



Concours Physique Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 11 Juin 2015 Heure : 8 H Durée : 4 H Nbre pages : 08

Barème : Problème 1: A : 8 pts, B : 5 pts, C : 2 pts ; Problème 2: 5 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données numériques

Masse de l'électron	$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Formulaires

- La force gravitationnelle qui s'exerce entre deux corps A et B distants de d s'écrit :

$$\|\vec{F}_{A/B}\| = G \frac{m_A m_B}{d^2} \text{ où } G \text{ est la constante universelle de gravitation.}$$

$$-\text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

Problème 1

Interactions des ondes électromagnétiques avec la matière

A- Réflexion, transmission

I- On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω , se propageant dans l'air assimilé au vide. Cette onde arrive sous incidence normale sur un conducteur parfait placé en $z > 0$ (Figure 1). Le champ électrique associé à cette onde incidente s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

E_0 et k sont deux constantes positives.

I-1- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i$ de cette onde.

I-2- Déterminer $\langle \mu_{em,i} \rangle$, la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique.

I-3- Déterminer $\langle \vec{R} \rangle$, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. Montrer

que ce vecteur est analogue à celui utilisé pour décrire le mouvement de charges dans le conducteur. Donner alors sa signification physique.

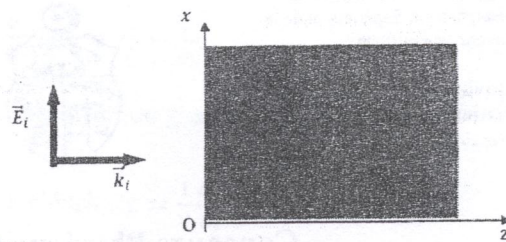


Figure 1

I-4- Que vaut le champ électromagnétique à l'intérieur de ce conducteur ? Justifier.

I-5- Une onde réfléchie naît dans la région $z < 0$, décrire le phénomène physique responsable de l'apparition de cette onde.

I-6- Que vaut la densité de charge surfacique σ sur l'interface air/conducteur ? Justifier.

I-7- Déterminer le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ qui apparaît sur l'interface air/conducteur. Commenter sa direction par rapport à la direction du champ électrique incident.

I-8- On étudie maintenant, la force exercée par ce courant sur un élément de surface dS de l'interface $z=0$. Cette force peut s'écrire en notation réelle sous la forme suivante :

$$d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}_{s-ds}(z = 0^-)$$

$\vec{B}_{s-ds}(z = 0^-)$ est le champ magnétique créé par toute la distribution de courant sauf celle due à l'élément dS . Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle d\vec{F} \rangle$ en fonction de E_0 , ϵ_0 et dS .

I-9- En déduire que la pression moyenne exercée sur l'élément de surface dS , appelée pression de radiation, s'écrit sous la forme :

$$p = \frac{\| \langle d\vec{F} \rangle \|}{dS} = 2 \langle \mu_{em,i} \rangle$$

I-10- L'onde incidente est un faisceau laser de puissance moyenne 4 mW et de section égale à $0,35 \text{ mm}^2$, calculer la valeur numérique de la pression de radiation. Commenter

II- Dans cette partie, on traite une application de la pression de radiation liée à l'orientation de la queue des comètes. Celles ci sont des petits corps du système solaire de quelques kilomètres de diamètre en orbite autour des étoiles. A l'approche du soleil, ils se forment des particules de poussière, le tout formant ce que l'on appelle la queue de la comète (Figure 2).

