text{ en ms}^{-1}$ AN : $v_0 = 6,37 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{10}{(6,37 + 0,832) \cdot 10^6}} = 7,50 \text{ km s}^{-1}$	0,5
14-	Il s'agit d'un système soumis à une force conservative, son énergie mécanique se conserve. $E_m = C^{te} = E_c + E_p$.	1
15-1-	Le satellite n'est soumis qu'à la force conservative de gravitation, elle dérive d'une énergie potentielle $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$; $E_p(P) = E_p(r)$ $\vec{F} d\vec{r} = -\overrightarrow{\text{grad}} d\vec{r} = -dE_p \Rightarrow dE_p = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} dr \Rightarrow \int_{r}^{+\infty} dE_p = \int_{r}^{+\infty} \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} dr$ $E_p(+\infty) - E_p(r) = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r}, \text{ enfin } E_p(r) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r}$	0,5 1,5
15-2-	$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G} M_T}{r}$ et $E_p(r) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r} \Rightarrow E_m = -\frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G} M_T}{r}$. Remarque : Lorsqu'il s'exercent des forces de frottements sur le satellite, le théorème d'énergie mécanique s'écrit : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{n.c}) = \vec{f}_{n.c} \cdot \vec{v}_{/R_g} < 0$. Au cours du temps, l'énergie mécanique diminue ; le rayon de la trajectoire devient plus faible.	2
16-	Lorsque le satellite est immobile à une position de la surface de la Terre de latitude λ, son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ se compose de : * l'énergie cinétique d'un point matériel P en rotation autour de l'axe de la Terre suivant un rayon $\rho = R_T \cos \lambda$ à la vitesse angulaire $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$: $E_c = \frac{1}{2} m v_{/R_g}^2(P)$; $\vec{v}_{/R_g}(P) = \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{OP} = \omega_T R_T \cos \lambda \vec{e}_\phi \Rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} m (\omega_T R_T \cos \lambda)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2$ * l'énergie potentielle gravitationnelle inversement proportionnelle à la distance entre le satellite et le centre de la force ($r = OP = R_T$) : $E_p = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T}$. $\text{D'où : } E_m = C^{te} = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T} + \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2$ On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque $\lambda = 0$, c'est-à-dire sur l'équateur. Puisque l'énergie potentielle ne dépend pas de latitude, l'énergie mécanique préférée correspond à une énergie cinétique maximale dans le référentiel géocentrique due à la rotation de la Terre : $E_{c \max} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2$. Pour lancer un satellite, on exploite l'énergie cinétique de rotation de la Terre qui est maximale au niveau de l'équateur. Pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale, il faut envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre c'est-à-dire vers l'est.	1 1