



Concours Physique et Chimie Epreuve de Physique

Date : Lundi 30 Mai 2016 **Heure :** 8 H **Durée :** 4 H **Nb pages :** 07
Barème : Problème 1 : 12 points ; Problème 2 : 8 points

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données numériques

Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Formulaires

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \cdot \vec{v} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

On donne en coordonnées cylindriques.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (A_z)}{\partial z} ; \quad \Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

Problème 1

A. Réfraction de l'atmosphère

L'atmosphère terrestre est considérée comme un système optique modifiant les trajectoires des rayons lumineux. L'indice de réfraction de ce système dépend de la température et de la pression ; lesquelles varient de façon continue avec l'altitude.

Pour étudier le phénomène de la réfraction atmosphérique, on modélise l'atmosphère par un empilement de couches superposées horizontalement et caractérisées par un indice de réfraction n décroissant avec l'altitude. A très haute altitude l'indice est égal à 1, et au niveau du sol l'indice vaut $n_0 = 1,00029$. (Figure 1)

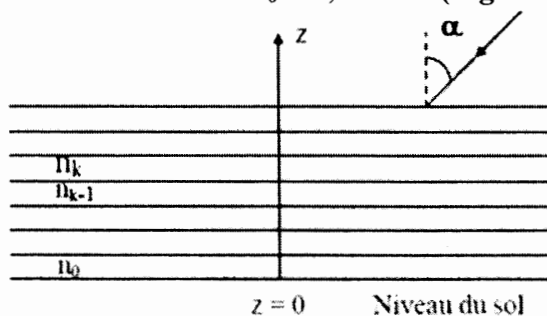


Figure 1

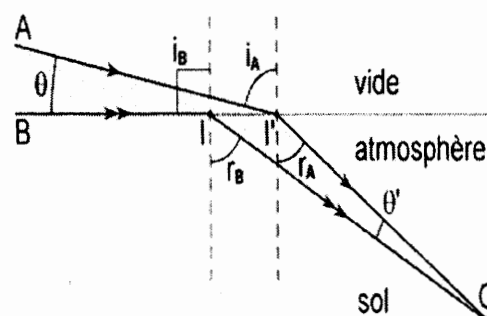


Figure 2

1. Ecrire la loi de Snell-Descartes pour la réfraction à l'interface de deux milieux transparents (1) et (2) d'indices respectifs n_1 et n_2 . Représenter la marche d'un rayon lumineux ayant subi la réfraction pour $n_2 > n_1$.
2. Soient n_{k-1} et n_k les indices de réfraction respectifs des couches $k-1$ et k , et α_k et α_{k-1} les angles d'incidence et de réfraction à l'interface de ces couches. Donner la relation entre α_k et α_{k-1} . En déduire la relation entre l'angle α à très haute altitude et α_0 l'angle d'incidence au niveau du sol.
3. Tracer la marche du rayon lumineux pour un système formé de trois couches successives.
4. Soit $\varepsilon = \alpha - \alpha_0$ la différence entre les angles α et α_0 , cette différence étant très faible, déterminer alors l'expression de ε en fonction n_0 et α_0 . Calculer ε pour $\alpha_0 = 10^\circ$.
5. Le diamètre angulaire apparent AB du soleil hors atmosphère est $\theta = 0,533^\circ$ (Figure 2). Au coucher de soleil, les rayons rasants issus de la base B du soleil arrivent sur la haute atmosphère avec un angle d'incidence $i_B = \pi/2$. Les rayons issus du sommet A du soleil arrivent avec un angle $i_A = \frac{\pi}{2} - \theta$.

En appliquant la loi de Snell-Descartes aux rayons issus de A et B, déterminer le diamètre angulaire θ' apparent du soleil pour un observateur terrestre. Pourquoi au coucher, le soleil apparaît aplati?