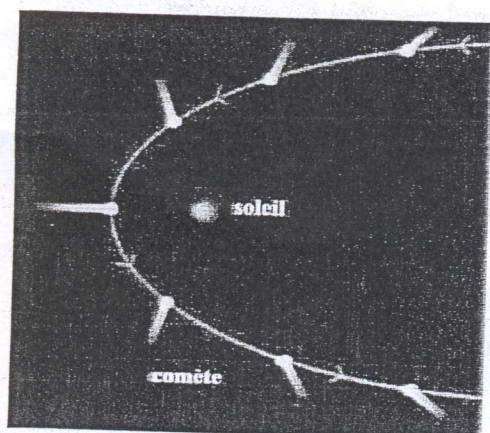


Figure 2

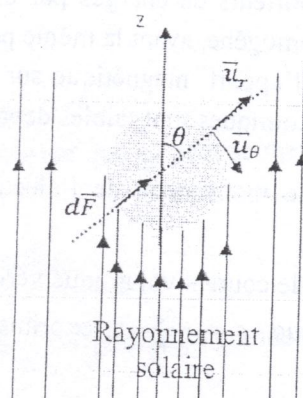


Figure 3

Une particule de poussière s'apparente à un grain sphérique conducteur parfait de rayon a et de masse volumique ρ (Figure 3). Cette dernière est soumise à l'attraction gravitationnelle solaire et à une force répulsive due à la pression de radiation.

On admettra l'expression suivante de la pression de radiation d'une onde électromagnétique plane, qui frappe sous l'angle d'incidence θ par rapport à la normale à la surface du grain :

$$p = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta$$

E_0 est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente.

II-11- Exprimez la force $\langle d\vec{F} \rangle$ exercée par le rayonnement solaire sur un élément de surface du grain en fonction de ϵ_0 , E_0 , θ , a et $\vec{u}_r$.

II-12- En déduire que la force $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme :

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle \|\vec{R}\| \rangle > \frac{\pi a^2}{c} \vec{u}_z. \quad \text{On donne} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4}$$

II-13- Montrer que si la force due à la pression de radiation l'emporte sur la force d'interaction gravitationnelle exercée par le soleil, alors le rayon limite a_0 d'un grain de poussière vérifie la relation suivante :

$$a_0 = \frac{3P}{16\pi c G \rho M_S}$$

M_S est la masse du soleil et P est la puissance moyenne rayonnée par le soleil.

II-14- Comment peut-on expliquer que les grains ne s'échappent pas de la comète ?

III- Dans cette partie, on étudie l'interaction de l'onde électromagnétique avec le milieu qui n'est plus un conducteur parfait mais désormais un conducteur métallique réel. Sous l'effet d'un champ électrique de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$, un électron (charge $-e$, masse m) de ce conducteur acquiert un mouvement caractérisé par une vitesse de dérive notée $\vec{v}$. Dans le cadre du modèle de Drude, l'ensemble des collisions aléatoires que subissent les charges du conducteur est modélisé par une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est une constante homogène à un temps.

On note N le nombre de porteurs de charges par unité de volume. Le métal est considéré comme un milieu neutre, homogène, ayant la même permittivité et la même perméabilité que celles du vide. On néglige l'apport magnétique sur les forces exercées sur l'électron, et on admet que les dimensions atomiques sont faibles devant la longueur d'onde.

III-15- Ecrire l'équation de mouvement de l'électron et déterminer l'expression de $\vec{v}$ en fonction de m , τ , e , ω et $\vec{E}$.

III-16- Le vecteur densité de courant volumique vérifie la loi d'Ohm locale. Il s'écrit sous la forme : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Déduire que $\sigma = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$ et exprimer σ_0 en fonction de N , e , m et τ . Que représente σ_0 ?

Le métal occupe toujours le demi-espace $z > 0$. Le champ électrique de l'onde électromagnétique dans ce milieu est de la forme : $\vec{E} = \underline{f}(z)e^{i\omega t}\vec{u}_x$.

III-17- Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu.

III-18- En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique.

III-19- On pose $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$. Montrer que $\underline{f}(z)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2} + \underline{n}^2 \underline{f}(z) = 0 \quad \text{où} \quad \underline{n}^2 = 1 - i \frac{\tau \omega_p^2}{\omega(1+i\omega\tau)}$$

III-20- On pose $\underline{n} = n' - in''$, et on suppose que n' et n'' sont positifs. Déterminer l'expression du champ électrique qui se propage dans le sens des z croissants. On donne $E_0 = \underline{f}(z=0)$.

