



Concours Physique et Chimie Épreuve de Mathématiques

Date: Jeudi 26 Mai 2016 Heure : 8 H Durée: 4 heures Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

EXERCICE

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On dit qu'une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, chaque terme $m_{i,j}(k)$ de M_k converge vers le terme $m_{i,j}$ de M .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $M^p = \begin{cases} \underbrace{M.M.M \dots M}_{p \text{ fois}}, & \text{si } p \geq 1, \\ I_n, & \text{si } p = 0. \end{cases}$

1. Soient U, V deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $U = QVQ^{-1}$.

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^p = QV^pQ^{-1}$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de M pour que la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On pose : $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $N = T - \alpha I_2$.

(a) Calculer N^2 .

(b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $T^p = \alpha^p I_2 + p\alpha^{p-1}N$.

(c) Montrer que la suite $(T^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $T = I_2$ ou $|\alpha| < 1$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

(a) Montrer que M admet une valeur propre double α_0 dans $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que l'on précisera.

(c) Montrer que la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|\alpha_0| < 1$. En cas de convergence, préciser la limite de cette suite.

5. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. On pose : $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer A^p , pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- (b) Etudier la convergence de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

PROBLÈME

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes sur $\mathbb{R}$.
- Pour une fonction f de classe C^p sur $\mathbb{R}$, on pose : $f^{(0)} = f$ et, si $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p)}$ est la dérivée p -ième de f .
- On rappelle que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini et sa somme est la fonction $x \mapsto \exp(x)$.
- On désigne par Φ et H_k ($k \in \mathbb{N}$) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \text{ et } H_k(x) = (-1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x)}{\Phi(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Partie I

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi_t(x) = \Phi(t-x)$ et $G_t(x) = \exp(2tx - x^2)$.

- (a) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \exp(2tx)$ et $x \mapsto \exp(-x^2)$ en $x = 0$, ainsi que la valeur de leurs rayons de convergence.
- (b) Montrer que Ψ_t est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Psi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t).$$

- (c) Établir que Ψ_t est développable en série entière en $x = 0$ avec un rayon de convergence infini.
- (d) Montrer que Ψ_t est égale à sa série de Taylor en 0.
- (e) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k = G_t(x). \quad (1)$$

- (f) Montrer que l'on peut dériver terme à terme par rapport à x la relation (1).
- (g) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k = 2(t-x)G_t(x). \quad (2)$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Calculer $H_0(t)$ et $H_1(t)$.
- (b) Montrer, en utilisant les relations (1) et (2) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t).$$

- (c) Prouver, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que H_k est une fonction polynomiale réelle de degré k et de coefficient dominant 2^k .

Partie II

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi^{(k)}(x)P(x) = o\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \Phi^{(k)}(x)P(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k-1)}(t)P'(t)dt$.

2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k)}(t)dt$.

(b) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

i. Justifier l'existence de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt$.

ii. Montrer, en utilisant (a) de cette question que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(t)\Phi(t)dt.$$

(c) En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 2^n n!, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h_n(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Calculer, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)h_m(t)dt$.

4. On note E l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$.

(b) En déduire que, pour tout $(f, g) \in E^2$, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

5. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E .

6. (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $x \mapsto h_0(x)P(x)$ est dans E .

(b) Donner une famille orthonormale de E pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Partie III

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_0(t) \exp(itx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\tilde{h}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t) \exp(itx) dt.$$

- (b) Montrer que $\tilde{h}_0$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
- (a) Montrer que $\tilde{h}_0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $\tilde{h}_0'(x)$ sous forme d'une intégrale.
(b) Montrer que $\tilde{h}_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' + xy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(On pourra faire une intégration par parties).

- (c) En déduire que : $\tilde{h}_0 = h_0$.

Partie IV

Pour $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, on pose : $u_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - 2n\pi)^2\right)$.

Lorsque $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}(x)$ sont convergentes, on dit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x)$ est définie et on pose :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(x).$$

- (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ et $u_n'(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.
(b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les séries $\sum_{|n| \geq n_0} u_n$ et $\sum_{|n| \geq n_0} u_n'$ soient normalement convergentes sur tout segment de $\mathbb{R}$.
(c) En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que la somme U de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que U est 2π -périodique.

- On note c_p le coefficient de Fourier complexe de U défini par :

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \exp(-ipt) dt, \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_0(p)$.
(b) Montrer que la série de Fourier complexe de U converge normalement vers U sur $\mathbb{R}$.
(c) **En déduire la formule sommatoire de Poisson :**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2n^2\pi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{2}\right).$$