B. Rayonnement dipolaire dans l'atmosphère

Le soleil rayonne un champ électromagnétique interagissant avec les molécules constituant l'atmosphère, ces molécules excitées par ce champ se comportent ainsi comme des dipôles électriques oscillants (Figure 3). On se propose d'étudier le champ créé par un de ces dipôles de moment dipolaire :

$$\vec{p} = p_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z \quad \text{où } i \text{ est le nombre complexe tel que } i^2 = -1.$$

Le champ électrique rayonné par ce dipôle en un point M défini par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) est donné par :

$$\vec{E} = \frac{2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} + \frac{\dot{\vec{p}}r}{c} \right) \vec{u}_r + \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} + \frac{\dot{\vec{p}}r}{c} + \frac{\ddot{\vec{p}}r^2}{c^2} \right) \vec{u}_\theta$$

Où $\dot{\vec{p}}$ et $\ddot{\vec{p}}$ sont respectivement les dérivées première et seconde par rapport au temps du

moment dipolaire à l'instant $t - \frac{r}{c}$.

6. Définir les termes suivants : (i) approximation dipolaire, (ii) zone de rayonnement. Donner la dimension de p_0 .
7. Dans la suite de cette partie, on se place dans la zone de rayonnement. Montrer qu'en notation réelle ce champ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E} \approx -\frac{p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{u}_\theta$$

8. Dans cette zone l'onde est localement plane, déterminer le champ magnétique de cette onde. En déduire la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ associé à ce rayonnement.
9. Montrer que la puissance moyenne rayonnée dans l'espace par le dipôle est:

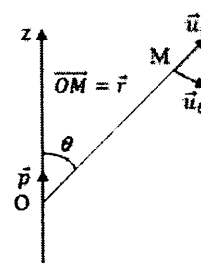


Figure 3

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

$$\text{On donne : } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

C. Diffusion Rayleigh de la lumière

La diffusion est interprétée à l'aide du modèle de l'électron *élastiquement lié* dans lequel un électron de vecteur position $\vec{r}$ d'une molécule de l'atmosphère de charge $q = -e$, de masse m , est soumis au champ électromagnétique rayonné par le soleil, à une force élastique $-m\omega_0^2 \vec{r}$ et à une force de frottement visqueux $-\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$.

10. Que représentent les constantes ω_0 et τ ?
11. Etablir l'expression complexe du vecteur position $\vec{r}$, en déduire l'amplitude p_0 du moment dipolaire.
12. On considère le cas où $\omega \ll \omega_0$ et $\frac{1}{\tau} \ll \omega_0$. Montrer que la puissance moyenne rayonnée est proportionnelle à $(\frac{\lambda_0}{\lambda})^4$. Expliquer la couleur bleu du ciel en plein jour. Ce modèle permet-il d'expliquer la couleur du ciel au coucher ? Justifier.
13. L'éclipse lunaire est une éclipse se produisant à chaque fois où la lune se trouve dans l'ombre de la terre. Ceci se produit uniquement quand le soleil, la terre et la lune sont alignés. Montrer, en traçant la trajectoire d'un rayon solaire entre le soleil et la lune, que lors de cette éclipse, seuls quelques rayons du soleil peuvent atteindre la lune. Pourquoi sa couleur paraît-elle légèrement rouge ?

D. Caractérisation d'un faisceau lumineux

On considère un laser de puissance moyenne $P = 2mW$ émettant un faisceau lumineux de section circulaire de rayon $r = 0,75 mm$. Il produit une onde lumineuse plane, monochromatique ($\lambda = 632,8 nm$), polarisée rectilignement suivant Ox et se propageant dans le vide suivant les z croissants.

14. En notant respectivement E_0 et $\vec{k}$ son amplitude et son vecteur d'onde, donner en notation complexe l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ en un point quelconque de l'espace.
15. En déduire l'expression de la puissance moyenne rayonnée par la section S du laser.
16. Calculer la valeur de l'amplitude E_0 .

E. Superposition de deux ondes lumineuses

Dans le cadre de l'approximation de l'optique scalaire, on représente le champ électrique d'une onde se propageant dans le vide par sa vibration $\underline{s}(M, t)$. On se propose d'étudier la superposition de deux ondes électromagnétiques planes.

17. Entre quelles longueurs d'onde se situe le spectre des ondes lumineuses visibles ?
18. On considère deux ondes électromagnétiques associées à deux faisceaux laser représentées par :

$$\begin{cases} \underline{s}_1(M, t) = s_{01} e^{i(\omega_1 t + \varphi_1 - \vec{k}_1 \vec{r})} \\ \underline{s}_2(M, t) = s_{02} e^{i(\omega_2 t + \varphi_2 - \vec{k}_2 \vec{r})} \end{cases}$$

On donne l'expression de l'intensité d'une onde : $I = \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}(M, t)^* \rangle$, où $\langle \rangle$ désigne la moyenne temporelle, et $\underline{s}(M, t)^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{s}(M, t)$.