III-21- Déterminer la vitesse de phase de cette onde. Le milieu est-il dispersif ? Justifier.

III-22- Déterminer le champ magnétique associé à cette onde. En déduire la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde.

III-23- Exprimer la puissance moyenne qui traverse une section S perpendiculaire à (Oz) sous la forme : $P(z) = P_0 e^{-\alpha z}$ où P_0 est une constante à exprimer en fonction de n' , S , E_0 , c et ϵ_0 . Que représente α ? Donner son expression en fonction de n'' , ω et c .

B- Transparence d'un conducteur dans l'ultraviolet

On se propose de déterminer l'expression de la permittivité diélectrique d'un métal linéaire, homogène et isotrope à l'aide du modèle de Drude.

On note $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$ le vecteur déplacement d'un électron induit par le champ électrique appliqué au métal. Ce champ est de la forme : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$.

IV-24- Ecrire l'équation de mouvement d'un électron, en déduire l'expression du vecteur déplacement $\vec{r}(t)$. On introduira une force de frottement fluide de type $-\gamma m \frac{d\vec{r}}{dt}$ où $\gamma = \frac{1}{\tau}$ est un coefficient positif et on négligera la force magnétique exercée sur l'électron.

IV-25- Ecrire l'expression du vecteur polarisation $\vec{P}(t)$ en fonction du nombre N d'électrons par unité de volume, de la charge de l'électron et du vecteur déplacement $\vec{r}(t)$.

IV-26- Montrer que la permittivité diélectrique relative $\underline{\epsilon}_r$ du milieu métallique s'écrit sous la forme :

$$\underline{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega}$$

Déduire alors l'expression de ϵ'_r et ϵ''_r , sachant que $\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_r - i\epsilon''_r$.

IV-27- Pour les ondes de pulsation ω telle que $\omega \gg \gamma$, montrer que $\underline{\epsilon}_r$ peut se mettre sous la

forme :

$$\underline{\epsilon}_r \approx \epsilon'_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Dans toute la suite on considère que cette condition est vérifiée.

IV-28- Représenter graphiquement l'allure de ϵ'_r en fonction de $\frac{1}{\omega^2}$. Quelle grandeur physique peut-on déterminer à partir de ce graphe ?

IV-29- Mettre la densité de courant totale dans le conducteur sous la forme : $\vec{j}_T = \epsilon_0 \underline{\epsilon}_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On exprimera $\underline{\epsilon}_r$ en fonction de $\underline{\sigma}$, ω et ϵ_0 puis en fonction ω_p et ω .

On suppose que le champ électrique appliqué au métal (occupant le demi-espace $z > 0$) s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x.$$

IV-30- Montrer à partir des équations de Maxwell que le champ électromagnétique vérifie l'équation d'onde :

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E} = \vec{0} \quad \text{où} \quad \epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

IV-31- Exprimer la relation de dispersion en fonction de ω , c et n . Représenter le graphe k en fonction de ω . On rappelle que l'indice de réfraction d'un milieu s'écrit : $\epsilon_r = n^2$.

IV-32- En déduire que le métal se comporte comme un miroir pour $\omega < \omega_p$ et qu'il est transparent pour $\omega > \omega_p$.

IV-33- L'argent cristallise dans un système cubique à faces centrées de paramètre de maille $a = 0.412 \text{ nm}$. Montrer que le nombre d'atomes par unité de volume est $\frac{4}{a^3}$. En déduire le nombre d'électrons N par unité de volume sachant qu'un atome d'argent comporte un seul électron mobile.

IV-34- Calculer numériquement la valeur de la pulsation plasma ω_p pour l'argent. En déduire la longueur d'onde λ_p correspondante. A quel domaine spectral d'ondes électromagnétiques cette valeur correspond-elle ?

