République Tunisienne

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2020

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2020

Concours Physique et Chimie
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

1. (a) Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, alors pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant p_n e^{-t x_n} \leqslant p_n$. Or, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n e^{-t x_n}$.

(b) Soit $t \geqslant 0$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X = x_n) e^{-t x_n}$ converge, ce qui est le cas d'après 1.(a) donc e^{-tX} est d'espérance finie et $E(e^{-tX}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) e^{-t x_n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-t x_n}$.

---

2. D'après 1.(a) $\forall t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-t x_n} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc Φ_X est à valeurs dans $[0,1]$.

D'autre part, en posant $f_n(t) = p_n e^{-t x_n}$, pour $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$;
- $\forall t \geqslant 0$, $|f_n(t)| \leqslant p_n$, donc $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |f_n(t)| \leqslant p_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement et par suite uniformément sur $[0,+\infty[$;

On conclut, par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, que Φ_X est continue sur $[0,+\infty[$.

---

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\varphi : x \mapsto x^k e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, donc φ est positive.
$\varphi'(x) = x^{k-1} e^{-\lambda x}(k - \lambda x)$, d'après son tableau de variations, φ atteint son maximum en $\dfrac{k}{\lambda}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant x^k e^{-\lambda x} \leqslant \varphi(\dfrac{k}{\lambda}) = \dfrac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}$.

(b) Avec les notations du 2. on a :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_n^{(k)}(t) = (-1)^k p_n x_n^k e^{-t x_n}$;
- $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$;

- Convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

D'après 3.(a) $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $|f_n^{(k)}(t)| = p_n x_n^k e^{-t x_n} \leqslant p_n \dfrac{k^k}{t^k} e^{-k} \leqslant p_n \dfrac{k^k}{\alpha^k} e^{-k}$, donc

$\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k p_n$, où $M_k = \dfrac{k^k}{\alpha^k} e^{-k}$. Or, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[\alpha,\beta]$;

On déduit alors que la somme $\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t > 0$, $\Phi_X^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n^k e^{-t x_n} = (-1)^k E(X^k e^{-tX})$.

---

4. La variable aléatoire discrète $aX+b$ est bien à valeurs réelles positives, et on a :
$\forall\, t \geqslant 0$, $\Phi_{aX+b}(t) = E\left(e^{-t(aX+b)}\right) = E\left(e^{-atX}e^{-bt}\right)$. Par linéarité de l'espérance,
$\Phi_{aX+b}(t) = e^{-bt}E\left(e^{-atX}\right) = e^{-bt}\Phi_X(at)$.

---

5. $\forall t \geqslant 0$, e^{-tX} et e^{-tY} sont des variables aléatoires discrètes indépendantes (car X et Y sont indépendantes) et d'espérances finies, on en déduit $E\left(e^{-t(X+Y)}\right) = E\left(e^{-tX}e^{-tY}\right) = E\left(e^{-tX}\right) E\left(e^{-tY}\right)$, d'où $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$, donc $\Phi_{X+Y} = \Phi_X\Phi_Y$.

---

6. X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert, e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} P(X=n)\,e^{-nt}$ converge.

Or, $P(X=n)\,e^{-nt} = p\,e^{-t}\left((1-p)\,e^{-t}\right)^{n-1}$, donc e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si $|(1-p)\,e^{-t}| < 1 \;\Leftrightarrow\; t \in]\ln(1-p),+\infty[$ et pour tout $t > \ln(1-p)$,
$E(e^{-tX}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)\,e^{-nt} = p\,e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-p)\,e^{-t}\right)^{n-1} = \dfrac{p\,e^{-t}}{1-(1-p)\,e^{-t}}$.

---

7. (a) X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $P(X=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. D'après le théorème de transfert, e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} P(X=n)\,e^{-nt}$ converge. Or, $P(X=n)\,e^{-nt} = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda e^{-t})^n}{n!}$, et la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(\lambda e^{-t})^n}{n!}$ converge pour tout réel t, donc e^{-tX} est d'espérance pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $E(e^{-tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,e^{-nt}$

(b) - La somme de deux variables indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres λ et μ, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Donc, puisque les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, leur somme S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.
- Les inégalités sont immédiates pour $t = 0$.
Soit $t > 0$, on a $(S_n \leqslant na) = (-tS_n \geqslant -tna) = (e^{-tS_n} \geqslant e^{-tna})$. Or, e^{-tS_n} est d'espérance finie, car S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, donc par l'inégalité de Markov,
$P(S_n \leqslant na) = P(e^{-tS_n} \geqslant e^{-tna}) \leqslant \dfrac{E(e^{-tS_n})}{e^{-tna}}$, et d'après 7.(a)
$E(e^{-tS_n}) = \Phi_{S_n}(t) = e^{n\lambda(e^{-t}-1)}$, d'où $P(S_n \leqslant na) \leqslant e^{n\lambda(e^{-t}-1)}e^{tna} = e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$.
De même pour $t < 0$, $P(S_n \geqslant na) = P(e^{-tS_n} \geqslant e^{-tna}) \leqslant e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$.