18.1 Montrer que l'intensité lumineuse résultant de la superposition de ces ondes en M s'écrit:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\phi) \rangle$$

I_1 et I_2 sont les intensités au point M des deux ondes prises séparément.

Expliciter ϕ en fonction de $\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2$ et $\vec{r}$.

18.2 Donner les conditions d'observation des interférences.

18.3 Définir et donner l'expression du contraste C . Quelle est la condition sur I_1 et I_2 permettant d'aboutir à un contraste maximal ? Justifier.

19. On dispose de deux faisceaux laser faisant un angle 2θ entre eux (Figure 4).

Dans la suite on suppose que les deux ondes $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ sont cohérentes telles que:

$$\begin{cases} \underline{s}_1(M, t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} \\ \underline{s}_2(M, t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})} \end{cases}$$

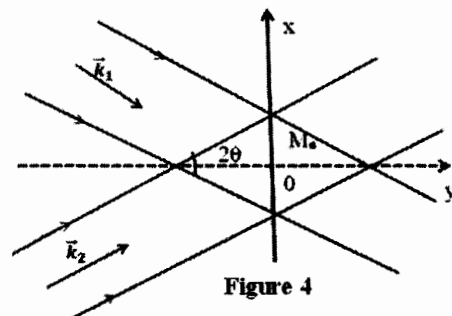


Figure 4

19.1 Pour aboutir à un phénomène d'interférence, les deux faisceaux laser doivent-ils forcément provenir du même faisceau initial ? Justifier.

19.2 Ecrire les composantes des vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ des ondes 1 et 2.

19.3 En déduire l'intensité lumineuse résultante $I(M)$ dans le champ d'interférence.

19.4 En déduire la forme des franges. Représenter le champ d'interférence en faisant apparaître ces franges.

19.5 Définir puis déterminer l'interfrange i .

F. Mesure de vitesse par interférométrie laser

La vélocimétrie laser à franges est une méthode qui permet de mesurer la vitesse d'un fluide en écoulement dans un tuyau transparent. Cet écoulement estensemencé avec de petites particules capables de diffuser de la lumière. Ces particules sont entraînées par l'écoulement supposé stationnaire. On peut assimiler leur vitesse à celle du fluide (Figure 5).

On considère une particule traversant le champ d'interférence avec une *vitesse uniforme* $\vec{v}$ (fluide supposé parfait). Par diffusion, cette particule rayonne un signal lumineux lorsqu'elle traverse une frange brillante. Un photodétecteur reçoit la lumière diffusée par cette particule et délivre un signal électrique de période T *représentant le temps mis par la particule pour traverser une frange brillante du champ d'interférence*.

20. La figure 6 montre le signal lumineux enregistré par le photodétecteur, quelle est la valeur de sa période T ?

21. Expliquer le principe de mesure de la vitesse du fluide et calculer sa valeur pour $\theta = 2^\circ$. On donne l'indice de réfraction du fluide $n = 1,33$.