IV-35- On rappelle que le coefficient de réflexion en énergie R sous incidence normale lorsqu'on passe d'un milieu d'indice n_1 (l'air) à un milieu d'indice n_2 (le métal) s'écrit :

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \text{ L'air étant assimilable au vide, calculer } R \text{ lorsque } \omega = \omega_p \text{ et lorsque } \omega \gg \omega_p.$$

Expliquer pourquoi l'argent massif n'est pas coloré.

C- Superposition de deux ondes électromagnétiques

Au cours de leur propagation entre un émetteur et un récepteur, les ondes électromagnétiques peuvent être réfléchies ou diffractées par des obstacles. C'est un phénomène assez général qui peut altérer le signal électromagnétique utile.

Le dispositif de la figure 4 est constitué d'une source supposée ponctuelle et monochromatique (E), d'un récepteur (R) et d'un miroir. Le miroir utilisé est une plaque métallique (supposé un conducteur parfait).

On a donc deux trajets distincts : un chemin direct et un autre indirect après réflexion.

Notons e_d (respectivement e_i) la distance parcourue par le rayon lumineux suivant le trajet direct (respectivement suivant le trajet indirect). Les deux ondes électromagnétiques sont polarisées rectilignement suivant la même direction. On rappelle que la réflexion sur un conducteur parfait introduit un déphasage de π .

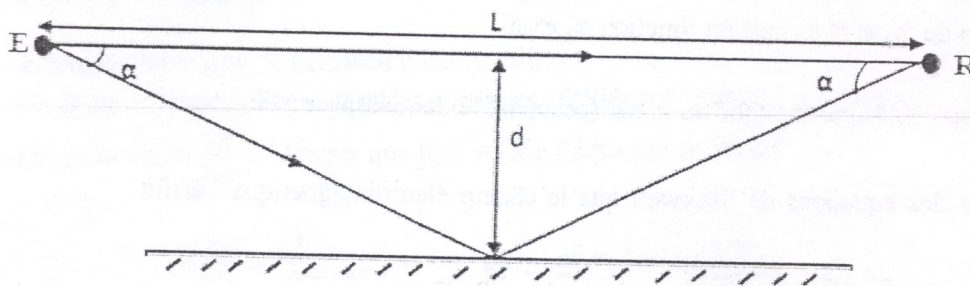


Figure 4

V-36- Figurer sur un schéma la source (émetteur) fictive du système.

V-37- Donner les expressions de e_d et e_i en fonction de d et L .

V-38- En supposant $d \ll L$, donner une expression approchée de e_i . En déduire la différence de marche géométrique $\delta_{\text{géo}} = e_i - e_d$.

V-39- Soient I_d l'intensité de l'onde issue du chemin direct et I_i celle obtenue après réflexion. Donner l'expression de l'intensité $I(d)$ de l'onde reçue au niveau du récepteur. Tracer cette intensité en fonction de d^2 .

V-40- Quelle est la condition sur I_i et I_d permettant d'aboutir à un contraste maximal ? Justifier.

V-41- La condition précédente étant vérifiée, pour quelles valeurs de d le récepteur reçoit-il le triple de l'intensité I_d de l'onde issue du chemin direct ? On donne $L = 1\text{ m}$ et $\lambda = 3\text{ cm}$.

Problème 2 : Ondes acoustiques longitudinales dans un métal

Un métal est modélisé par un réseau parallélépipédique d'atomes de masse m dont les liaisons sont représentées par des ressorts. Ces atomes sont disposés aux nœuds de ce réseau. Les plans atomiques peuvent se déplacer en bloc sous l'effet d'une perturbation. On s'intéresse à une chaîne d'atomes dans la direction Ox (Figure 5). Les actions de la pesanteur et des forces de frottement sont négligées devant les forces de rappel mises en jeu. Les

ressorts parallèles à Ox ont tous une raideur α et une longueur au repos a et on note $u_n(t)$ le déplacement à l'instant t de l'atome de rang n autour de sa position d'équilibre ($u_n(t) \ll a$).