Problème 1

I Généralités

1. - La fonction nulle $0 \in \mathbb{E}$, car $t \mapsto \dfrac{0}{1+t^2} = 0$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$;
   - Si f et g sont dans $\mathbb{E}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est continue sur $[0, +\infty[$, et l'application $t \mapsto \dfrac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t^2} = \lambda \dfrac{f(t)}{1+t^2} + \dfrac{g(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, comme somme de fonctions intégrables.

   Ainsi, $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel..
   D'autre part, si $f \in \mathbb{B}$, alors f est continue sur $[0, +\infty[$, et il existe $M > 0$ tel que $\forall t \geqslant 0$, $|f(t)| \leqslant M$, donc $\left|\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{M}{1+t^2}$: intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par suite $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $f \in \mathbb{E}$.

---

2. (a) Il suffit de considérer $t_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$, $g(t_n) = \sqrt{t_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc g n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

   (b) $\forall t \geqslant 0$, $\left|\dfrac{g(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2} = h(t)$,

   h est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $h(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$: intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\frac{3}{2} > 1$.
   On en déduit que $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$, donc $g \in \mathbb{E}$.
   On conclut alors que $\mathbb{B}$ est strictement inclus dans $\mathbb{E}$.

   ---

3. Soit $x > -1$, on a $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$, de plus $\dfrac{f(t)}{1+t^2+x} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $t \to \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

---

4. Simple par linéarité de l'intégrale.

II Propriétés de $\widetilde{f}$

1. On pose $F(x,t) = \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$, pour $(x,t) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, de sorte que $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\,dt$.
   On a :
   - $\forall x > -1$, $t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
   - $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,t) = (-1)^p p! \dfrac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}$ par une récurrence simple ;
   - $\forall x > -1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- Hypothèse de domination locale : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, on a $\forall\, x \in [a,b]$, $\forall\, t \geqslant 0$, $\left|\dfrac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{p!\,|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+1}} = \varphi_p(t)$;
φ_p est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\varphi_p(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{|f(t)|}{1+t^2+a}\right)$, donc φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'où $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > -1$,
$$(\widetilde{f})^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,t)\,dt = (-1)^p\,p! \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\,dt.$$

---

2. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant 1$, donc $\widetilde{f}(x_n)$ est bien définie pour $n \geqslant n_0$. On pose alors $h_n(t) = \dfrac{f(t)}{1+t^2+x_n}$, $\forall\, t \geqslant 0$ et on applique le théorème de convergence dominée :
   - $\forall\, n \geqslant n_0$, h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
   - $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
   - $\forall\, n \geqslant n_0$, $\forall\, t \geqslant 0$, $|h_n(t)| \leqslant \dfrac{|f(t)|}{1+t^2} = \varphi(t)$, et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

   Donc, par le théorème de convergence dominée,
   $$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\,dt = 0.$$

   (b) caractérisation séquentielle de la limite.

   ---

3. L'application ψ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\forall\, t \geqslant 0$, $\left|\dfrac{\psi(t)}{1+t^2}\right| \leqslant |\psi(t)|$ et ψ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $t \mapsto \dfrac{\psi(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et par suite $\psi \in \mathbb{E}$.
D'autre part, $x\,\widetilde{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1+t^2)\psi(t) - (1+t^2)\psi(t)}{1+t^2+x}\,dt = \int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt - \widetilde{g}(x)$ (*)
où $g : t \mapsto (1+t^2)\psi(t)$. Or, $g \in \mathbb{E}$, car g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'après 2.(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{g}(x) = 0$, ce qui entraine par (*) que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\widetilde{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt$,
par suite $\widetilde{\psi}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt$.

---

4. (a) Si $x \in]-1,1[$, alors $\dfrac{|x|}{1+t^2} \leqslant |x| < 1$, donc $\dfrac{f(t)}{1+t^2+x} = \dfrac{f(t)}{1+t^2}\,\dfrac{1}{1+\frac{x}{1+t^2}} = \dfrac{f(t)}{1+t^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\,x^p}{(1+t^2)^p}$.

   (b) Soit $x \in]-1,1[$.
   D'après ce qui précède : $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\,f(t)\,x^p}{(1+t^2)^{p+1}}\,dt$
   On pose $u_p(t) = \dfrac{(-1)^p\,f(t)\,x^p}{(1+t^2)^{p+1}}$, et on applique le théorème d'intégration terme à terme :
   - $\forall\, p \in \mathbb{N}$, u_p est intégrable sur $[0,+\infty[$, car $(1+t^2)^{p+1} \geqslant 1+t^2 > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ donc $|u_p(t)| \leqslant \dfrac{|f(t)|}{(1+t^2)}$: intégrable sur $[0,+\infty[$;

- $\sum_{p\geqslant 0} u_p$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et sa somme est $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$: continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- pour tous $t \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_p(t)|\,dt \leqslant |x|^p \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}\,dt \leqslant |x|^p \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)}\,dt}_{=c} =$ $c\,|x|^p$ et $\sum_{p\geqslant 0} |x|^p$ converge pour $x \in]-1,1[$. Par suite, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |u_p(t)|\,dt$ converge ;

ce qui permet de conclure que $\displaystyle\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(t)\,dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_p(t)\,dt = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p I_p\, x^p$

(c) Non, car il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, qui ne sont pas développables en série entière sur $]-1,1[$, par exemple $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2}$ est développable en série entière seulement sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.
OU car il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, qui ne sont pas développables en série entière par exemple $t \mapsto \exp(-\frac{1}{t^2})$, si $t \neq 0$.