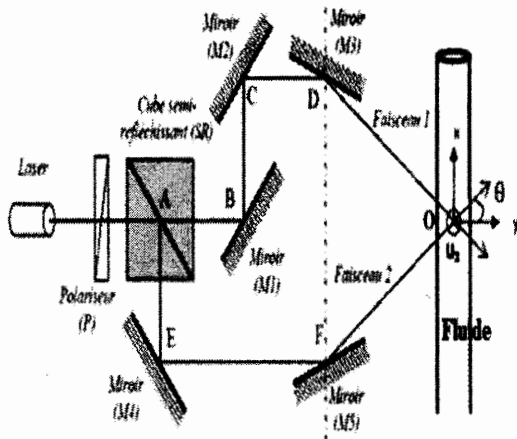


Figure 5

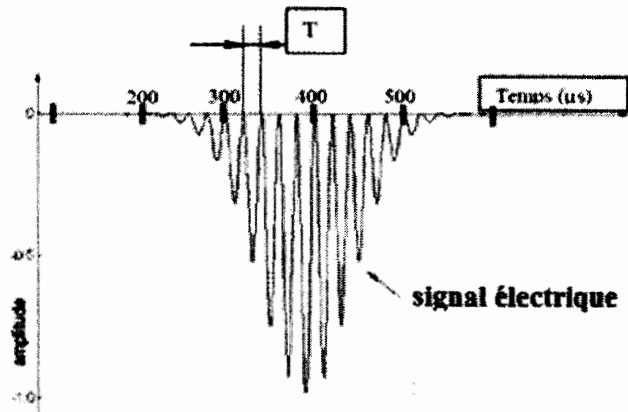


Figure 6

22. Ce dispositif ne permet pas de prévoir le sens de l'écoulement. Pour lever cette indétermination, on place sur le trajet du faisceau (1) un dispositif optoélectronique composé d'une lame transparente d'épaisseur L . Soumis à une tension $U(t)$, l'indice de réfraction de cette lame varie linéairement avec cette tension : $n(t) = 1 + a U(t)$, où a est une constante positive.

22.1 Quelle est la dimension de la constante a ?

22.2 On néglige la déviation du faisceau (1) au niveau de la lame. Déterminer l'expression du nouveau déphasage entre les deux ondes en un point M du champ d'interférence en fonction de $U(t)$, L , a , x , θ et λ .

22.3 En déduire la position des franges brillantes.

22.4 Quelle forme temporelle faut-il donner à $U(t)$ pour obtenir des franges d'interférences se déplaçant à une vitesse constante v_0 dans la direction $x > 0$, puis dans la direction $x < 0$?

22.5 Si la particule se déplace suivant $x > 0$, comparer la nouvelle période T' du signal enregistré à celle sans lame.

Problème 2

A. Fluide parfait

On étudie un écoulement stationnaire incompressible à la vitesse $\vec{v}$ d'un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité cinématique μ constante.

L'équation de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'une particule fluide est :

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho} + \vec{g} + \mu \Delta \vec{v}$$

1. Expliquer l'origine de chaque terme de cette équation.
2. Nommer la grandeur μ , quelle est son unité dans le système international ?

3. Dans un premier temps, on néglige le terme $\mu \Delta \vec{v}$ ($\mu \approx 0$). Caractériser le fluide. Etablir le théorème de Bernoulli sous la forme : $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cte$ pour un écoulement irrotationnel.
4. Retrouver la loi fondamentale de l'hydrostatique.
5. Un jardinier arrose sa pelouse. Quand il se trouve limité par la longueur du tuyau, il aurait le réflexe de minimiser la section de sortie de ce tuyau. Ceci lui permettrait d'augmenter considérablement la vitesse de l'écoulement et donc de couvrir un maximum de pelouse. On modélise la partie du tuyau se trouvant dans la main du jardinier par un convergent cylindrique horizontal présentant deux sections différentes S_A et $S_B < S_A$ (Figure 1)

5.1 Déterminer la relation entre $\Delta p = p_A - p_B$,

ρ , v_A et v_B (A et B ont la même hauteur).

5.2 Exprimer Δp en fonction de ρ , v_B , S_A et S_B .

Comparer alors p_A et p_B .

5.3 On introduit une canalisation en U reliant A et B. Cette canalisation contient du mercure de masse volumique ρ' (Figure 1).

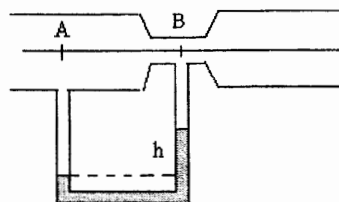


Figure 1

5.3.1 On observe une différence de niveau h entre les deux surfaces libres du mercure. Etablir la relation entre Δp , ρ , ρ' , g et h .

5.3.2 Montrer que le débit massique D_m peut s'écrire sous la forme :

$$D_m = \sqrt{\frac{2\rho(\rho' - \rho)gh}{K}} \quad \text{où } K \text{ est un coefficient de forme que l'on exprimera.}$$

5.3.3 Le débit massique D_m est proportionnel à $\sqrt{h}$. Calculer le coefficient de proportionnalité noté α . On donne: $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho' = 13579 \text{ kg.m}^{-3}$, $h = 2,5 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $S_A = 3,0 \text{ cm}^2$, $S_B = 0,2 \text{ cm}^2$.