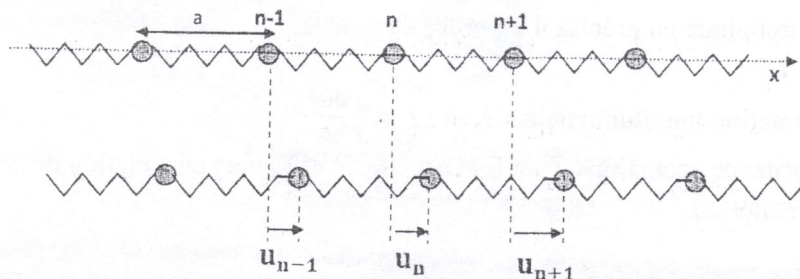


Figure 5

VI-42- Montrer que l'équation du mouvement de l'atome de rang n s'écrit :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

VI-43- À quelle condition sur ω et k , une onde du type $u_n(t) = Ae^{i(\omega t - kna)}$ peut-elle se propager le long du métal ? On posera $\omega_0^2 = \frac{\alpha}{m}$.

VI-44- Quelle raison nous permet de considérer que l'amplitude A ne dépend pas de la position de l'atome de rang n ?

VI-45- Représenter et commenter le graphe ω en fonction de k . Préciser pourquoi on peut restreindre l'étude de $\omega(k)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$

VI-46- Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de cette onde.

VI-47- Déterminer ces vitesses pour des longueurs d'onde $\lambda \gg a$. Commenter.

En utilisant l'approximation de milieu continu, il est possible d'écrire :

$$u_n(t) = u(x = na, t), \quad u_{n-1}(t) = u(x = na - a, t), \quad u_{n+1}(t) = u(x = na + a, t)$$

VI-48- Montrer que le déplacement $u(x, t)$ satisfait à l'équation de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Exprimer alors la vitesse de propagation V de l'onde en fonction de m , α et a .

On peut relier les paramètres microscopiques de l'oscillateur élémentaire (m, α) aux paramètres macroscopiques de l'onde acoustique en se plaçant à l'échelle mésoscopique. Cette onde est caractérisée par sa vitesse de propagation et par son impédance acoustique Z , définie comme le rapport entre l'amplitude de la pression acoustique p et l'amplitude de la vitesse de déplacement. En notant ε la déformation longitudinale et Y le module d'Young, la loi de Hooke en élasticité permet de relier p et ε par:

$$p = Y\varepsilon \quad \text{avec} \quad Y = \frac{\alpha}{a} \quad \text{et} \quad \varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

VI-49- Situer l'échelle mésoscopique en précisant un ordre de grandeur.

VI-50- Quelle est l'unité de Y ?

VI-51- Montrer que la déformation longitudinale ε s'écrit : $\varepsilon = \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t}$

VI-52- Exprimer alors l'impédance acoustique Z en fonction de Y et V, puis en fonction de V et ρ la masse volumique du matériau.

VI-53- On considère une tranche du matériau d'épaisseur au repos dx , de surface dS et de masse $\rho dS dx$ (Figure 6).

Etablir l'équation d'onde vérifiée par le déplacement $u(x, t)$. Exprimer la vitesse de propagation en fonction de Y et ρ .

Application numérique : calculer Y pour $\rho = 8\,920 \text{ Kg m}^{-3}$ et $V = 4600 \text{ ms}^{-1}$.

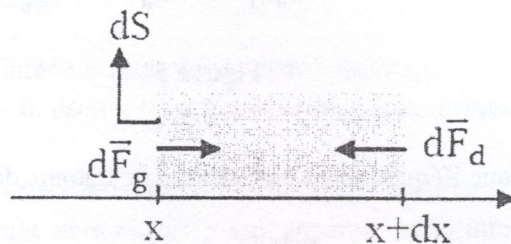


Figure 6

Fin de l'épreuve