Problème 2

I Existence de matrice de G de norme minimale

1. La composante située à la i-ème ligne et i-ème colonne de ${}^tA\,A$ est $c_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

   Ainsi, en échangeant la notation des indices

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

---

2. (a) L'application det est polynomiale en les composantes de la matrice donc elle est continue.

   (b) D'après (a) l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$, donc G est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

3. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\det(A_p) = 1$ d'où $A_p \in G$. De plus $\|A_p\| = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2} + n - 2}$.

   (b) On a $\|A_p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ donc G n'est pas borné.

---

4. (a) Comme $M \in G$ donc $\det(M) = 1$ et par suite $M \neq 0_n$. Ainsi $r = \|M\| \neq 0$.

   (b) L'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne donc continue, ou bien c'est une composée de fonctions continues d'après question 1.

(c) Comme $K \subset B_f(0_n, r)$ qui est bornée alors K est borné.
D'autre part, K étant une intersection de deux fermés donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de K qui converge vers L, alors :
- $X_n \in G$ et G est fermé donc $L \in G$
- $X_n \in B_f(0_n, r)$ et $B_f(0_n, r)$ est fermée donc $L \in B_f(0_n, r)$

Ainsi, $L \in K$, par suite K est un fermé.
Finalement, K est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Pour tout $A \in G \setminus K$ on a $\|A\| > r$ et si $A \in K$ on a $\|A\| \leq r$. Ainsi $\inf\limits_{A\in G} \|A\| = \inf\limits_{A\in K} \|A\|$.
Comme l'application $A \mapsto \|A\|$ est continue sur le fermé borné K alors elle atteint sa borne inférieure dans K.

II Cas particulier où $n = 2$

1. Le résultat s'obtient en calculant $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A)$.

---

2. $\|A\| = \sqrt{2}$.

---

3. (a) Comme $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2 = r^2$ et $\det({}^tAA) = \det(A)^2 = 1$, alors d'après 1.
$\chi_{{}^tAA}(X) = X^2 - r^2X + 1$.

(b) La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Ainsi $\chi_{{}^tAA}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta = r^4 - 4 \geq 0$.

---

4. D'après 2. une matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est une matrice dans G et de norme $\sqrt{2}$ donc $A \in K_{\sqrt{2}}$ et par suite $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \subset K_{\sqrt{2}}$.
Réciproquement, si $A \in K_{\sqrt{2}}$ alors d'après 3. $\chi_{{}^tAA}(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. D'où $\mathrm{Sp}({}^tAA) = \{1\}$ et comme ${}^tAA$ est diagonalisable alors ${}^tAA = I_2$. Ainsi $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

III Cas général

1. (a) Théorème spectral.

(b) On a $\|AV_i\|^2 = \langle AV_i, AV_i\rangle = {}^tV_i\,{}^tAAV_i = \lambda_i\|V_i\|^2 = \lambda_i > 0$ car A est inversible et donc $AV_i \neq 0$.

---

2. (a) ${}^tAU_i = \frac{1}{\sigma_i}{}^tAAV_i = \sigma_i V_i$.

(b) On a $A{}^tAU_i = \sigma_i^2 U_i = \lambda_i U_i$.

(c) On a $\langle U_i, U_j\rangle = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}{}^tV_i\,{}^tAAV_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_i}{}^tV_i\,V_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_i}\delta_{i,j} = \delta_{i,j}$. Comme de plus la famille est de cardinal n alors c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

---

3. (a) Les colonnes de U (respectivement de V) forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ces deux matrices sont orthogonales.

(b) Par un calcul matriciel, la composante située sur la i-ème ligne et j-ème colonne de Σ est $\Sigma_{i,j} = {}^tU_i AV_j = \sigma_j {}^tU_i U_j = \sigma_j \delta_{i,j}$.

(c) On a $\|A\|^2 = \|U\Sigma^tV\|^2 = \mathrm{Tr}(V\Sigma^{2\,t}V) = \mathrm{Tr}(\Sigma^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. De plus

$\det(A) = \det(U\Sigma^tV) = \det(\Sigma) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i$ (sachant que $\det(A) = 1 > 0$).

(d) Une matrice $A = U\Sigma^tV \in G$ de norme minimale est une matrice telle que $\det(A) = \sigma_1 \cdots \sigma_n = 1$ et $\|A\|^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ soit minimale. D'après le résultat admis on a dans ce cas $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$ d'où $A = U^tV$ est une matrice orthogonale : ${}^tAA = I_n$ et par suite $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, et la valeur minimale de $\|A\| = \sqrt{n}$.
Réciproquement, si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $det(A) = 1$ donc $A \in G$ et $\|A\| = \sqrt{Tr({}^tAA)} = \sqrt{Tr(I_n)} = \sqrt{n}$.
