République Tunisienne

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs Session 2019

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين دورة 2019

Concours Physique et Chimie
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Problème 1

Partie I :

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 -\ln(t)\, t^n dt$ et $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.

1. On pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1}$. On a :
   - f est continue sur $]0,1[$.
   - $f(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t) dt$ converge.
   - $f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} dt$ converge.

   En utilisant le critère d'équivalence, on en déduit l'existence de I.

---

2. On a $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t) = -\frac{1}{2}$ et g est continue sur $]0,1[$. Alors g se prolonge par continuité sur $[0,1]$ par la fonction $\tilde{g}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & \text{si } t \in]0,1[, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

   Il existe alors $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], |\tilde{g}(t)| \le M$.

---

3. On a :

$$\begin{aligned} \left| I - \sum_{k=0}^{n} u_{2k} \right| &= \left| \int_0^1 t^{2n+2} \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt \right| \le M \int_0^1 t^{2n+1} dt = \frac{M}{2n+2}. \end{aligned}$$

---

4. Une intégration par parties donne $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. On obtient ainsi :

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| = \frac{M}{2n+2}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = I.$$

Partie II :

1. On pose $\varphi(x,t) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{(1+t^2)}$. φ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. On sait que $\forall t > 0$, et $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x,t)| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ et que $\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2} dt$ converge alors F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(t)}{(1+t^2)} dt = \left[\frac{\pi}{2}\arctan(t) - \frac{1}{2}\arctan^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$.

---

2. φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{t\,(1+t^2)\left(1+\left(\frac{x}{t}\right)^2\right)} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)\,(t^2+x^2)}. \end{aligned}$$

   Soit $a > 0$. On a pour tout $x \geq a$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(1+t^2)\,(t^2+a^2)} = \Psi(t).$$

   Ψ est continue sur $[0,+\infty[$, de plus $\Psi(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^3}$. D'où F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$, on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(t^2+x^2)}\right).$$

   Donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt \\ &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)} - \frac{t}{(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

---

3. Un calcul simple montre que $F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$. Comme $F(0) = 0$ alors

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt.$$

4. On a $I = F(1) = \frac{\pi^2}{8}$. Par suite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

   D'autre part, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

5. On a :

$$\begin{aligned} F_1 = \frac{1}{X(X+1)^2} &= \frac{1+X-X}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{(X+1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}. \end{aligned}$$

---

6. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Partie III :

1. On a :

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}} \\ &= \frac{\lambda}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &= \frac{\lambda}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

   Comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$ on en déduit que $\lambda = \frac{1}{2-\frac{\pi^2}{6}}$.

---

2. La série de terme général $nP(X=n) = \dfrac{\lambda}{(n+1)^2}$ est convergente, donc X admet une espé-

rance $E(X)$ et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^2} \\ &= \lambda\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) = \frac{\frac{\pi^2}{6}-1}{2-\frac{\pi^2}{6}}. \end{aligned}$$

---

3. La série de terme général $n^2P(X=n) = \dfrac{\lambda n}{(n+1)^2}$ est divergente, donc X n'admet pas de variance.

---

4. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y=k) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}} \\ &= \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = \lambda(H(k+3)-1). \end{aligned}$$

---

5. On a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda(H(k+3)-1) = \lambda \sum\limits_{k=3}^{+\infty}(H(k)-1) = 1$. Alors :

$$\sum_{k=3}^{+\infty}(H(k)-1) = \frac{1}{\lambda} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(H(k)-1) = 1$.

---

6. On a $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x = 1 + \sum\limits_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x$.
On pose $u_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{n}\right)} \leq \frac{4}{n^2}$ pour $x \geq 2$. Donc la série $\sum u_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[2, +\infty[$. On en déduit alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x = 1 + \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x = 1.$$

7. D'après la question précédente $H(x)-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2^{-x}$. Par conséquent $v_k = P(Y=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \lambda 2^{-(k+3)}$.

---

8. Les séries de termes généraux $kP(Y=k) = \dfrac{\lambda k}{2^{k+3}}$ et $k^2P(Y=k) = \dfrac{\lambda k^2}{2^{k+3}}$ sont convergentes, donc Y admet une espérance et une variance.