B. Fluide réel

Dans un second temps, nous étudions l'écoulement stationnaire du fluide en tenant compte de sa viscosité tout en négligeant l'effet de pesanteur. Le système est une conduite cylindrique d'axe horizontal Oz , de rayon R et de longueur L (Figure 2).

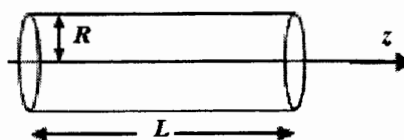


Figure 2

En tenant compte de la symétrie du problème, le champ de vitesse et le champ de pression dépendent a priori de r et de z . La vitesse s'écrit alors sous la forme : $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$.

6. Montrer que $\vec{v}$ ne dépend pas de z .

7. En se basant sur l'équation de Navier-Stokes dans la base cylindrique, montrer les deux relations suivantes : $\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = 0$ et $\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) - \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} = 0$ où η est la viscosité dynamique du fluide.

8. Soient p_E la pression du fluide à la section d'entrée et p_S la pression à la section de sortie de la conduite. Exprimer $p(z)$ en fonction de p_E , p_S et L .

9. Déterminer l'expression de la vitesse du fluide en fonction de r , R , $\Delta p = p_E - p_S$, L et η .

10. Déduire la vitesse maximale v_{max} et la vitesse moyenne v_m du fluide.
11. Donner l'allure du profil de vitesse.
12. Soit D_V le débit volumique de l'écoulement. On pose $\Delta p = R_H D_V$. Justifier l'appellation de « résistance hydrodynamique » attribuée à R_H . Donner son expression et son unité.

Dans cette conduite cylindrique de 1 cm de rayon et de 20 m de longueur circule 1 litre d'eau par seconde. Calculer v_m , R_H et Δp . On donne $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$

13. Montrer que la perte de charge, $\Delta p = p_E - p_S$ peut se mettre sous la forme:

$$\Delta p = \frac{64}{R_e} \frac{1}{2} \rho v_m^2 \frac{L}{D}$$

R_e est le nombre de Reynolds de l'écoulement, et D le diamètre de la conduite.

C. Perte de charge dans une seringue

On considère une seringue cylindrique de rayon $R = 0,8 \text{ cm}$ et de longueur $L = 9 \text{ cm}$. Elle est prolongée par une aiguille cylindrique de rayon $r = 0,8 \text{ mm}$ et de longueur $l = 3 \text{ cm}$ (Figure 3). Cette seringue contient un sérum de viscosité $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ et de masse volumique $\rho = 1,005 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Elle est munie d'un piston coulissant sans frottement. Ce sérum est injecté dans la veine d'un patient. Soit Δp_1 la perte de charge du sérum dans la seringue et Δp_2 la perte de charge du sérum dans l'aiguille. L'ensemble seringue/aiguille est en position horizontale.

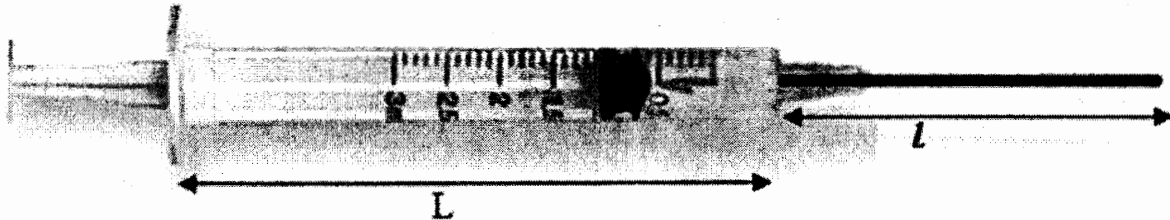


Figure 3

14. Montrer que Δp_1 et Δp_2 vérifie l'équation : $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{L}{l} \left(\frac{r}{R} \right)^4$.
15. Déduire qu'on peut considérer que le fluide est parfait dans la seringue.
16. Déterminer Δp_2 dans l'aiguille pour l'injection d'un volume $V = 1 \text{ cm}^3$ pendant une durée $\Delta t = 2 \text{ s}$.
17. La pression dans la veine du patient vaut $2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, déterminer la pression exercée sur le piston pour injecter le sérum.
18. De quel type d'écoulement s'agit-il?