Problème 2

Partie I :

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, avec $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout (i,j). On note ${}^tA.A = \left(c_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. On a alors $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$. D'où :

$$Tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2 = \sum_{1\le i,j\le n} \left(a_{ij}\right)^2.$$

---

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ alors $\begin{cases} {}^tA.A = I, \\ det(A) = 1, \end{cases}$

et par suite $\begin{cases} a^2+b^2 = 1, \\ c^2+d^2 = 1, \\ ad-bc = 1. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \exists \beta \in \mathbb{R}/a = \cos\beta,\ b = \sin\beta, \\ \exists \theta \in \mathbb{R}/c = \sin\theta,\ d = \cos\theta, \\ \cos(\theta+\beta) = 1 \ \ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta+\beta = 2k\pi, \end{cases}$ ainsi

$\begin{cases} \cos\beta = \cos(2k\pi - \theta) = \cos\theta, \\ \sin\beta = \sin(2k\pi-\theta) = -\sin\theta, \end{cases}$

et par suite A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} /\theta \in \mathbb{R}\}$.

---

3. Soient θ_1 et θ_2 deux réels. On a :

$$\begin{aligned} R_{\theta_1}.R_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1+\theta_2}. \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence montre que pour tout entier naturel k on a : $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$.

Partie II :

On considère l'application $f : \mathcal{S}L_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ A \mapsto Tr({}^tA.A)$.

1. Dans cette question $n = 2$.
   (a) On a $(a-d)^2 \geq 0$ alors $a^2 + d^2 \geq 2ad$. De la même manière on aura $-2bc \leq b^2 + c^2$.
   Donc pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}L_2(\mathbb{R})$, on a :
   $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ad - bc) = 2.$$
   C'est à dire $f(A) \in [2, +\infty[$.

   (b) Si $f(A) = 2$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2 = 2(ad - bc)$ alors
   $$(a-d)^2 + (b+c)^2 = 0.$$
   Donc $a = d$ et $b = -c$. Comme $\det A = 1$ alors $a^2 + b^2 = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; c'est à dire $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
   La condition suffisante est triviale.

   (c) On a $f(M_x) = 2 + x^2$. On en déduit que $\forall y \geq 2,\ y = f(M_{\sqrt{y-2}})$.
   Par suite $\mathrm{Im}f = [2, +\infty[$.

---

2. Soit $A \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ les colonnes de A.

(a) On utilise la question 1. de la partie I, on trouve :

$$f(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(x_{ij}\right)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^2.$$

(b) En utilisant l'inégalité de Hadamard, on a :

$$1 = |\det(A)| \leq \|X_1\| \ \ldots \ \|X_n\|,$$

donc $1 \leq \prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2$. Par suite, $1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2}$.

(c) Par l'inégalité arithmético-géométrique on obtient :
$1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2} \leq \frac{\|X_1\|^2+\ldots+\|X_n\|^2}{n} = \frac{f(A)}{n}$.
Donc $f(A) \geq n$ et par suite $\mathrm{Im} f \subset [n, +\infty[$.

(d) Si $f(A) = n$ alors $1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2} \leq \frac{\|X_1\|^2+\ldots+\|X_n\|^2}{n} = 1$ et par suite $\det(A) = 1$ et $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2} = \frac{\|X_1\|^2+\ldots+\|X_n\|^2}{n}$.
C'est les cas des égalités dans les inégalités de Hadamard et l'inégalité arithmético-géométrique, on en déduit que la famille $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est orthonormale.

(e) Si $A \in f^{-1}(\{n\})$ alors $f(A) = n$ et par suite $\det(A) = 1$ et la famille $X_1, X_2, ..., X_n$ des colonnes de A est orthonormale. Donc $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement si $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ $f(A) = Tr({}^tA.A) = n$.

(f) D'après la question II)2)b) on a $Im(f) \subset [n, \infty[$. Réciproquement en s'inspirant de la question II)1)d) nous considérons la matrice
$M_y = I_n + \sqrt{y-n} E_{12}$, on obtient $f(M_y) = y$, donc $\mathrm{Im} f = [n, +\infty[$.

Partie III :

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) A est symétrique à coefficients réels donc d'après le théorème spectral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ diagonale tel que $A = P.D.{}^tP$.

(b) Comme $D = (diag(\sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_2}, \cdots, \sqrt[3]{\lambda_n})^3 =: D_1^3$.
$M = P.D_1.{}^tP$ répond à la question. Ceci montre aussi que l'application h est surjective.

---

2. Soit M et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $h(M) = h(N) = A$. Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de M.

(a) Pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$ et $X \neq 0$ tel que $X \in E_{\lambda_i}(M)$ on a :
$MX = \lambda_i X \Rightarrow M^3 X = AX = \lambda_i^3 X \Rightarrow X \in E_{\lambda_i^3}(A)$.
Par suite on a : $E_{\lambda_i}(M) \subset E_{\lambda_i^3}(A)$.

(b) Le fait que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathbb{R}^n = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(M)$.
D'autre part on a : $E_{\lambda_i}(M) \subset E_{\lambda_i^3}(A)$ et en utilisant le fait que si $i \neq j$, $\lambda_i^3 \neq \lambda_j^3$ alors

$$\mathbb{R}^n = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(M) = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i^3}(A).$$

Par suite $\sum_{i=1}^{p} [dim(E_{\lambda_i^3}(A)) - dim(E_{\lambda_i}(M))] = 0$ et en utilisant la question III)2)a) on en déduit que $\forall i \in \{1, \cdots, p\}$ $dim(E_{\lambda_i^3}(A)) = dim(E_{\lambda_i}(M))$ et on conclut que $\forall i \in \{1, \cdots, p\}$ $E_{\lambda_i^3}(A) = E_{\lambda_i}(M)$.

(c) D'après la question précédente, on en déduit que l'ensemble des valeurs propres de A est $\left\{\lambda_1^3, \lambda_2^3, ..., \lambda_p^3\right\}$.
Soit α une valeur propre de N alors α^3 est une valeur propre de $N^3 = A$. Ainsi $\exists i \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $\alpha^3 = \lambda_i^3$ et par la suite $\alpha = \lambda_i$ est une valeur propre de M.

(d) D'après ce qui précède $\forall i \in \{1, \cdots, p\}$ $E_{\lambda_i}(M) = E_{\lambda_i}(N)$ alors $M = N$. On conclut que l'application h est injective et par suite h est bijective.

---

3. Il est clair que -1 et 8 sont les valeurs propres de A et $E_{-1} = vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ et $E_8 = vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ répond à la question.

Partie IV :

1. Soit $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Si $a > 0$, alors $A = aR_{\frac{\pi}{2}}$. sinon $A = -aR_{-\frac{\pi}{2}}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{\frac{\pi}{2}}$ ou bien $A = \lambda R_{-\frac{\pi}{2}}$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g_p(R_\theta) = R_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (R_\theta)^p = R_{p\theta} = R_{\frac{\pi}{2}}$.
   $\theta = \frac{\pi}{2p}$ répond à la question.

   (c) S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{\frac{\pi}{2}}$. On choisit $M = \sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}$.
   S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{-\frac{\pi}{2}}$. On choisit $M = \sqrt[p]{\lambda} R_{-\frac{\pi}{2p}}$.

---

2. Soit $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ tels que $S = P.D.P^{-1}$.

   (a) S'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M^{2p} = D$ alors $M.D = M.M^{2p} = M^{2p+1} = D.M$.

   (b) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$MD = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} = DM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   Donc $b = c = 0$, par suite M est une matrice diagonale.

   (c) On suppose que $\lambda_1 < 0$ et qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M^{2p} = D$.
   On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors d'aprés la question précédente, $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donc $M^{2p} = \begin{pmatrix} a^{2p} & 0 \\ 0 & d^{2p} \end{pmatrix}$, d'où $\lambda_1 = a^{2p} < 0$. Absurde. On conclut que $\lambda_1 = \lambda_2$

---

3. On a $\left(\alpha R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -\alpha^2 I_2$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 < 0$ alors $D = \lambda_1 I_2 = -\lambda^2 I_2$, avec $\lambda = \sqrt{-\lambda_1}$.

$$D = \left(\lambda R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\left(\sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}\right)^p\right)^2 = \left(\sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}\right)^{2p}.$$

---

4. $A \in Im\left(g_{2p}\right)$ si et seulement si ($\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset [0, +\infty[$ ou bien $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.).

Fin de l'épreuve